Lösungvorschlag. Kein Anspruch auf Korrektheit!

Mathematische Logik **Name:** ____________________

SS 2017

1. Klausur

22.08.2017

Bearbeitungszeit: 120 Minuten + 15 Minuten Einlesezeit

Question	Points	Score
1	23	
2	27	
3	24	
4	20	
5	15	
6	11	
Total:	120	

1. Jede Antwort muss **kurz** begründet werden. Gegenbeispiele sollten konkret angegeben werden.

   Sei τ eine endliche Struktur

   (a) i. (1 point) Sei ♣ ein Konstantensymbol. Ist der Satz $(\neg\exists x \clubsuit = x \rightarrow \neg\exists x = x)$ erfüllbar?

   Konstantensymbole sind 0-stellige Funktionen. Funktionen von τ-Strukturen sind auf das Universum der Struktur beschränkt. Der Satz somit eine Tautologie, insb. also erfüllbar.

   ii. (2 points) Sei $\varphi = \forall x \forall y (x + y = y + x)$. Gilt $(\mathbb{N}, +) \vDash \varphi$? Ist φ auch allgemein gültig?

   Auf $(\mathbb{N}, +)$ gilt das Kommutativgesetz. Also $(\mathbb{N}, +) \models \varphi$. φ jedoch nicht allgemeingültig. Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +)$, mit $+^{\mathfrak{A}}(a,b) \begin{cases} a+b & a,b \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \\ 0 & a = 1, b = 0 \\ 1 & a = 0, b = 1 \end{cases}$

   Dann $\mathfrak{A} \not\models \varphi$

   iii. (1 point) Geben Sie einen FO-Satz ψ an, sodass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{B} = (V, E)$ gilt: $\mathfrak{B} \vDash \psi$ gdw. $\mathfrak{B}$ den Graphen $\bullet \to \bullet$ als Substruktur enthält?

   $\psi = \exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge Exy \wedge \neg Eyx \wedge \neg Exx \wedge \neg Eyy)$

   iv. (1 point) Geben Sie ein Model der CTL Formel $A(P_0 \cup P_1)$ an.

   $$\begin{array}{c} \bullet \\ P_0 \\ \downarrow \\ \bullet \\ P_0 \\ \downarrow \\ \bullet \\ P_1 \end{array}$$

   (b) i. (2 points) Es gibt eine zu $\neg(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$ logisch äquivalente AL-Formel, in der nur Junktoren $\Longrightarrow$ und $\neg$ vorkommen. Ja.

$$
\begin{aligned}
&\neg(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)\\
\equiv\ &(\neg X \vee \neg Y) \vee (\neg X \wedge Z)\\
\equiv\ &(X \rightarrow \neg Y) \vee (\neg X \wedge Z)\\
\equiv\ &(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(X \vee \neg Z)\\
\equiv\ &(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(Z \rightarrow X)\\
\equiv\ &(Z \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow \neg Y)
\end{aligned}
$$

ii. (2 points) Das folgende Problem ist in Polynomialzeit entscheidbar: Gegeben eine Horn-Formel φ. Ist $\neg\varphi$ eine Tautologie?

Ja.
$\neg\varphi$ ist eine Tautologie, gdw. φ unerfüllbar. Durch Einheitsresolution lässt sie die Unerfüllbarkeit prüfen. Insb. ist die Menge der Resolventen bei Einheitsresolution auf Horn-Formeln beschränkt. Also in Polynomialzeit entscheidbar.

iii. (2 points) Sei die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \neg\varphi, \psi$ im SK ableitbar. Dann ist $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

Falsch.
Sei $\Gamma = \emptyset, \varphi = \psi = 0$. Dann ist $\Gamma \Rightarrow \neg\varphi, \psi$ im SK ableitbar. Jedoch $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar.

iv. (2 points) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen und sei $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine unendliche Satzmenge. Wenn $\mathfrak{A} \not\models \Phi$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass der Herausforderer das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

Wahr.
Aus $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \not\models \Phi$ folgt $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$. Also gewinnt der Herausforderer $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für ein hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$.

v. (2 points) Für jede endliche τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist das folgende Problem entscheidbar. Gegeben ein FO-Satz φ. Ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi\}$ erfüllbar?

Wahr.
Die Theorie einer einzelnen endlichen Struktur ist stets vollständig. Wenn $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, dann $Th(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar, sonst erfüllbar. Da $\mathfrak{A}$ endlich ist, enthält $\mathfrak{A}$ auch nur endlich viele Elemente. Somit ist $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ entscheidbar.

vi. (2 points) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und $\psi \in \mathrm{FO}$, sodass $\Phi \vDash \psi$, und sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Falls Φ_0 endlich ist, gilt bereits $\Phi_0 \vDash \psi$.

Falsch.
Sei $\Phi = \{\varphi, \psi\}$, $\psi \not\equiv \varphi$. Dann $\Phi \models \psi$. Sei $\Phi_0 = \varphi$. Dann Φ_0 endlich, aber $\Phi_0 \not\models \psi$.

vii. (2 points) Sei $\mathfrak{A}$ eine Herbrandstruktur über der Signatur $\{f, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol ist und f ein einstelliges Funktionssymbol.
Wenn $\mathfrak{A} \vDash \exists x(c = fx)$, dann ist $f^{\mathfrak{A}}$ surjektiv.

Wahr.
Da $\mathfrak{A}$ eine Herbrandstruktur ist, ist das Universum $A = \{f^i x | i \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$. Durch den induktiven Aufbau ist f selbstabbildend auf $\{f^i x | i \in \mathbb{N}\}$. Daraus folgt f ist surjektiv auf $\{f^i x | i \in \mathbb{N}\}$. Da $\mathfrak{A} \vDash \exists x(c = fx)$ existiert also ein $f^k x$ mit $f f^k x = c, k \in \mathbb{N}_0$. Damit ist f surjektiv auf dem gesamten Universum. Also surjektiv.

viii. (2 points) Sei τ eine endliche Signatur, und K eine endliche Klasse von endlichen τ-Strukturen. Dann ist K auch (bis auf Isomorphie)edlich axiomatisierbar.

Wahr.
K enthält endlich viele endliche Strukturen. Jede endliche Struktur ist endlich axiomatisierbar. Damit erfüllt K auch nur endlich viele Sätze. Die Verundung dieser Sätze ist ein endliches Axiomensystem.

ix. (2 points) Jede erfüllbare, abzählbare Satmenge besitzt ein abzählbares Modell.

Wahr.
Gilt nach absteigendem Satz von Löwenheim-Skolem.

2. (a) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen funktional vollständig sind.

   i. (3 points) Die Menge $\{f, 1\}$, mit

$$f(a,b,c) := \begin{cases} b \oplus c & , a = 0 \\ a \oplus b & , a = 1 \end{cases}$$

   wobei $\oplus$ das XOR bezeichnet.

$$\begin{aligned} 0 &= f(1,1,1) \\ \neg X &= f(0,1,X) \\ X \vee Y &= f(X,0,Y) \end{aligned}$$

   Da $\{\neg, \vee\}$ funktional vollständig ist, ist auch $\{f, 1\}$ funktional vollständig.

   ii. (3 points) Die Menge $\{\nrightarrow\}$ mit $[[x \nrightarrow y]] := 1 - [[x \rightarrow y]]$.

   Nicht funktional vollständig.
   $X \nrightarrow Y \equiv \neg(\neg X \vee Y) \equiv X \wedge \neg Y$
   Es ist $0 = X \nrightarrow X$. Es ist $X \nrightarrow 0 = 0 = 0 \nrightarrow X$, somit die Negation nicht darstellbar. Damit insb. nicht funktional vollständig.

(b) (2 points) Geben Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik an.

Es sei $\Phi \subseteq AL, \psi \in AL$
(i) Φ ist erfüllbar, gdw. jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.
(ii) $\Phi \models \psi$, gdw. es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$.

(c) (5 points) Weisen Sie mittels der Resolutionsmethode nach, dass diese Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{A \to (B \wedge \neg C), A \vee B, D \vee A, \neg D \vee \neg A, B \to C, E \vee \neg B \vee \neg C\} \vDash \{(E \wedge B) \vee (\neg E \wedge \neg B)\}$$

Nebenrechnung:
$A \to (B \wedge \neg C) \equiv \neg A \vee (B \wedge \neg C) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)$

$\{\neg A, B\}\{\neg A, \neg C\}\{A, B\}$ $\{D, A\}\{\neg D, \neg A\}\{E, \neg B, \neg C\}$ $\{\neg B, C\}$ $\{\neg E, \neg B\}\{E, B\}$

$\{B\}$

$\{\neg E\}$

$\{\neg B, \neg C\}$

$\{\neg B\}$

$\square$

(d) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die geg. Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

i. (3 points) $\neg((X \to \neg Z) \land (\neg Z \to \neg X) \land ((\neg Y \land W) \lor (\neg W \land \neg Y)))$

Es sind $\mathfrak{I}(X) = 1, \mathfrak{I}(Y) = 0, \mathfrak{I}(W) = 0, \mathfrak{I}(Z) = 0$
und $\mathfrak{I}'(X) = 0, \mathfrak{I}'(Y) = 1, \mathfrak{I}'(W) = 0, \mathfrak{I}'(Z) = 0$
Modelle dieser Formel. Jedoch ist $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{I}'$ kein Modell. Horn-Formeln sind unter Schnitt abgeschlossen. Also gibt keine es zu dieser Formel äquivalente Horn-Formel.

ii. (3 points) $(((\neg Z \lor Y) \land (Z \lor \neg W)) \lor \neg X) \land (\neg Z \lor (Y \to W))$

$$\begin{aligned} &(((\neg Z \lor Y) \land (Z \lor \neg W)) \lor \neg X) \land (\neg Z \lor (Y \to W)) \\ \equiv\ &((\neg Z \lor Y) \lor \neg X) \land (Z \lor \neg W) \lor \neg X)) \land (\neg Z \lor (\neg Y \lor W)) \\ \equiv\ &(\neg Z \lor Y \lor \neg X) \land (Z \lor \neg W \lor \neg X) \land (\neg Z \lor \neg Y \lor W) \end{aligned}$$

Somit äquivalent zu einer Horn-Formel

(e) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils *semantisch* (d.h. nicht mittels Ableitung im SK), dass die folgenden Schlussregeln korrekt sind.

i. (4 points)

$$\frac{\Gamma, \exists x\varphi(x) \implies \Delta, \forall x\varphi(x)}{\Gamma \implies \Delta, \forall x\varphi(x), \forall x\neg\varphi(x)}$$

Es gelte die Prämisse.
Zz.: Die Konklusion ist gültig.
Gegeben Sei eine Struktur $\mathfrak{A} \models \Gamma$.
1. Fall: Sei $\mathfrak{A} \not\models \exists x\varphi(x)$, dann folgt $\mathfrak{A} \models \neg\exists x\varphi(x) \equiv \forall x\neg\varphi(x)$ und damit die Konklusion gültig.
2. Fall: Sei $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi(x)$. Da die Prämisse gültig ist, muss entweder $\mathfrak{A} \models \bigvee \Delta$, oder $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi(x)$. In beiden Fällen ist die Konklusion gültig.
Somit ist die Schlussregel korrekt.

ii. (4 points)

$$\frac{\Gamma, \varphi \implies \Delta, \psi \qquad\qquad \Gamma, \psi \implies \Delta, \varphi}{\Gamma \implies \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

Es gelte die Prämisse.
Zz.: Die Konklusion ist gültig.
Es sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$.
1. Fall: Falls $\mathfrak{I} \not\models \varphi$, dann gilt nach 2. Prämisse $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$. Somit gilt die Konklusion.
2. Fall: Falls $\mathfrak{I} \not\models \psi$, dann gilt nach 1. Prämisse $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$. Somit gilt die Konklusion.
3. Fall: Falls $\mathfrak{I} \not\models \bigvee \Delta$, dann nach 1. Prämisse $\mathfrak{I} \models \psi$ und nach 2. Prämisse $\mathfrak{I} \models \varphi$. Somit gilt die Konklusion.
Somit ist die Schlussregel korrekt.

3. (24 points) Begründen sie jede Antwort.

(a) Ist der Satz $\forall x \forall y(Exy \to Eyx) \wedge \neg \forall x \forall y(Exy \leftrightarrow Eyx)$ erfüllbar?

Es ist $\mathfrak{A} = (V, E)$, mit $|V| = 1, E = \emptyset$ ein Model. Also erfüllbar.

(b) Es sei $\mathfrak{A} = (A, R)$ eine $\{R\}$-Struktur. Formalisieren jeweils die folgenden Eigenschaften in FO.

i. R ist symmetrisch aber nicht asymmetrisch.

$\forall x \forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \neg \forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$

ii. Es gibt 3 versch. Elemente $a_1, a_2, a_3 \in A$, so dass $R \subseteq \{a_1, a_2, a_3\}xA$

$\exists a_1 \exists a_2 \exists a_3 \forall x \forall y(\neg(a_1 = a_2) \wedge \neg(a_2 = a_3) \wedge \neg(a_3 = a_1) \wedge (Rxy \to (x = a_1 \vee x = a_2 \vee x = a_3)))$

iii. Es gibt 100 versch. Elemente $a_1, ..., a_{100} \in A$, so dass die Relation $\{(b, c) \in R : b, c \notin \{a_1, ...a_{100}\}\}$ symmetrisch ist.

$\exists a_1 ... \exists a_{100}(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 100} x_i \neq x_j \wedge \forall x \forall y(Rxy \to (Ryx \vee (\bigvee_{1 \leq i \leq 100}(x = a_i \vee y = a_i)))))$
Es gibt 100 paarweise versch. Elemente, und wenn die Relation gilt ist, entweder symmetrisch, oder einer der beiden (oder beide) ist aus $a_i, i \in \{1, ..., 100\}$

iv. R ist nicht symmetrisch, aber es gibt eine endliche Substruktur $\mathfrak{B} = (B, R^{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{A}$, so dass $R^{\mathfrak{B}}$ sowohl symmetrisch, als auch asymmetrisch ist.

$\exists x \exists y \neg(Rxy \to Ryx) \wedge \exists x \exists y(Rxy \to Ryx \wedge Rxy \to \neg Ryx)$

(c) Sei $\mathfrak{A} := (P(\mathbb{N}), \cap^{\mathfrak{A}})$, wobei $P(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ und $\cap^{\mathfrak{A}}$ den Schnitt zweier Mengen bezeichne. Zeigen oder widerlegen sie jeweils die elementare Definierbarkeit der folgenden Konstanten bzw. Relationen.

i. Die Teilmenge $\{(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) : A \subseteq B\}$.

$\varphi_{\subseteq}(a, b) = (a \cap b = a)$

ii. *Sie dürfen nachfolgend $\subseteq$ benutzen.*
Das Element $\emptyset$ von $\mathfrak{A}$.

$\varphi_\emptyset(x) = \forall y(x \subseteq y)$

iii. Die Menge $\{\mathbb{N}\backslash\{a\} : a \in \mathbb{N}\}$.

Nicht elementar definierbar.
Es sei $\pi : Pot(\mathbb{N}) \to Pot(\mathbb{N}))$ eine Funktion definiert wie folgt:

$$\pi(x) : \begin{cases} x & a, a+1 \in x \\ x & a, a+1 \notin x \\ x\backslash\{a\} \cup \{a+1\} & a \in x, a+1 \notin x \\ x\backslash\{a+1\} \cup \{a\} & a \notin x, a+1 \in x \end{cases}$$

Zz.$\pi(x \cap y) = \pi(x) \cap \pi(y)$:

Fallunterscheidung

- $a, a+1 \in x$ und $a, a+1 \in y$ identitätsabbildung
- $a, a+1 \notin x$ und $a, a+1 \notin y$ identitätsabbildung
- $a, a+1 \in x$ und $a, a+1 \notin y$, dann $\pi(x \cap y) = \pi((x \cap y)\backslash\{a, a+1\}) = (x \cap y)\backslash\{a, a+1\} = \pi(x) \cap \pi(y)$ umgekehrt analog
- $a, a+1 \in x$ und $a \notin y, a+1 \in y$, dann $\pi(x \cap y) = (x \cap y) \cup \{a\} = \pi(x) \cap \pi(y)$ umgekehrt analog

Damit gilt:

- π ist bijektiv, da wohldefiniert und tauscht immer nur 2 eindeutige Mengen aus
- $\pi(x \cap y) = \pi(x) \cap \pi(y)$
- $\pi(\emptyset) = \emptyset$

Also ist π ein **Automorphismus**. Jedoch ist $\pi(\mathbb{N}\backslash\{a\}) = \mathbb{N}\backslash\{a+1\}$. Also nicht abgeschlossen unter der Relation (Rx gdw. $x = \{\mathbb{N}\backslash\{a\} : a \in \mathbb{N}\}$). Nach Isomorphielemma also nicht elementar definierbar.

iv. Das Element $\{17\}$.

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Hilfs-Funktion definiert wie folgt.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \neq 1, x \neq 17 \\ 1 & , x = 17 \\ 17 & , x = 1 \end{cases}$$

Sei $\pi : Pot(\mathbb{N}) \to Pot(\mathbb{N})$ nun eine Abbildung wie folgt: $\pi(x) = \{fa | a \in x\}$. Dann ist π ein Automorphismus (Beg. analog zu iii.). Jeoch ist Rx gdw. $x = \{17\}$, aber nicht $R\pi(x)$. Nach Isomorphielemma also nicht elementar definierbar.

4. (20 points)

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Ergänzen Sie: Wenn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, dann heissen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$...

elementar äquivalent.

Es gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw.

$\mathfrak{A} \models \psi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \psi$, für alle $\psi \in FO(\tau)$

(b) Was besagt der Satz von Ehrenfeucht und Fraisse?

Sei τ endlich und relational. Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen.
(i) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw. die Duplikatorin gewinnt $G = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (elem. Äquivlaenz)
(ii) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ gdw. die Duplikatorin gewinnt $G_m = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (m Äqiuvalenz)

(c) Betrachten Sie die folg. Paare von Strukturen. Welche sind isomorph/elem. äquivalent/ m äquivalent? Begründen Sie jede Antwort.

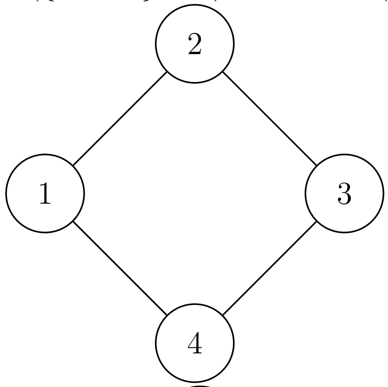
i. $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{B}})$, wobei $P^{\mathfrak{A}} := \mathbb{Q}$ und $P^{\mathfrak{B}} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Sei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Automorphismus von $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ definiert wie folgt:

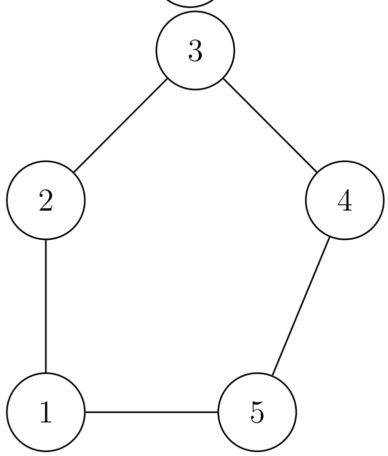
$$\pi(a) : \begin{cases} a & a \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \\ -\sqrt{2}a & sonst \end{cases}$$

Dann $P^{\mathfrak{A}}x$ gdw. $P^{\mathfrak{B}}\pi x$. Damit $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$ für $\varphi \in FO(\{P\})$. Damit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, nach Isomorphielemma also auch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

ii. $\mathfrak{A} := (\{1, ..., 4\}, E^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\{1, ..., 4\}, E^{\mathfrak{B}})$



$\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:

Es ist $\varphi = \exists x \exists y(\neg(x = y) \wedge \forall z(Exz \rightarrow Eyz))$ ('es gibt zwei paarweise versch. Knoten mit den selben Nachbarn') ein scheidender Satz mit $qr(\varphi) = 3$. Also $\mathfrak{A} \not\equiv_3 \mathfrak{B}$, insb. also $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$ (nicht elem. äquivalent). Die Duplikatorin gewinnt jedoch $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wie folgt:
Im ersten Zug antwortet die Duplikatorin dem Herausforderer und wählt einen beliebigen Knoten. Falls der Herausforderer im zweiten Zug einen zum ersten Knoten adjazenten Knoten wählt, so tut dies auch die Duplikatorin, sonst wählt sie einen nicht adjazenten Knoten.
Damit folgt $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$.

iii. $\mathfrak{A} := (Pot(\mathbb{N}), \cap^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\{X \subseteq \mathbb{N} : 2n + 1 \in X \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}, \cap^{\mathfrak{B}})$
($\cap^{\mathfrak{A}}$ bzw. $\cap^{\mathfrak{B}}$ und $Pot(\mathbb{N})$ wie üblich.)

Es sei $\pi : Pot(\mathbb{N}) \to \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\})$ eine Abbildung wie folgt.
$\pi(x) : \{2n+1 | n \in x\}$
Es ist:
$\pi(x \cap y) = \pi(x) \cap \pi(y)$
$\pi(\emptyset) = \emptyset$
π bijektiv, da wohldefiniert und tauscht immer nur 2 eindeutige Mengen aus
Also ist π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Damit sind beide Strukturen Isomorph, insb. nach Isomorphielemma elementar äquivalent.

5. (15 points) Geben Sie für die folgenden Klassen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an, oder beweisen Sie, dass ein solches nicht existiert.
Sie dürfen $\Phi_<$ und Φ_{Graph} für lin. Ordnungen bzw. ungerichtete Graphen verwenden.

(a) Die Klasse aller $\{P, Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ mit $|P^{\mathfrak{A}}| + |Q^{\mathfrak{A}}| = 1$, wobei P, Q einstelige Relationen sind.

Endlich axiomatisierbar.
Sei

$$\begin{aligned} \varphi_{P_0} &= \forall x \neg Px \\ \varphi_{Q_0} &= \forall x \neg Qx \\ \varphi_{P_1} &= \exists x \forall y (Px \land (Py \to x = y)) \\ \varphi_{Q_1} &= \exists x \forall y (Qx \land (Qy \to x = y)) \end{aligned}$$

Dann ist $\varphi = (\varphi_{P_0} \land \varphi_{Q_1}) \lor (\varphi_{P_1} \land \varphi_{Q_0})$ ein endliches Axiomensystem.

(b) Die Klasse aller $\{P, Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ mit $|P^{\mathfrak{A}}| * |Q^{\mathfrak{A}}| = 1$ und $A = \mathbb{R}$, wobei P, Q einstelige Relationen sind.

Nicht axiomatisierbar.
$\mathbb{R}$ ist überabzaehlbar. Diese Klasse hat also ein unendliches Modell. Nach Löwenheim-Skolem absteigend also auch ein **abzählbar unendliches** Modell. Dieses liegt jedoch nicht in der Klasse. Widerspruch. Also nicht axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen $\mathfrak{B} = (V, E)$, in denen es unendlich viele Kanten gibt.

Axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar.
Sei $R(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$ eine Hilfs-Relation, die genau dann wahr ist, wenn die Tupel $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ gleich sind. Argumentation über Gleichheit von Kanten nun möglich.
Es ist $\varphi_n = \exists x_1 ... \exists x_n \exists y_1 ... \exists y_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\neg(x_i = y_i) \wedge (E x_i y_i \wedge E x_j y_j \wedge \neg R x_i y_i x_j y_j)))$ ('der Graph hat min. n Kanten')

Dann ist $\Phi = \Phi_{Graph} \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ein unendliches Axiomensystem. Diese Klasse ist jedoch nicht endlich axiomatisierbar. Beweis: Angenommen ψ sei ein endliches Axiomensystem, also $Mod(\psi) = Mod(\Phi)$. Dann ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Sei nun eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subset \Phi \cup \{\neg\psi\}$ gegeben. Dann axiomatiert Φ_0 nur ungerichtete Graphen mit maximal n Kanten für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ein Modell gerade eine Kette mit $n + 1$ Knoten. Somit Φ_0 erfüllbar. Nach Kompaktheitssatz auch $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ erfüllbar. Widerspruch. Also kann kein solches endliches Axiomensystem ψ existieren. Also ist die Klasse nicht endlich axiomatisierbar.

(d) Die Klasse aller ungerichteten Graphen $\mathfrak{B} = (V, E)$, in denen es bel. lange endliche Pfade, aber keinen unendlichen Pfad gibt. (keine Knotenwiderholungen erlaubt)

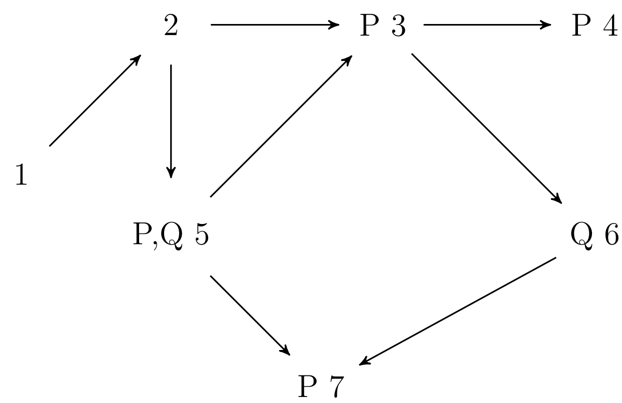
Nicht axiomatisierbar.
Angenommen Φ sei ein Axiomensystem dieser Klasse. Nach aufsteigendem Satz von Löwenheim-Skolem hat K also auch ein unendliches Modell. Widerspruch. Also kann kein solches Φ mit $K = Mod(\Phi)$ existieren.

(e) Die Klasse aller abz. unendlichen lin. Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element haben.

Nicht axiomatisierbar.
Angenommen es ex. ein Axiomensystem Φ für diese Klasse.
Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}_{\leq 0}, <), \mathfrak{B} = (\mathbb{R}_{\leq 0}, <)$. Es ist $\mathfrak{A} \in K, \mathfrak{B} \notin K$. Die Duplikatorin gewinnt das Spiel $G_m = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wie folgt:
Im ersten Zug kopiert sie den Herausforderer und wählt ein beliebiges Element $x_1 \in \mathbb{R}$. Im zweiten Zug wählt sie x_2 so, dass $x_2 < x_1$ gdw. $x_2 < x_1$ in der Struktur des Herausforderers. Im m-ten Zug wählt sie x_m so, dass die Ordnung mit den vorherigen Elementen der Ordnung in der Struktur des Herausforderers entspricht. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ beide dicht funktioniert dies für beliebige $m \in \mathbb{N}$. Also $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Also $\mathfrak{A} \in K, \mathfrak{B} \in K$. Widerspruch. Also kann ein solches Axiomensystem nicht existieren.

6. (11 points)

(a) Sei $\varphi := \Diamond\Box(\Diamond P \to \Diamond Q)$. Geben Sie die Menge $[[\varphi]]^K$ an. Geben sie zudem eine kurze Begründung für Ihre Entscheidung an. ($[[\varphi]]^K := \{v \in V_K : K, v \vDash \varphi\}$)



K :

$\varphi =$ ('Es ex. ein Knoten, von dem für alle Knoten gilt, wenn ein Nachfolger existiert, in dem P gilt, dann gibt es auch einen Nachfolgern, in dem Q gilt.')
Sei
$\varphi_0 = \Diamond P \to \Diamond Q$, dann $[[\varphi_0]]^K = \{1, 2, 3, 4, 7\}$
$\varphi_1 = \Box(\Diamond P \to \Diamond Q)$, dann $[[\varphi_1]]^K = \{1, 4, 5, 7\}$
$\varphi = \Diamond\Box(\Diamond P \to \Diamond Q)$, dann $[[\varphi]]^K = \{2, 3, 5, 6\}$

(b) Was bedeutet es, dass die Modallogik die Baummodell-Eigenschaft hat?

Eine Menge von Formeln (irgendeiner Logik), welche auf Transistionssystemen interpretiert wird, hat die Baummodell-Eigenschaft (BME), wenn jede erfüllbare Formel f ein Modell hat, welches ein Baum ist.

(c) Geben Sie für folgende Sachverhalte eine Formel der Modallogik an, oder zeigen Sie, dass es keine solche Formel geben kann.Ein P- bzw. Q-, Nachfolger w von v ist ein entsprechend beschriftetet Knoten mit $(v, w) \in E$.

i. Jeder Nachfolger von v ist genau dann mit Q beschriftet, wenn er einen weiteren P-Nachfolger hat.

$\Box(Q \to \Diamond P)$

ii. Wenn v einen P-Vorgänger hat, dann auch einen P-Nachfolger.

Die Modallogik wertet Formeln immer nur auf einer Kripkestruktur von einem Knoten v aus, kann also nicht über Vorgänger argumentieren. Es kann also keine solche Formel geben.

iii. Wenn v zwei Q-Nachfolger hat, dann auch einen P-Nachfolger.

Sei K:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{v} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Q} \\ & \mathrm{Q} \end{tikzcd}$$

Sei K'

$$\mathrm{v'} \longrightarrow \mathrm{Q}$$

es sind K und K' bisimilar. Jedoch $K_v \not\models \varphi, K'_{v'} \models \varphi$. Also kann keine solche Formel φ existieren.

iv. Alle (maximal langen) Pfade, ausgehend von den P-Nachfolgern von v haben Länge genau 2.

$\Box(P \rightarrow \Diamond\Diamond 1)$