

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 5.6. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

5*2 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie jeweils ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an:

- (a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) : f(A) \text{ ist unendlich}\},$
- (b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, f) : |A \setminus \{f(a) : a \in A\}| = 42\},$
- (c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) : |\{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}| \leq 13 \text{ für alle } a \in A\}$
- (d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) : f \text{ ist injektiv, aber nicht surjektiv}\},$
- (e) $\mathcal{K}_5 := \{(A, f) : A \text{ ist endlich, und } f \text{ ist injektiv, aber nicht surjektiv}\},$

Aufgabe 2

4+2+4 Punkte

Sei τ eine relationale Signatur (d.h. τ enthält keine Funktionssymbole), und sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$ eine Kette von τ -Strukturen. Wir definieren eine τ -Struktur \mathfrak{A}_ω , so dass $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wie folgt:

$$A_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$
$$R^{\mathfrak{A}_\omega} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n} \quad \text{für alle Relationssymbole } R \in \tau.$$

- (a) Zeigen Sie, dass alle Sätze der Form $\varphi := \forall x_1 \dots \forall x_r \exists y_1 \dots \exists y_s \eta \in \text{FO}(\tau)$ (mit quantorenfreiem η) unter Vereinigung von Ketten abgeschlossen sind, d.h. wenn $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$.
- (b) Zeigen Sie, dass (a) nicht für beliebige Sätze $\varphi \in \text{FO}(\tau)$ gilt.
- (c) Sei \mathcal{K} die Modellklasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element enthalten. Geben Sie ein Axiomensystem für \mathcal{K} an und zeigen Sie, dass \mathcal{K} kein Axiomensystem aus Sätzen der Form $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_r \exists y_1 \dots \exists y_s \eta$ (mit quantorenfreiem η) besitzt.

Aufgabe 3

8+2 Punkte

Seien R und S zweistellige sowie T ein dreistelliges Relationssymbol, und sei h ein dreistelliges, g ein zweistelliges, f ein einstelliges sowie c ein nullstelliges Funktionssymbol.

- (a) Wandeln Sie die folgenden Formeln zunächst in Negations- und dann in Pränex-Normalform um:
 - (i) $\varphi_1 := \forall y (fy \neq x \rightarrow \exists z \forall x (Rxy \rightarrow \forall y S f z f y))$
 - (ii) $\varphi_2 := \forall x \exists y (Sxy \wedge \forall y (\forall z (fz = w) \rightarrow \forall z (Rxy \wedge Syz))) \rightarrow T x z w.$
- (b) Geben Sie für die Formel $\varphi := h g g c x x h f c g x g c x c x = x$ eine äquivalente termreduzierte Formel an.