Modell(-beziehung) := $[\![\psi]\!]^{\Im}=1 \Leftrightarrow \Im\models\psi$ „ $\Im$ erfüllt ψ " @Menge: $\Im\models\varphi\,\forall\varphi\in\Phi \Leftrightarrow \varphi\models\Phi$
Wenn $\Phi=\emptyset$, dann (**Konj.**) $\wedge\Phi=1$ und (**Disj.**) $\vee\Phi=0$. Erfüllbarkeit von al. Formeln (SAT) ist NP-vollst.
#ToDo: falls $\Phi\models\varphi \Leftrightarrow \Phi\cup\{\neg\varphi\}$ unerfüllbar (suche Interpretation) => Aussage richtig ($|\Phi|<\infty\Rightarrow\wedge\Phi\wedge\neg\varphi$)

---

1. $\neg\neg\psi\equiv\psi$ Elemination der doppelten Negation
2. $\neg(\psi\wedge\varphi)\equiv\neg\psi\vee\neg\varphi$, $\neg(\psi\vee\varphi)\equiv\neg\psi\wedge\neg\phi$ de Morgan'sche Gesetze
3. $\psi\wedge(\varphi\vee\vartheta)\equiv(\psi\wedge\varphi)\vee(\psi\wedge\vartheta)$, $\psi\vee(\varphi\wedge\vartheta)\equiv(\psi\vee\varphi)\wedge(\psi\vee\vartheta)$ Distributivges.
4. $\psi\rightarrow\varphi\equiv\neg\varphi\rightarrow\neg\psi$ Kontraposition
5. $\psi\wedge(\psi\vee\varphi)\equiv\psi\vee(\psi\wedge\varphi)\equiv\psi$ Absorption
6. $\psi\wedge\psi\equiv\psi$, $\psi\vee\psi\equiv\psi$ Idempotenz
7. $\psi\wedge\varphi\equiv\varphi\wedge\psi$, $\psi\vee\varphi\equiv\varphi\vee\psi$ Kommutativität
8. $\psi\wedge(\varphi\wedge\vartheta)\equiv(\psi\wedge\varphi)\wedge\vartheta$, $\psi\vee(\varphi\vee\vartheta)\equiv(\psi\vee\varphi)\vee\vartheta$ Assoziativität
9. Semantisches Argument: " $X\vee\neg X\equiv 1$ "
10. $A\leftrightarrow B\equiv(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)\equiv(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$ $\equiv(\neg A\wedge\neg B)\vee(B\wedge A)$
11. $B\rightarrow 0\equiv\neg B$ & $1\rightarrow A\equiv A$
12. $\psi\rightarrow\varphi\equiv\neg\psi\vee\varphi$
13. $(1\rightarrow F)\wedge(B\rightarrow 0)\equiv F\wedge\neg B\equiv\neg(\neg F\vee B)$
14. $\forall x\psi\equiv\neg\exists x\neg\psi$
15. $\neg\forall x\psi\equiv\exists x\neg\psi$ / $\neg\exists x\psi\equiv\forall x\neg\psi$
16. $\Phi\models\varphi \Leftrightarrow \Phi\cup\{\neg\varphi\}$

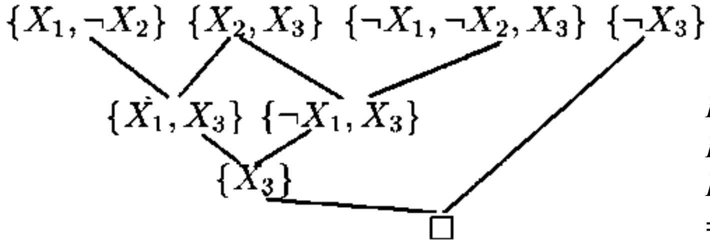
Tautologie/allgemeingültig := $\models\psi$ = jede passende Interpretation ist Modell (= alle Interpretationen erfüllbar.)
disjunktive Normalform (**DNF**): $\vee\wedge x_{ij}$ konjunktive NF (**KNF**): $\wedge\vee x_{ij}$ 3-KNF: $\wedge_{i=1}^{n}\; Y_{i1}\vee Y_{i2}\vee Y_{i3}$
Satz 1.9: Zu jeder Formel gibt es eine DNF. (=> Umwandlung von DNF nach KNF möglich. (bool. Fkt.))
Funktional vollständig: { $\wedge,\vee,\neg$ }, { $\wedge,\neg$ }, $\vee,\neg$ },{ $\rightarrow,\neg$ },{ $\rightarrow,0$ },{ $\wedge, xor, 1$ },{ $|$ }; nicht: { $\wedge,\vee,\rightarrow$ }

Horn-Formel := Formel in KNF ($\wedge_i\vee_j x_{ij}$), wobei jede Disjunktion ($\vee_j x_{ij}$) max. 1 positives Literal enthält!
Auch als Konjunktion: $\neg X_1\vee\ldots\vee\neg X_k\vee X\equiv X_1\wedge\ldots\wedge X_k\rightarrow X$ (k=0: (1→X)) & $\neg X_1\vee\ldots\vee\neg X_k\equiv X_1\wedge\ldots\wedge X_k\rightarrow 0$
Satz 1.13: Es gibt al. Formeln, die nicht zu einer HF äquivalent sind. (HF ist erfüllbar oder hat kleinstes Modell).
Falls zu zeigen ist, dass $\varphi_i=\neg X\vee Y\vee Z$ **keine** HF ist: Finde Interpretationen $\Im_1:(x,y,z)\mapsto(1,1,0)$ und
$\Im_2:(x,y,z)\mapsto(1,0,1)$. Da $\Im_1\models\varphi_i$ und $\Im_2\models\varphi_i$ aber $\Im_1\cap\Im_2\not\models\varphi_i$ ist, ist φ_i nicht zu einer HF äquivalent.

Bsp.-umf.: $\{A\wedge B\rightarrow C, D\wedge E\rightarrow A, C\wedge F\rightarrow D, F\wedge D\rightarrow E\} \models B\vee C\vee(F\rightarrow B)$
$\equiv(A\wedge B\rightarrow C)\wedge(D\wedge E\rightarrow A)\wedge(C\wedge F\rightarrow D)\wedge(F\wedge D\rightarrow E)\quad\wedge(B\rightarrow 0)\wedge(C\rightarrow 0)\wedge(1\rightarrow F)\wedge(B\rightarrow 0)$
Erfüllbarkeitstest/Markierungsalgorithmus für Horn-Formeln := (Input: aussagenlogische HF: $\psi=\wedge_i C_i$.)
Gegeben: $(1\rightarrow X)\wedge(X\wedge Y\rightarrow Z)\wedge(U\rightarrow 0)\wedge(Z\wedge Y\rightarrow U)\wedge(V\rightarrow Y)\wedge(1\rightarrow V)$
$M_0=\{X,V\}; M_1=M_0\cup\{Y\}; M_2=M_1\cup\{Z\}; M_3=M_2\cup\{U\}; U\rightarrow 0$ liefert Widerspruch => Formel unerfüllb.

Kompaktheits-Satz: führt Erfüllbarkeit und Folgerungsbeziehung von unendliche Mengen auf endliche zurück.
§1: Φ ist erfüllbar <=> jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.
§2: $\Phi\models\psi$ "aus Φ folgt ψ " <=> endliche Teilfolge $\Phi_0\subseteq\Phi$ existiert, so dass $\Phi_0\models\psi$.
Lemma 1.16 (Zorn): Sei (A,<) nicht-leere partielle Ordnung, in der jede Kette nach oben beschränkt. Dann besitzt (A,<) ein maximales Element. Lemma 1.17 (König): Sei T endlich verzweigter Baum mit Wurzel w, in dem es beliebig lange endliche Wege gibt. Dann gibt es auch einen unendl. Weg in T (der bei der Wurzel beginnt).

Aussagenlog. Resolution: syntaktisches Verfahren, um die Unerfüllbarkeit von Formeln in KNF nachzuweisen.
Klausel := endliche Menge von Literalen (leere Klausel := □). Formel in KNF => Jede Disj. $\vee x$ wird Klausel C_i.



= $Res^0(\varphi)$ = K = { $\{(X_1\vee\neg X_2)\},\{(X_2\vee X_3)\},\ldots$ } $\varphi :=$
$(X_1\vee\neg X_2)\wedge(X_2\vee X_3)\wedge(\neg X_1\vee\neg X_2\vee X_3)\wedge(\neg X_3)$
$Res^1(\varphi) = Res^0(\varphi)\,\cup$ { { X_1, X_3 }, { $\neg X_1, X_3$ }, ... }
$Res^2(\varphi) = Res^1(\varphi)\,\cup$ { { X_3 }, ... } ◄▲ "Resolventen"
$Res^3(\varphi) = Res^2(\varphi)\,\cup$ {□} = $Res^4(\varphi) = Res^*(\varphi)$
=> □ $\in Res^*(K)$ => φ **un**erfüllbar (bei $\notin$ erfüllbar).
Falls z. z. Formel allgemeingültig: zeige, das in K($\neg\varphi$) □ ableitbar: □ $\in Res$ => $\neg\varphi$ unerf. => φ allgemeing.
Gilt $\psi\models\varphi$? $\psi\models\varphi\Leftrightarrow\psi\wedge\neg\varphi$ *unerf.* $\Leftrightarrow\Box\in Res^*(\psi\wedge\neg\varphi)$: mache Resolut. auf $K(\psi)\cup K(\neg\varphi)$, ψ, φ in KNF!

Einheitsresol. (HF) (immer nur mit einzelnem Literal ableiten) ist allgemein **nicht vollständig**! Gegenbsp: {{X,Y},{X,¬Y},{¬X,Y},{¬X,¬Y}} ist unerfüll-bar, aber □ ist nicht ableitbar! **Doppelres.** ist nicht korrekt, aber vollst.! Gegenbsp.: $\psi=(X\vee Y)\wedge(\neg X\vee\neg Y)$ Positiv-**Res.** korrekt/vollst.! **Leere Klauselm. Ø ist erfüllbar!**

Aussagenl. Sequenzenkalkül: Die **Sequenz** Γ => Δ ist ***gültig***, wenn jedes Modell von Γ (**Antezedens)** auch ein Modell mindestens einer Formel aus Δ (**Sukzedens)** ist. d.h. ∧ Γ ⊨ ∨Δ. Wenn also Γ => Δ ***nicht gültig*** ist, dann existiert eine Interpretation $\Im$ in der alle Formeln aus Γ wahr und alle Formeln aus Δ falsch sind. In diesen Fall sagen wir, dass $\Im$ die Sequenz ***falsifiziert.*** (Großbuchstabe = Menge!)
Falls zu zeigen, dass Sequenz ungültig: dann suche Interpretation, welche für alle Γ wahr, aber für alle Δ falsch.
- Jede Sequenz Γ => Δ mit Γ ∩ Δ ≠ Ø ist gültig. Solche Sequenzen sind die **Axiome** des Sequenzenkalküls.

x => Ø <=> x => 0, Ø => x <=> 1 => x <u>Schlussregeln:</u> oben (**Prämisse**) und unten (**Konklusion**):

$(\neg\Rightarrow)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma,\neg\psi\Rightarrow\Delta}$ $(\vee\Rightarrow)\dfrac{\Gamma,\psi\Rightarrow\Delta\quad\Gamma,\vartheta\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\psi\vee\vartheta\Rightarrow\Delta}$ $(\wedge\Rightarrow)\dfrac{\Gamma,\psi,\vartheta\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\psi\wedge\vartheta\Rightarrow\Delta}$ $(\rightarrow\Rightarrow)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi\quad\Gamma,\vartheta\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\psi\rightarrow\vartheta\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\neg)\dfrac{\Gamma,\psi\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\psi}$ $(\Rightarrow\vee)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi,\vartheta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi\vee\vartheta}$ $(\Rightarrow\wedge)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\vartheta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi\wedge\vartheta}$ $(\Rightarrow\rightarrow)\dfrac{\Gamma,\psi\Rightarrow\Delta,\vartheta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi\rightarrow\vartheta}$

<u>Beweis im SK:</u> Baum. §1: Jedes Blatt mit Axiom beschriftet. §2: Jeder innere Knoten mit Schlussregel beschriftet => Seq. ist im SK ableitbar gdw. tritt auf als Beschriftung eines Knotens. **Aus nicht-Ax.-Blättern folgt fals. $\mathfrak{I}$!**
<u>Lemma 1.28:</u> $\mathfrak{I}$ falsifiziert die Konklusion gdw. $\mathfrak{I}$ eine Prämisse falsifiziert => Konkl. gültig gdw. Präm. gültig

\# Beweis im SK für $\psi:=(X\rightarrow Y)\rightarrow(\neg Y\rightarrow\neg X)$: Starte mit Ø => ψ , erzeuge Baum bis Axiome (§1) => Erfolg.
\# <u>ToDo: Sequenz</u> $(X\vee Y)\Rightarrow(X\wedge Y)$ <u>gültig?</u> Suche Interpretation, so dass $[\![X\vee Y]\!]^{\mathfrak{I}}=1\,und\,[\![X\wedge Y]\!]^{\mathfrak{I}}=0$, dann $\mathfrak{I}(X)=0,\mathfrak{I}(Y)=1$ links ein Widerspruch => $\mathfrak{I}$ falsifiziert Sequenz! Sonst: mache Beweis im SK => S. gültig.
\# <u>ToDo: Schlussregel korrekt?</u> Konklusion fälschen. Wenn Prämissen auch falsifizierbar => Schlussregel korrekt.

<u>Def. 1.31:</u> Ein Ableitungsbaum ist ***vollständig***, wenn <u>alle</u> Blätter positiv (Axiom) <u>oder</u> negativ sind. Wenn alle Blätter positiv sind, handelt es sich um nen ***Beweis***; wenn T ein negatives Blatt enthält, dann um 'ne ***Widerlegung***.

<u>Prädikatenlogik – FO – first order logic:</u> **Literal** := positives oder negatives Atom (mit und ohne $\neg$).
In FO gibt es keine Interpretationen. Man spricht stattdessen über Modell! $\mathfrak{I}\models\varphi$ $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}$
atomar/Atom := Formel nur mit "=" und Funktionen (ohne $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\exists,\forall$). **quantorenfrei** := F. ohne $\exists,\forall$.

<u>*frei*e Variablen:</u> Für atome Formeln ψ ist $frei(\psi):=var(\psi)$. $frei(\exists x\,\psi)=frei(\forall x\,\psi):=frei(\psi)\setminus\{x\}$
$frei(\psi\circ\varphi):=frei(\psi)\cup frei(\varphi)\;für\circ\in\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$. $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ deutet an, dass $x_1, ..., x_n$ frei.
$frei(\neg\psi):=frei(\psi)$. Ein τ **-Satz** ist eine τ -Formel ohne freie Variablen <=> $frei(\psi)=\emptyset$.

$2\mathbb{N}:=\{2n:n\in\mathbb{N}\}$ ist {+}-abgeschlossen. Also ist $(2\mathbb{N},+)\subseteq(\mathbb{N},+)$. Hingegen ist $2\mathbb{N}+1:=\{2n+1:n\in\mathbb{N}\}$ nicht {+}-abg. und kann somit nicht Träger einer (▲) Substruktur von ($\mathbb{N}$, +) sein. Die additive Gruppe der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$, +, 0) ist das {+, 0}-**Redukt** des Körpers der reellen Z. ($\mathbb{R}$, +, · , 0, 1). (umgekehrt: **Expansion**)

<u>Ein Zoo von Strukturen:</u> Das **Wort** *w* = *abbcab* über dem Alphabet {a,b,c} wird also die Wortstruktur *B*(w) = ({0,1,2,3,4,5}, <, P_a, P_b, P_c) mit P_a = {0,4}, P_b = {1,2,5} und P_c = {3} repräsentiert.
Partiell Ordnung: {<}-Struktur (A, <), welche entsprech. irreflexiv, transitiv, antisymmetrisch und vergleichbar.

<u>Bsp.:</u> $\psi:=\exists z(Exz\wedge Ezy)$ & $\varphi:=\forall x\forall y(Exy\rightarrow\psi)$. Dann ψ {E}-Formel mit $frei(\psi)=\{x,y\}$ und φ {E}-Satz. $\mathfrak{I}=(A,\beta)$ mit A= $(\mathbb{N},E^A)$, E^A={(m,n): m echter Teiler von n} und β(x)=2, β(y)=36 Modell von $\psi(x,y)$, d.h. A⊨ ψ (2,36). Gilt z.B. für m=6. | Unter x→2,y→4 gilt dies nit, da $\mathbb{N}$ nit dicht. ($\mathbb{Q}$,<) wäre Modell, da dicht.

<u>Beispiele in ($\mathbb{N}$, +, ·):</u> a teilt b: $\varphi_|(a,b):=\exists x(a\cdot x=b)$ a ≤ b: $\varphi_\leq(a,b):=\exists z(a+z=b)$ @ $\mathbb{R}$: $z\cdot z$
a ist Primzahl: $\varphi_{prim}(a):=\forall x(\varphi_|(x,a)\rightarrow(x=a)\vee(x=1))\wedge a\neq1$ a < b: $\varphi_<(a,b):=\varphi_\leq(a,b)\wedge a\neq b$
a und b sind teilerfremd: $\varphi(a,b):=\forall x(\varphi_|(x,a)\wedge\varphi_|(x,b)\rightarrow x=1)$ x = 2: $\varphi_{=2}(x):=\exists u(u=1\wedge x=u+u)$
a ist eine Zweierpotenz: $\varphi(a):=\forall u(\varphi_|(u,a)\wedge(\varphi_{prim}(u)\rightarrow u=1+1))$ x = 1: $\varphi_1(x):=\forall y(x\cdot y=y)$
a Primprotenz p^n: $\varphi(x):=\exists y(y|x\wedge\varphi_{prim}(y)\wedge\forall z(z|x\rightarrow z=y\vee z=x\vee z=1))$ x = 0: $\varphi_0(x):=\forall y(x\cdot y=x)$

Mod(Φ) = Modellkl. von Φ = alle τ -Strukt. mit $\tau\models\Phi$. Klasse $K=Mod(\Phi)$ => Φ **Axiomensystem** für K
<u>Bsp:</u> ungerichtete Graphen $\Phi_{Graph}=\{\forall x\neg Exx,\forall x\forall y(Exy\rightarrow Eyx)\}$; $\phi_\infty\models\psi$ " ψ gilt in allen unendl. Struk.";
alle linearen Ordnungen: $\Phi_<=\{\forall x\neg x<x,\forall x\forall y\forall z(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z),\forall x\forall y(x<y\vee x=y\vee y<x)\}$

ψ hat Modell => ψ erfüllbar, sonst unerfüllbar. ψ allgemeingültig <=> ⊨ ψ <=> jede passende Interpretation ist Modell von ψ . ψ und φ log. äquiv. ($\psi\equiv\varphi$) <=> $\psi\models\varphi$ und $\varphi\models\psi$

<u>Lemma 2.16:</u> $\forall$ FO-Formel ex. äquivalente **reduzierte** mit nur $\vee,\neg,\exists$ (ohne $\wedge,\rightarrow,\forall$). $\forall x\psi\equiv\neg\exists x\neg\psi$

NegationsNF: kein $\rightarrow$ & $\neg$ nur auf Atomen! Also nur $\vee,\wedge,\exists,\forall$, pos. & neg. Literale. ! ≡ !
\# <u>ToDo:</u> $\neg$ nach innen ziehen und $\rightarrow$ eliminieren: $\neg\exists x(Rxy\wedge\forall z(Sxz\rightarrow Ryy))\equiv\forall x\neg(Rxy\wedge\forall z(Sxz\rightarrow Ryy))$
Beispiel: $\equiv\forall x(\neg Rxy\vee\neg\forall z(Sxz\rightarrow Ryy))\equiv\forall x(\neg Rxy\vee\exists z\neg(Sxz\rightarrow Ryy))\equiv\forall x(\neg Rxy\vee\exists z(Sxz\wedge\neg Ryy))$
<u>Lemma 2.19:</u> $\forall$ Formeln ex. äquival. **termreduzierte** (nur Atome der Form $R\bar{x}$, $f\bar{x}=y$, $x=y$ (Termtiefe < 2))

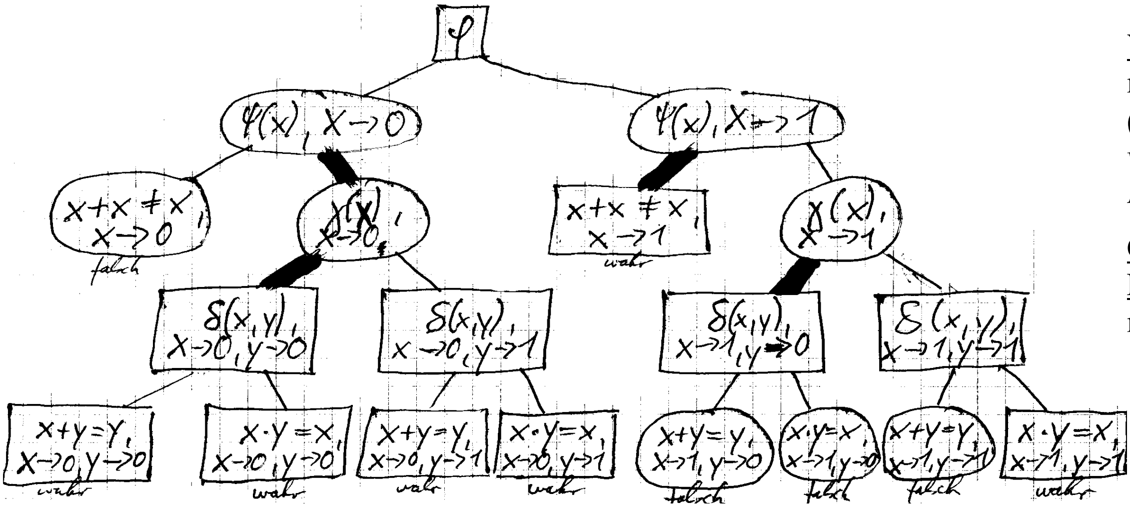
PränexNF: alle Quantoren stehen vorne und **bereinigt** (keine Variable kommt frei und gebunden vor) ! ≡ !
\# <u>ToDo:</u> 1.) NNF $\psi:=\neg\forall x\neg Rxx\wedge\forall x\exists y(Rxy\wedge(\neg Ryy\wedge\exists xRyx))\equiv\exists x\,Rxx\wedge\forall x\exists y(Rxy\wedge\exists x(\neg Ryy\wedge Ryx))$
\#2)berein. 3)Q. nach vorn $\equiv\exists u\,Ruu\wedge\forall x\exists y\exists z(Rxy\wedge(\neg Ryy\wedge Ryz))\equiv\exists u\forall x\exists y\exists z(Ruu\wedge Rxy\wedge\neg Ryy\wedge Ryz)$

SkolemNF: # ToDo: Eliminiere Existenzq. aus PNF von a. nach innen. erfüllbarkeitsäquivalent, aber ! **nicht** ≡ !
$\forall x\forall y$ $\forall u'\exists x'((x=fygxy\wedge\neg Rgxyu')\vee(Sxz\wedge Rx'y))$ Existenzquantoren werden ersetzt durch neue
$\forall x\forall y$ $\forall u'$ $((x=fygxy\wedge\neg Rgxyu')\vee(Sxz\wedge Rhxyu'y))$ Funktionen mit abhängigen Allquantoren.

Beispiele: x hat min. n direkte NF: $\varphi(x):=\exists y_1 \ldots \exists y_n(\wedge_{i=1}^{n} Exy_i \wedge \wedge_{1\le i<j\le n}\ y_i \neq y_j)$; es gibt Zyklus der Länge 4: $\varphi(x)=\exists y_1 \ldots \exists y_4(\wedge_{i=1}^{3} Ey_i\, y_{i+1} \wedge Ey_4\, y_1 \wedge \wedge_{1\le i<j\le 4}\ y_i \neq y_j)$; es gibt einen Weg der Länge ≤ n von x nach y: $\varphi(x,y)=\exists x_0 \ldots \exists x_n(x_0=x \wedge x_n=y \wedge \wedge_{i=0}^{n-1}(Ex_i\, x_{i+1} \vee x_i=x_{i+1}))$; zykelfreier Graph: $\forall x \forall y \neg(Exy \wedge x=y)$; es gibt Clique der Größe n die x enthält: $\varphi(x)=\exists x_1 \ldots \exists x_n(\ \wedge_{1\le i<j\le n}(Ex_i\, x_j \wedge x_i \neq x_j) \wedge x_1=x)$; vollständiger Graph: $\forall x \forall y(x\neq y \rightarrow Exy)$;

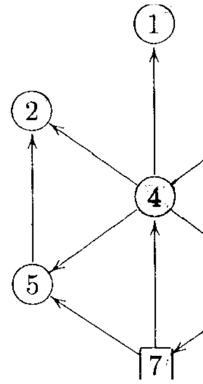
Auswertungsspiel MC(A, ψ): Verloren hat der Spieler, der am Zug ist, aber nicht ziehen kann.

Verifiziererin V ○ (sucht Modell):	$\vee$,	$\exists x$,	Literal falsch → Falsifizierer hat gewonnen.
Falsifizierer F(□):	$\wedge$,	$\forall x$,	Literal wahr → Verifiziererin hat gewonnen.



◄ Gewinnstrategie für Verifiziererin: von allen ○ möglichst runter zu □. *(hier: unten rechts: egal, weil V immer verliert, da F (□) danach dran ist.)*

Gewinnstrategie für Falsifizier: von allen □ möglichst zu □.



1.) Blätter (invertiert) zuordnen: Kästen: W_0 = {3}, Kreise: W_1 = {1,2}.
2.) a) wenn 0 dran und ein direkter Nachfolger in W_0 ist, dann ist er auch selbst in W_0.
b) wenn 0 dran und alle direkten Nachfolger sind in W_1, dann ist er auch selbst in W_1.
... und entsprechend umgekehrt für Spieler 1 bei a) W_1 und bei b) W_0

Kreise gehören Spieler 0: W_0 = {3,4}; Kästen gehören Spiele 1: W_1 = {1,2,5,6,7}

Idee: kreise W_0 ein und käste W_1, dann will Spieler 0 zu Kreis und Spieler 1 (□) zu Kasten.

ML – Modallogik: lokale Sichtweise; keine Aussagen über Vorgänger; <a> und [a] als Einschr. von $\exists$ und $\forall$. Einbettung in FO möglich; Wenn nur eine Aktion a vorhanden, dann schreibt man für <a> ψ : <> ψ "möglicherweise" & für [a] ψ : [] ψ "notwendigerweise". **Transitionsys./Kripkestr.**: K = (V, $(E_a)_{a\in A}$, $(P_i)_{i\in I}$), wobei V Universum, $E_a \subseteq V\times V$ 2-st. Rel., $P_i \subseteq V$ 1-st. Rel. Satz 3.21: ML hat die **Baummodell-Eigenschaft**.

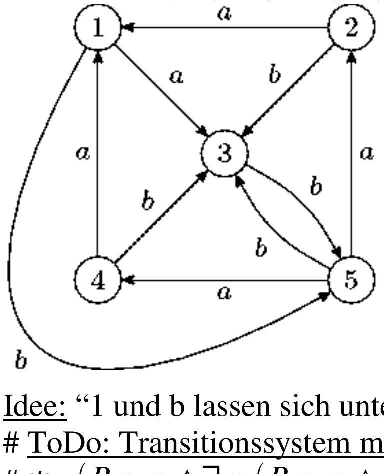
	a-NF	~~a-NF~~
<a>1	ja	-
<a>0	-	-
[a] 1	ja	ja
[a] 0	-	ja

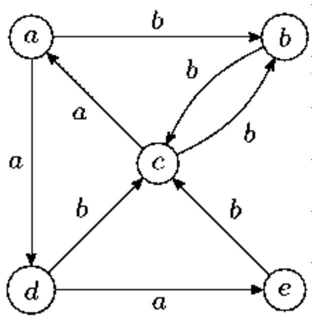
$[[\ [a]0\ ]]^K = \{4,5\}$

[b]0 – es ex. kein b-NF <a>0 – falsch/unmöglich <a>1 – es ex. a-NF
<a>P – es ex. a-NF in dem P gilt [b]Q: in allen b-NF gilt Q (*inkl. die keinen b-NF haben!!!*)

Satz 3.6: Zu jeder Formel $\psi \in ML$ gibt es Formel $\psi^*(x) \in$ FO² (FO mit 2 Var), so dass: $K, v \models \psi \Rightarrow K \models \psi^*(v)$
Bsp: <a><a><a><a><a>P (ML) => $\psi(x):=\exists y(Exy \wedge \exists x(Eyx \wedge \exists y(Exy \wedge \exists x(Eyx \wedge \exists y(Exy \wedge Py)))))$ (FO²)
Bsp: $\varphi(x):=\forall y \exists z(Exy \rightarrow Eyz) \equiv \forall y(Exy \rightarrow \exists z(Eyz)) \equiv \forall y(Exy \rightarrow (0 \vee \exists z(Eyz \wedge 1))) \equiv \Box(\Diamond 1 \vee 0) \equiv \Box\Diamond 1$
Wenn FO->ML nicht geht, dann finde: bisimilares Trans.sys., also nur in FO untersch.'bar (z.B. wg. Vorgänger)

Modaltiefe (md): 1.) md(ψ) = 0 für al. F. ψ , 2.) md($\neg\psi$) = md(ψ), 4.) md($\langle a\rangle\psi$)=md($[a]\psi$) = md(ψ)+1.





	1	2	3	4	5
a	<a>[a]0	~	[a]0	~	<a><a><a>1
b	<a>1	<a>1	~	<a>1	<a>1 (m=0)
c	<a>[a]0	<a><a>[a]0	[a]0	<a><a>[a]0	~
d	~	<a><a>1	[a]0	<a><a>1	<a><a>1 (m=1)
e	<a>1	<a>1	~	<a>1	<a>1 (m=0)

"Bisimilar sind {(2,a), (4,a), (3,b), (5,c), (1,d), (3,e)}"
(Falls K = K', dann $\sim_{max}$ = { ... } ∪ {(v,v): v ∈ V}) !!!

Idee: "1 und b lassen sich unterscheiden, da in 1 ein a-NF existiert und in b nicht => <a>1" **md = m + 1 ▲**
ToDo: Transitionssystem mit min. Zuständen: Bisimulation auf sich selbst! In dem Bsp. oben: ist ~ = {(2, 4)}.
$\psi=(Rx_0x_2 \wedge \exists x_0(Rx_0x_1 \wedge Rx_0x_2))=(Rx_0x_2 \wedge \exists x_3(Rx_3x_1 \wedge Rx_3x_2))=(Rx_4\, g\, x_0x_0 \wedge \exists x_3(Rx_3c \wedge Rx_3\, g\, x_0x_0))$
mit $(x_1/x_4, x_1/c, x_2/g\, x_0x_0)$. Simultan ≠ Hintereinander, jedoch sim'bar: $\varphi[x/y, y/x]=\varphi[y/z][x/y][z/x]$.

LTL = CTL ohne A und E – (un)endliche Wörter & Pfade; kann in FO eingebettet werden, wenn "<" in Signatur, sonst geht z.B. 'GF P' nicht; abgeschlossen; $G(\psi \wedge \varphi) \equiv G\psi \wedge G\varphi$ $\varphi U \psi \equiv \psi \vee (\varphi \wedge X(\varphi U \psi))$

Xψ = "*next* ψ" (im unmittelbar folgenden gilt ψ) **Fψ** := (1Uψ): "*finally*" (irgendwann wird ψ gelten)

ψUφ = "ψ *until* φ" (irgendw. gilt φ davor immer ψ) **Gψ** := ¬F¬ψ: "*globally*" (es wird immer ψ gelten)

\# Bsp: GFψ: ψ in unendl. vielen Pos. ‖ FG $\neg\psi$: ψ nur an endl. v. Pos. ‖ G($\varphi \rightarrow (\varphi U \psi)$): für jede Pos. wo φ, ex. spät. Pos. wo ψ ; dazw. immer φ ‖ G($(P \rightarrow X \neg P \vee \neg X1) \wedge (\neg P \rightarrow XP \vee \neg X1)$): immer P und $\neg P$ abwechs. ‖ GF($P \wedge XQ$): unendl. P und direkt danach Q ‖ GX1: unendlich ‖ G($P \rightarrow GXFQ$): nach jedem P unendl. wo Q.

CTL = ML + Pfade – endl.-Modell-Eig.; SAT ist entscheidbar (in exp. Zeit); abgeschlossen; invariant unter Bisim

E(ψUφ) = "ψ *until* φ" (es ex.: davor immer ψ) **EXψ** := <>ψ, *exist* *Kann nicht in ML eingebettet*

A(ψUφ) = "ψ *until* φ" (für alle: davor immer ψ) **AXψ** := []ψ, *forall* *werden wegen z.B Erreichbark.*

EFψ := E(1U ψ) "es ex. ein Pf., wo irgendw. ψ gilt" **EGψ** := ¬ AF $\neg\psi$ "es ex. ein Pfad, wo immer ψ gilt"

AFψ := A(1U ψ) "auf allen Pfaden gilt irgendw. ψ" **AGψ** := ¬ EF $\neg\psi$ "auf allen Pfaden gilt immer ψ"

\# Bsp: EFψ: Zustand ψ ist Erreichbar ‖ AG¬(P^Q): P und Q schließen sich in allen erreichbaren Zuständen aus ‖ AGAFψ: ψ gilt unendlich oft auf allen Pfaden ‖ EF($P \wedge AXAXAXQ$) wo P gilt ist erreichb. und von dem nach 3 Q

MSO = Monad. Logik 2. Stufe: FO+Quant. über 1-st. Rel.sym. (Mengenvar.): ∃ X: es gibt TM, ∀ X: für alle TM

\# Ist ≤ in (ℤ ,+) **elem. def.'bar?** Nein: $\Pi : x \rightarrow -x$ Aut. (f(x+x)=(fx+fx) & bij.), aber z.B.: 2 ≤ 4 und nicht -2≤-4!

\# wahr: Prim.pot. in N, · ; falsch: ℤ in Q,+ ($x \rightarrow x/2$); + in N, · ($2^x 3^y z \rightarrow 2^y 3^x z, 0 \rightarrow 0$); 0 in Z,< ($x \rightarrow x+1$)

\# A:=(N,+,3,5) und B:=(N,+,3,7): m=3: H:A,2→D:B,4→H:A,1→D:B,x→H:A,3 (kann auf 3/5 bzw. 3/7 "prüfen")

\# bzw. H:A2→D:B,x→H:A,5→D:B,7→H:A,3 (▲ H: 2+1=3, prüfbar; D muss 4+x=3, was aber nicht geht in N)

Theorie nicht vollständig? Suche Strukturen, die T erfüllen, aber durch FO getrennt werden können.

\# Dichte lin. Ord? A=(Q,≤), B=(Q_0^+,≤) => A|=T & B|=T. $\psi = \forall x \exists y (y < x)$ *=> A|=* ψ *, aber B|≠* ψ *. => A≢B*

$A \equiv_m B$: Dupl. hat GS in $G_m(A,B)$, ∀ $G_k(A,B)$ k<m, in G(A,B) nicht notw.; Her'f. nicht notw. GS in $G_{m+1}(A,B)$

Entscheidbar: Erfüllbarkeitsprob. der ML; Auswertungsprob. für FO endl. Str.; Ob ML BM hat; **nicht**: Seq. gltg

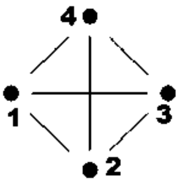
FO -> ML: ist "nicht ~-invariant", wenn Gegenbsp. ex.! $\neg\psi | \rightarrow \neg\psi^*(x)$ $\langle a \rangle \psi \ | \rightarrow \exists y (E_a xy \wedge \psi^*(y))$

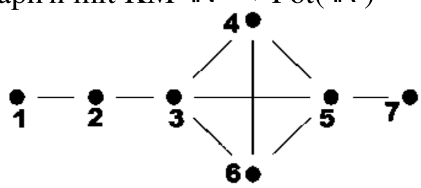
$\psi \in ML | \rightarrow \psi^*(x) \in FO^2$ $(\psi \circ \varphi) | \rightarrow (\psi^*(x) \circ \varphi^*(x))$ *für* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ $P_i | \rightarrow P_i x$ $[a]\psi \ | \rightarrow \forall y (E_a xy \rightarrow \psi^*(y))$

Seien $A, A_0, A_1, \ldots$ **abzählbare** Mengen: $A_0 \times A_2$; $\Pi_{i=0}^n A_i \forall n \in \mathbb{N}$; $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$; $A^* = A \times A \times \ldots \times A$

M. aller off. Interv. (n,m)={ $x \in \mathbb{R} | n < x < m$ } mit $n, m \in \mathbb{N}, n < m$ → M. aller Str. (ℕ ,f) mit einer einst. Fkt. f, deren Bildber. endl. ist = M. aller Str. (ℕ ,f) mit einer einst. Fkt. f → M. aller Graph'n mit KM ℕ → Pot(ℝ)

Ebenso: $|\mathbb{R}| = |[0,1] \subseteq \mathbb{R}| = |Pot(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.





‖ Aut.gruppe: 1.) Jede Perm. Π:{1,...,4}→{1,...,4} ist Aut.

‖ (u,v) E^G <=> Π(u) ≠ Π(v) <=> (Π(u), Π(v)) ∈ E^G

‖ 2.) Für jeden Aut. Π: G → G gilt: Π(2) hat 2 Nachbarkn.

‖ in G: Π(1), Π(3) => Π(2) = 2. Folglich gilt auch Π(1) = 1

‖ (weil 2 einz. Nachbar) und Π(7) = 7. Auch Π(3)= 3 & Π(5) = 5. Schließl. folgt Π mit: Π(4)=6, Π(6)=4, Π(k) = k

‖ sonst, ist der einzige nicht triv. Aut. Lemma 3.12 (Subst.-lemma): Es gilt $[\![t[p]]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![t]\!]^{\mathfrak{I} \circ p}$ &

$\mathfrak{I} | = \psi[p] \Leftrightarrow (\mathfrak{I} \circ p) | = \psi$. **Homomorphismus** – "Strukturerh. Abb.": z.z.: angeg. Rel. gelten. **Einbettung:** z.z.: f(n) ≤ f(m) => n ≤ m; und n ≠ m => f(n) ≠ f(m). **Isomorphismus:** suche z.B. nicht-ex. Bild-Elem. oder prüfe Bij.!

Axiomensys.: (f: 1-st. Rel.sym.) K_1 = {(A,<): < dichte lin. Ord.}: $\Phi_< \cup \{\forall a \forall b (a < b \rightarrow \exists z (a < z \wedge z < b))\}$

$\Phi_< = \{\forall a \forall b \forall c (a < b \wedge b < c \rightarrow a < c), \forall a \forall b (a < b \vee a = b \vee b < a), \forall x (\neg (x < x)), \forall a \forall b (a < b \rightarrow \neg b < a)\}$

K_2={(A,<): A unendl. & < lin. Ord.}: $\Phi_< \cup \{\varphi_n | \varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n (\wedge_{i \neq j} x_i \neq x_j)\}$ K_3 = {(A,<): A ist endl. & < dichte lin. Ord.}: $\Phi_< \cup \{\exists x \forall y (x = y)\}$ K_6={A endl., f inj., aber nicht surj.} => leere Menge! $\Phi = \{\exists x \, x \neq x\}$ K_5 = {f ist inj., aber nicht surj.}: $\Phi := \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow fx \neq fy \wedge \exists x \forall y (f(y) \neq x))$ K_4={ $(A, f): |A \setminus \{f(a) : a \in A\}| = 42$ }:

$\Phi := \{\exists x_1 \ldots \exists x_{42} (\wedge_{1 \leq i < j \leq 42} (x_i \neq x_j \wedge \forall y (f(y) \neq x_i \wedge \forall z ((\wedge_{1 \leq i \leq 42} z \neq x_i) \rightarrow \exists u (f(u) = z)))))\}$

Ist die Sequenz gültig? $\exists x \forall y (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x \forall y \varphi \vee \exists \forall y \psi$ ist nicht gültig. (=>Suche Anti-Bsp.: Struktur)

Gegenbeispiel Д=({0,1},0,1), φ(x,y) := y=0, ψ(x,y) := y=1. Д $\not\models$ $\forall y (y = 0 \vee y = y) \Rightarrow (\forall y \, y = 0) \vee (\forall y \, y = 1)$

$(\exists \Rightarrow) \dfrac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $(\forall \Rightarrow) \dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $(S \Rightarrow) \dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t = t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ if c nicht in Γ, Δ und ψ

$(\Rightarrow \exists) \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$ $(\Rightarrow \forall) \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}$ $(\Rightarrow S) \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t = t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$ $(=) \dfrac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

Graphen, Gruppen, lin. Ord., Äquivalenzstr., part. Ord., dichte lin. Ord., diskrete lin. Ord., Ringe und Körper sind **endlich axiomatisierbar**. Unendliche Strukturen sind FO-ax., aber nicht endl. ax.

hat nach 2 Zügen verloren: $V_0 x \wedge \neg \exists y \, Exy \vee \forall z (Exz \rightarrow V_0 x \wedge \neg \exists y \, Exy)$