Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

WS 2004/05

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1 12 Punkte

(a) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{X, Y, Z\}, \{\neg X, Y, \neg Z\}, \{\neg Y, Z\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{\neg X, Y, Z\}, \{X, \neg Z\}\}.$$

(b) Verwenden Sie die Resolutionsmethode um festzustellen, ob folgende Folgerung gilt:

$$A \to (B \to C) \models (A \to B) \to C.$$

(c) Zwei Formeln φ und ψ *schliessen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, dass φ und ψ einander ausschliessen?

Aufgabe 2 8 Punkte

Sei $\tau = \{X_0, X_1, \dots\}$ eine Menge aussagenlogischer Variablen und Φ eine Formelmenge über τ, so dass für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}(\tau)$ entweder $\Phi \cup \{\varphi\}$ oder $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist. Beweisen Sie, dass Φ dann genau ein Modell $\mathfrak{J} : \tau \to \{0, 1\}$ besitzt.

Aufgabe 3 12 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\{0, 1\}^*, \preceq)$ der binäre Baum mit der Vorgängerrelation ($x \preceq y$:gdw $y = xz$ für ein z) und $\mathfrak{B} := (\mathscr{P}(\{0, 1\}), \subseteq)$. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) ein surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(b) ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(c) eine Einbettung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$;

(d) ein nichttrivialer Automorphismus von $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 4 8 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0, 1\}, +, 1)$, in der $+$ als Addition (mod 2) interpretiert ist. Geben Sie das Auswertungsspiel zu der Formel $\psi := \exists x \forall y (x + x = y + 1 \wedge \exists z (y + z = x))$ an, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler.

Aufgabe 5 6 Punkte

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und R eine binäre Relation. Gegeben sei die Formel

$$\varphi := \exists z \big(\forall x \forall y (Rxy \wedge Ryz) \to fxz = y\big).$$

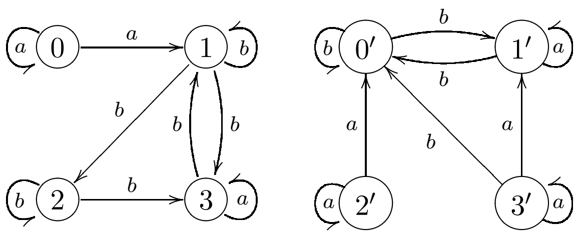
(a) Berechnen Sie $\varphi[x/fyz,\ y/z,\ z/fxx]$.

(b) Formen Sie φ in Pränex-Normalform um.

(c) Formen Sie φ in Skolem-Normalform um.

Aufgabe 6 12 Punkte

Wir betrachten die Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$:



(a) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ an.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}', v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}', v$, und geben sie eine trennende ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}', v \not\models \varphi$.

(c) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(d) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

Aufgabe 7 8 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Relationen an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x, y) := \forall z(E_b xz \to E_b zy) \land \neg\exists z(E_a xz \land E_a zy)$;

(ii) $[b]\langle b\rangle\langle a\rangle 1 \land (\langle a\rangle 1 \to [a][b]\langle b\rangle 1)$.

(b) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{0, 1, 2\}$ definieren.

Aufgabe 8 8 Punkte

Die Arithmetik ist die Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot)$. Drücken Sie folgende Sachverhalte in der Prädikatenlogik aus:

(i) $x \leq y$. (ii) $x \mid y$. (iii) x ist eine Primzahl;

(iv) Die Binärdarstellungen von x und y haben dieselbe Länge.

Aufgabe 9 12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche einen Nachfolgern besitzen, an dem nicht Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(c) Die Menge aller $v \in V$, an denen ein Pfad beginnt, welcher keinen Knoten enthälten, an welchen P gilt.

Aufgabe 10 12 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{ (A, f) \mid f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv$\}$,

(b) $\mathcal{K}_3 := \{ (A, f) \mid (A, f) \cong (\mathbb{N}, s) \}$ wobei $s(n) := n + 1\}$,

(c) $\mathcal{K}_4 := \{ (A, f) \mid A$ überabzählbar $\}$,

(d) $\mathcal{K}_5 := \{ (A, f) \mid f^{-1}(a)$ ist unendlich für ein $a \in A \}$.

Aufgabe 11 6 Punkte

Beweisen Sie, dass die Theorie der unendlichen Mengen vollständig ist.

Aufgabe 12 8 Punkte

In welchen der folgenden Fällen ist entscheidbar, ob $\varphi \models \psi$. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\varphi, \psi \in$ AL;	(c) $\varphi, \psi \in$ FO;
(b) $\varphi, \psi \in$ ML;	(d) $\varphi \in$ ML und $\psi \in$ FO.