Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

WS 2003/04

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1 — 12 Punkte

(a) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{\neg X, Y\}, \{X, \neg Y\}, \{X, Y, Z\}, \{\neg X, \neg Y, Z\}, \{X, Y, \neg Z\}, \{\neg X, \neg Y, \neg Z\}\}.$$

(b) Verwenden Sie die Resolutionsmethode um festzustellen, ob folgende Implikation allgemeingültig ist:

$$\big((X \wedge Y \rightarrow Z \vee Q) \wedge (X \wedge Q \rightarrow Y \vee Z) \wedge (X \vee Q)\big) \rightarrow \big(Y \rightarrow Z \vee Q\big).$$

(c) Sei K eine endliche Klauselmenge, in der jede Klausel höchstens ein negiertes Literal besitzt. Zeigen Sie, dass man in Polynomzeit entscheiden kann, ob K erfüllbar ist.

Aufgabe 2 — 8 Punkte

(a) Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_n(X_n, \dots, X_0, Y_n, \dots, Y_0)$, die besagt, dass bei der Addition der Binärzahlen $X_n \dots X_0$ und $Y_n \dots Y_0$ kein Überlauf entsteht.

(b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Z)$; (iii) $Y \vee ((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z))$;
(ii) $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow \neg Z)$; (iv) $Y \wedge ((X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z))$.

Aufgabe 3 — 12 Punkte

Seien φ und ψ zwei aussagenlogische Formeln ohne gemeinsame Variablen. Beweisen Sie, dass $\varphi \models \psi$ genau dann gilt, wenn φ unerfüllbar oder ψ eine Tautologie ist.

Aufgabe 4 — 12 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leq)$ und $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an.

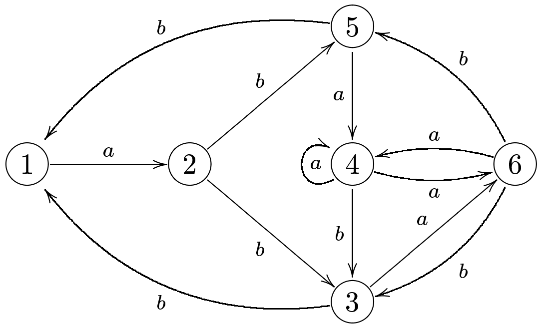
(b) Geben Sie je einen starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ an, oder beweisen Sie, dass es einen solchen nicht gibt.

Aufgabe 5 — 8 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, E)$ mit $E = \{(0,0), (1,0)\}$. Geben Sie das Auswertungsspiel zu der Formel $\varphi = \forall x(Exx \rightarrow \exists y(Eyx \wedge x \neq y))$ an, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler.

Aufgabe 6 20 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$:



(a) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ an.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}, v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}, v$, und geben sie eine trennende ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

(c) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(d) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

(e) Geben Sie Formeln in ML, FO und RA$^+$ an, welche die Menge $\{1, 3, 5\}$ definieren.

Aufgabe 7 8 Punkte

Wir betrachten folgende linear geordnete Strukturen:

(i)	$\mathfrak{A}_1 := (\{1, 2, 3\}, <)$;	(iii)	$\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{Z}, <)$;
(ii)	$\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <)$;	(iv)	$\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <)$.

Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in$ FO an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 8 12 Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) Die Klasse der Äquivalenzstrukturen mit genau drei Äquivalenzklassen.

(b) Die Klasse der transitiven ungerichteten Graphen, die nicht zusammenhängend sind.

(c) Die Klasse der abzählbaren diskreten linearen Ordnungen.

(d) Die Klasse der ungerichteten Graphen, in denen alle Knoten ungeraden Grad haben.

Aufgabe 9 8 Punkte

(a) Erläutern Sie in eigenenen Worten, was es bedeutet, dass

(i) eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist.

(ii) eine Regel $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ korrekt ist.

(b) Formulieren Sie den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik (beide Aussagen). Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.