Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, D. Berwanger

WS 2004/05

Nachholklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1 12 Punkte

(i) Zeigen Sie anhand der Resolutionsmethode, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{X,Y,Z\},\{\neg Y,\neg Z\},\{\neg X,\neg Y,Z\},\{\neg X,Y\},\{Y,\neg Z\},\{X,\neg Y,Z\}\}.$$

(ii) Verwenden Sie die Resolutionsmethode um festzustellen, ob folgende Folgerung gilt:

$$(A\wedge B\rightarrow C)\wedge(B\wedge C\rightarrow A)\models(A\vee B\rightarrow C).$$

(iii) Geben Sie eine aussagenlogische Formel an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist. (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 2 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(i) $$\frac{\Gamma,\ \varphi\Rightarrow\Delta \qquad \Gamma,\ \psi\Rightarrow\Delta,\ \varphi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\ \varphi\rightarrow\psi}$$

(ii) $$\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\ \varphi \qquad \Gamma,\ \neg\varphi\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma,\ \psi\rightarrow\varphi\Rightarrow\Delta}$$

Aufgabe 3 12 Punkte

Sei $\mathfrak{A}:=(\mathbb{Q},+,\leq)$ und $\mathfrak{B}:=(\mathbb{R},\cdot,\leq)$. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(i) ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(ii) eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$;

(iii) ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$;

(iv) ein nichttrivialer Automorphismus von $\mathfrak{A}$.

Aufgabe 4 8 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A}=(\{0,1\},+,1)$, in der $+$ als Addition (mod 2) interpretiert ist. Geben Sie das Auswertungsspiel zu der Formel $\psi:=\forall x(\exists y\,(x+y=y)\vee\forall z\,(z+z=x+1))$ an, und markieren Sie eine Gewinnstrategie für den entsprechenden Spieler.

Aufgabe 5 8 Punkte

Wir betrachten folgende Strukturen:

(i) $\mathfrak{A}_1:=(\{0,1\},\cdot)$; (iii) $\mathfrak{A}_3:=(\mathbb{R},\cdot)$;
(ii) $\mathfrak{A}_2:=(\mathbb{Q},\cdot)$; (iv) $\mathfrak{A}_4:=(\mathbb{C},\cdot)$.

Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i\in\mathrm{FO}$ an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i\models\varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j\models\neg\varphi_i$ für $j\neq i$.

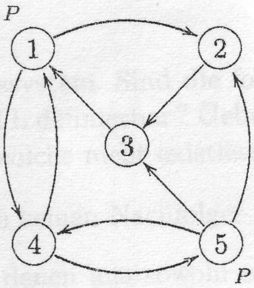

Abbildung 1: Transitionssystem zu den Aufgaben 6 und 7

Aufgabe 6 12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = \big(\{1,2,3,4,5\}, E, P\big)$ das Transitionssystem aus Abbildung 1.

(i) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ an.

(ii) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}, v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}, v$, und geben sie eine trennende ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

(iii) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(iv) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

Aufgabe 7 8 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$ aus der vorherigen Aufgabe.

(i) Geben Sie die Relationen an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(a) $\varphi(x) := \exists y(Eyx \wedge \forall z(Ezx \rightarrow z = y)$;

(b) $\Diamond(\Box\Diamond P \vee \Diamond\Box P)$.

(ii) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{1,2,5\}$ definieren.

Aufgabe 8 10 Punkte

Wir betrachten die Struktur $(\mathbb{N}, |\,)$ der natürlichen Zahlen mit der Teilbarkeitsrelation:

$$k \,|\, n \quad \text{gdw} \quad ak = n \text{ für ein } a \in \mathbb{N}.$$

Welche der folgenden Relationen sind in der Prädikatenlogik definierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie falls möglich eine definierende Formel an.

(i) $R_1 := \{0, 1\}$;

(ii) $R_2 := \{2, 3\}$;

(iii) $R_3 := \{\,(m, n, t) \mid t \text{ ist der grösste gemeinsame Teiler von } m \text{ und } n\,\}$;

(iv) $R_4 := \{\,p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\,\}$;

(v) $R_5 := \{\,n \mid n \text{ ist eine Primpotenz, d.h. } n = p^k \text{ für } p \in R_4 \text{ und } k \in \mathbb{N}\,\}$.

Aufgabe 9 12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche keinen Nachfolger besitzen, an dem P oder Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, von denen aus sowohl ein Knoten an dem P gilt, als auch ein Knoten, an dem Q gilt, erreichbar ist.

(c) Die Menge aller $v \in V$, die einen Nachfolger haben, der auch über einen Pfad der Länge zwei von v aus erreichbar ist.

Aufgabe 10 12 Punkte

Im folgenden betrachten wir gerichtete Graphen. Ein Graph heisst *unendlich verzweigt*, wenn jeder Knoten entweder keine oder unendlich viele ausgehende Kanten hat.

(i) Zeigen Sie, dass die Klasse der unendlich verzweigten Graphen FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Klasse der unendlich verzweigten Graphen, die keine unendlichen Pfade enthalten, nicht FO-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 11 8 Punkte

Wir nennen zwei Mengen aussagenlogischer Formeln *äquivalent*, wenn sie die gleichen Modelle besitzen. Zeigen Sie, dass jede Menge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$, die zu einer einzelnen, nicht notwendigerweise in Φ enthaltenen Formel äquivalent ist, auch zu einer endlichen Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ äquivalent ist.