Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Barany, T. Ganzow,
Ł. Kaiser, M. Ummels

WS 2006/07

Klausur Mathematische Logik

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
/10	/10	/10	/12	/5	/6	/6	/9	/7	/8	/10	/12	/10

Summe:	/115

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Jeder Teilnehmer darf sich *ein* A4 Blatt mit eigenen Notizen zusammenstellen und in der Klausur benutzen. Darüber hinaus ist *kein* Material (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
Geben Sie dieses Deckblatt mit ab.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Jedem ungerichteten Graphen mit Knoten $1, \ldots, n$ ordnen wir eine Interpretation in folgender Weise zu: Zu jedem Paar $i < k$ von Knoten führen wir eine Variable X_{ik} ein, welche genau dann den Wert 1 erhält, wenn eine Kante zwischen i und k existiert.
Konstruieren Sie eine aussagenlogische Formel $\psi_{n,m}$, welche besagt, dass eine Menge von m Knoten existiert welche entweder alle untereinander durch eine Kante verbunden sind, oder alle nicht verbunden sind.

(b) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, so dass jede endliche Teilmenge $X \subseteq V$ in zwei disjunkte unabhängige Mengen aufgeteilt werden kann. Zeigen Sie, dass die ganze Menge V ebenfalls eine solche Unterteilung besitzt. (Eine Menge $X \subseteq V$ ist unabhängig, wenn es keine Kante zwischen zwei Knoten aus X gibt.)

Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.

Aufgabe 2 10 Punkte

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob folgende Formel unerfüllbar ist:

$$((Y \wedge X) \rightarrow \neg Z) \wedge (\neg Z \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y) \wedge (1 \rightarrow X) \wedge (Y \vee \neg Z)$$

(b) Zwei Formeln φ und ψ *schließen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, dass φ und ψ einander ausschließen?

(c) Zeigen Sie mit der Methode aus (b), dass

$$\varphi := (Y \rightarrow (X \vee V)) \wedge (X \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow (Y \vee V)) \wedge (Y \vee Z) \text{ und}$$
$$\psi := ((Z \wedge V) \rightarrow Y) \wedge \neg(Z \wedge X) \wedge (V \rightarrow X)$$

einander ausschließen.

Aufgabe 3 10 Punkte

Gegeben seien folgende $\{f, g, R\}$-Strukturen:

$$\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, f^{\mathfrak{A}}, g^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}) \quad \text{mit } f^{\mathfrak{A}}(w) := w0,$$
$$g^{\mathfrak{A}}(w) := w1 \text{ und}$$
$$R^{\mathfrak{A}} := \{(v, w) \ : \ \text{es gibt ein } z \in \{0,1\}^* \text{ mit } vz = w\}.$$

$$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{B}}, g^{\mathfrak{B}}, R^{\mathfrak{B}}) \quad \text{mit } f^{\mathfrak{B}}(n) := g^{\mathfrak{B}}(n) = n + 1 \text{ und}$$
$$R^{\mathfrak{B}} := \{(a, b) \ : \ a \leq b\}.$$

$$\mathfrak{C} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{C}}, g^{\mathfrak{C}}, R^{\mathfrak{C}}) \quad \text{mit } f^{\mathfrak{C}}(n) := 3n,$$
$$g^{\mathfrak{C}}(n) := 5n \text{ und}$$
$$R^{\mathfrak{C}} := \{(n, m) \ : \ n \text{ teilt } m\}.$$

(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ an.

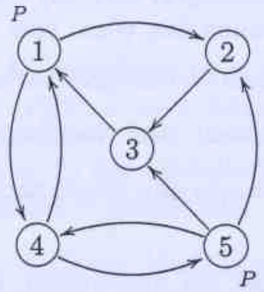
(b) Geben Sie je einen starken Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ an oder beweisen Sie, dass kein solcher existiert.

(c) Gibt es einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ bzw. von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{A}$?

(d) Gibt es echte Substrukturen von $\mathfrak{A}$, die zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind? Wenn ja, wie viele? Gibt es auch Substrukturen von $\mathfrak{A}$, die nicht zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind?

Aufgabe 4   12 Punkte

Sei $\mathcal{K} = \big(\{1,2,3,4,5\}, E, P\big)$ das folgende Transitionssystem:



(a) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ an.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}, v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}, v$ und geben sie eine ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

(c) Konstruieren Sie eine Kripke-Struktur $\mathcal{K}_0$ mit minimaler Anzahl von Zuständen, so dass für jeden Knoten u von $\mathcal{K}$ ein Knoten v aus $\mathcal{K}_0$ existiert mit $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}_0, v$.

(d) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}_0$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

Aufgabe 5   5 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Relationen an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(Eyx \wedge \forall z(Ezx \rightarrow z = y))$;

(ii) $\Diamond(\Box\Diamond P \vee \Diamond\Box P)$.

(b) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{1, 2, 5\}$ definieren.

Aufgabe 6   6 Punkte

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und E ein zweistelliges Relationssymbol.

(a) Berechnen Sie $\varphi[x/fyz,\ y/fzz,\ z/x]$ für $\varphi := \exists x(Exz \wedge \forall z Eyz) \vee \forall z(Exz \wedge Ezy \wedge \exists y Exy)$.

(b) Wandeln Sie die Formel

$$\psi := \forall x \neg\big[(\exists y Exy) \rightarrow \exists x Exy\big]$$

in Pränex-Normalform um und bilden Sie die Skolem-Normalform von $\neg\psi$.

Aufgabe 7   6 Punkte

Wir betrachten folgende Strukturen über der Signatur $\{\subseteq\}$:

$$\mathfrak{A}_1 := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq); \qquad \mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq);$$
$$\mathfrak{A}_2 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \subseteq); \qquad \mathfrak{A}_4 := (\{\underline{n} \ :\ n \in \mathbb{N}\}, \subseteq);$$

wobei $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist, und $\underline{n}$ die Menge $\{0, \dots, n\}$ bezeichnet. Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \text{FO}$ an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 8 9 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem ohne Terminalknoten. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche einen Nachfolger besitzen, an dem nicht Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(c) Die Menge aller $v \in V$, von denen aus alle Pfade nach höchstens 3 Schritten einen Knoten erreichen, an dem Q gilt.

(d) Die Menge aller $v \in V$, an denen ein unendlicher Pfad beginnt, welcher keinen Knoten enthält, an dem P gilt.

(e) Die Menge aller $v \in V$, welche auf einem Kreis der Länge ≥ 2 liegen.

Aufgabe 9 7 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

$$\text{(a)} \quad \frac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta,\ \psi \qquad \Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi \leftrightarrow \psi}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\Gamma,\ \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta,\ \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\Gamma,\ \forall x\varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\ \exists x\varphi \Rightarrow \Delta}$$

Aufgabe 10 8 Punkte

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}$ und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi \rightarrow \psi$.

(b) φ ist genau dann eine Tautologie, wenn $\{\neg\varphi\} \models \varphi$.

(c) Aus $\Phi \models \varphi$ folgt $\Phi' \models \varphi$ für alle Teilmengen $\Phi' \subseteq \Phi$.

(d) Gilt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$, dann ist Φ unerfüllbar. Ist umgekehrt Φ unerfüllbar, dann gilt $\Phi \models \varphi$ für alle Formeln φ.

Aufgabe 11 10 Punkte

(a) Erläutern Sie, was es bedeutet, dass eine Relation in einer Struktur durch eine FO-Formel definierbar ist, und erklären Sie den Begriff der Termdefinierbarkeit.

(b) Welche der folgenden Mengen sind in $(\mathbb{N}, |, 2)$ definierbar? Hierbei gilt

$$k \mid n \ :\text{gdw}\ \ mk = n \text{ für ein } m \in \mathbb{N}.$$

Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an oder beweisen Sie, dass keine solche existiert.

(i) $\{0, 1\}$

(ii) $\{2, 3\}$

(iii) Die Menge der Primzahlen.

(iv) Die Menge der Zweierpotenzen.

(c) Welche Elemente $c \in \mathbb{Q}$ sind in der Struktur $(\mathbb{Q}, +, 1)$ definierbar, welche termdefinierbar?

Aufgabe 12 12 Punkte

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche sind unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort knapp.

(a) Gegeben eine Formel φ in (i) der Aussagenlogik bzw. (ii) der Prädikatenlogik.
Frage: Ist φ kontingent (d.h. φ ist erfüllbar, aber keine Tautologie)?

(b) Gegeben $n \in \mathbb{N}$ und eine Formel φ in (i) der Modallogik bzw. (ii) der Prädikatenlogik.
Frage: Hat φ ein Modell mit höchstens n Elementen?

(c) Gegeben $n \in \mathbb{N}$ und eine Formel φ in (i) der Modallogik bzw. (ii) der Prädikatenlogik.
Frage: Hat φ ein Modell mit mindestens n Elementen?

Aufgabe 13 10 Punkte

Welche der folgenden Strukturklassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Geben Sie jeweils ein Axiomensystem an oder beweisen Sie, dass kein solches existiert.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Klasse $\mathcal{K}_n$ aller ungerichteten Graphen, die eine Clique der Größe n enthalten.

(b) Die Klasse aller regulären ungerichteten Graphen. (Ein ungerichteter Graph heißt *regulär*, wenn alle Knoten den gleichen Grad $d \in \mathbb{N}$ haben.)

(c) Die Klasse aller gerichteten Graphen, die einen zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorphen Teilgraphen enthalten.

(d) Die Klasse aller kreisfreien ungerichteten Graphen (Ein ungerichteter Graph heißt *kreisfrei*, wenn er keinen Kreis der Länge ≥ 3 enthält.)