Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

Probeklausur
Mathematische Logik

Aufgabe 1: 7 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Graphen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antworten und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

$K_1 =$ die Klasse aller vollständigen Graphen. (Ein Graph heisst vollständig, wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden ist.)

$K_2 =$ die Klasse aller Graphen mit Durchmesser 3. (Der Durchmesser eines Graphen ist der maximale Abstand zweier Punkte.)

$K_3 =$ die Klasse aller Graphen, welche einen Kreis der Länge 5 enthalten.

$K_4 =$ die Klasse aller endlichen Graphen in K_3.

$K_5 =$ die Klasse aller Graphen, welche zu

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[dl] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

isomorph sind.

$K_6 =$ die Klasse aller Graphen, welche zu $(\mathbb{N}, E)$ ismomorph sind, wobei $E = \{(m,n) \;:\; m+1 = n$ oder $m - 1 = n\}$ ist.

$K_7 =$ die Klasse aller Graphen, in denen jeder Knoten höchstens endlich viele Nachbarn hat.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Sei K_1 die Klasse der $\{f\}$-Strukturen mit der Eigenschaft, dass $|Bild(f)| = p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass K_1 nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b) Sei K_2 die Klasse der $\{f\}$-Strukturen mit der Eigenschaft, dass es für alle Elemente a ein $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $f^n(a) = a$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass K_2 nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3: 3 Punkte

Sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und P ein 2-stelliges Relationssymbol. Gegeben sei die $\{P, f\}$-Formel $\psi := \forall z[(fxz = y) \land (\forall x \forall y(Pxy \land Pyz) \rightarrow Pzz)]$.

(a) Bilden Sie $\psi[x/z, y/z, z/fxx]$.

(b) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{0,1\}, +, 1)$, wobei $+$ als die Addition (mod 2) interpretiert sei, sowie die Formel $\psi := \exists x \forall y (y + y = x + 1 \wedge \exists z (y + z = x))$.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie an. (Gewinnstrategien beginnen an der Wurzel!)

Aufgabe 5: 6 Punkte

Gegeben sei ein Transitionssystem $T = (S, E_a, E_b, P, Q)$, wobei E_a, E_b zweistellige und P, Q einstellige Relationssymbole seien.

(a) Definieren Sie folgende Mengen mittels FO-Formeln.

(i) Die Menge aller Knoten von denen ein aba-Pfad ausgeht.

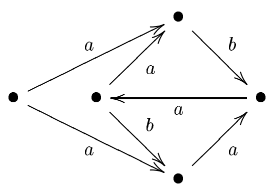
(ii) Die Menge aller Knoten an denen P gilt, Q aber nicht, mit mindestens zwei a-Nachfolgern an denen P gilt und genau einem b-Nachfolger an dem Q nicht gilt.

(b) Definieren Sie folgende Mengen mittels RA-Ausdrücken.

(i) Die Menge aller Knoten mit einem a-Vorgänger und einem b-Nachfolger.

(ii) Die Menge aller Knoten, von denen ein bba-Pfad ausgeht, auf dem die Knotenbeschriftung $(\{P, \neg Q\}, \{P, Q\}, \{Q, \neg P\}, \{\neg P, \neg Q\})$ auftritt. (Das bedeutet, der erste Knoten auf dem Pfad ist mit P, Q beschriftet, der nächste mit $Q, \neg P$ usw.)

(c) Gegeben sei folgendes Transitionssystem:



Geben Sie für jede der folgenden Formeln bzw. RA-Ausdrücke die definierte Menge von Knoten an und beschreiben Sie die Bedeutung der Formeln.

(i) $\psi(x) := \exists y \exists y' \exists z E_a xy \wedge E_b xy' \wedge y \neq y' \wedge E_b yz \wedge E_a y'z$.

(ii) $\pi_1 \sigma_{2=3} \sigma_{4=5} \sigma_{1=6} (E_a \times E_b \times E_a)$.

Aufgabe 6: 5 Punkte

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Wie verwendet man AL-Resolution um nachzuweisen, dass $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \psi$, für AL-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass $\{Y \to X, U \wedge W \to Y, V \to U\} \models W \wedge V \to X$.

Aufgabe 7: 8 Punkte

(a) φ, ψ, ϑ seien aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \psi$.

(ii) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \vartheta \equiv \varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \vartheta)$.

(iii) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \vartheta \equiv (\varphi \rightarrow \vartheta) \vee (\psi \rightarrow \vartheta)$.

(b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_3, \ldots, X_0)$ an, so dass $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ gdw. die Dualzahl $\mathfrak{I}(X_3)\mathfrak{I}(X_2)\mathfrak{I}(X_1)\mathfrak{I}(X_0)$ durch 3 teilbar ist.

(c) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_n, \ldots, X_0, Y_{n+1}, \ldots, Y_0)$ an, so dass $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ gdw. die durch $\mathfrak{I}(X_n) \ldots \mathfrak{I}(X_0)$ gegebene Dualzahl um 1 kleiner ist als die durch $\mathfrak{I}(Y_{n+1}) \ldots \mathfrak{I}(Y_0)$ gegebene.

(d) Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Junktoren funktional vollständig sind.

(i) $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$

(ii) $\{sel, 0, 1\}$.

Dabei sei $sel(u, v, w) = v$, falls $u = 0$, und $sel(u, v, w) = w$, falls $u = 1$.

Aufgabe 8: 5 Punkte

(a) Beschreiben Sie, was eine korrekte Sequenz ist. Was ist eine korrekte Ableitungsregel für Sequenzen?

(b) Beweisen Sie (semantisch) die Korrektheit folgender Regeln:

(i)

$$(S \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(t) \rightarrow \Delta}{\Gamma, t = t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}.$$

(ii)

$$(\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

(ii) $\neg\exists x \psi(x) \rightarrow \forall x \neg\psi(x)$.

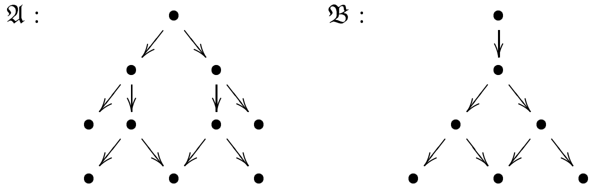
Aufgabe 9: 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ keine echten Substrukturen enthält.

(b) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass es keine τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, so dass $(\mathbb{N}, +, 0, 1) \subset \mathfrak{A} \subset (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.

Aufgabe 10: 4 Punkte



(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spieler I das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt?

(b) Finden Sie einen Satz ψ mit Quantorenrang m, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 11: 3 Punkte

Untersuchen Sie für die unten angegebenen Tripel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, ob

(a) f ein Homomorphismus

(b) f ein Isomorphismus

(c) f eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ ist.

Dabei sei:

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, max, min)$
$\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$
$f(n) := \{0, \ldots, n\}$

(ii) $\mathfrak{A} := (A, \cup, \cap)$ mit $A :=$ Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, max, min)$
$f(X) := |X|$

(iii) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, Q)$ mit $Q := \{(n, m) \ : \ n$ und m sind teilerfremd $\}$
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, P)$, mit $P := \{p \ : \ p$ ist Primzahl $\}$.
$f(n, m) := (n \cdot m)! + 1$