Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, A. Blumensath

WS 2001/02

Probeklausur Mathematische Logik

Dies ist eine Auswahlklausur. Es wird nicht erwartet, daß sämtliche Aufgaben in zwei Stunden gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz und erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, daß die Formel

$$\big((X \wedge Y) \to (U \vee V)\big) \wedge (Y \to X) \wedge (U \wedge Y \to 0) \wedge (V \wedge Y \to 0) \wedge Y$$

unerfüllbar ist.

(c) Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode entscheiden, ob für zwei AL-Formeln φ und ψ gilt $\varphi \models \psi$?

(d) Verwenden Sie die Methode aus (c), um zu zeigen, daß

$$((Z \wedge V) \to X) \wedge (V \to U) \wedge (\neg V \to \neg Y) \wedge (\neg Z \to U) \models Y \to (U \vee X).$$

Aufgabe 2

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz und $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen. Erleutern Sie kurz in eigenen Worten, welche Bedeutung folgende Beziehungen haben:

$$\mathfrak{A} \models \varphi, \qquad \Phi \models \varphi, \qquad \Phi \vdash \varphi.$$

Sind alle drei Bedingungen stets erfüllt, wenn φ allgemeingültig ist? Sind sie stets falsch, wenn φ unerfüllbar ist?

(b) Geben Sie eine Formulierung des Vollständigkeitssatzes für FO an.

(c) Geben Sie eine Formulierung des Kompaktheitssatzes für FO an.

(d) Erläutern Sie, wie der Kompaktheitssatz aus dem Vollständigkeitssatz folgt.

Aufgabe 3

(a) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sind Homomorphismen, welche Einbettungen?

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, \cdot, \leq)$,

$$f(x) := \begin{cases} 2^m 3^n k & \text{für } x = 2^n 3^m k,\ 2 \nmid k,\ 3 \nmid k, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \preceq, R^{\mathfrak{A}})$ mit

$$R^{\mathfrak{A}} := \{\, (v, w) \mid \ v \text{ und } w \text{ enthalten gleichviele Einsen} \,\},$$

$\mathfrak{B} := (P, \subseteq, R^{\mathfrak{B}})$, wobei $R^{\mathfrak{B}} := \{\, (X, Y) \mid |X| = |Y| \,\}$ und P die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist,
$f(a_0 \cdots a_{n-1}) := \{\, i \mid a_i = 1 \,\}$.

(b) Geben Sie für die Strukturen aus (a) je einen Homomorphismus $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ an.

(c) Geben Sie alle endlichen Substrukturen der Struktur $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), f)$ an, wobei

$$f(X) := X \setminus \{\min X\}.$$

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(a) $$\frac{\Gamma,\ \psi,\ \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \psi,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\ \psi \oplus \varphi}$$ ($\oplus$ ist das exklusive Oder.)

(b) $$\frac{\Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma,\ \psi \oplus \varphi \Rightarrow \Delta}$$

(c) $$\frac{\Gamma,\ \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Aufgabe 5

Sei f ein zweistelliges Funktionsymbol und c und d Konstanten. Betrachten Sie die Formeln über der Signatur $\{f, c, d\}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &:= \forall x \forall y \forall z (fxfyz = ffxyz) \\
\varphi_1 &:= \forall x (fxc = x \wedge fcx = x) \\
\varphi_1' &:= \forall x (fxd = x \wedge fdx = x) \\
\varphi_2 &:= \forall x \exists y (fxy = c \wedge fyx = c) \\
\varphi_3 &:= \forall x \forall y (fxy = fyx)
\end{aligned}$$

Welche der folgenden Formelmengen sind erfüllbar?

(a) $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$,

(b) $\{\varphi_0, \varphi_1, \neg\varphi_2\}$,

(c) $\{\varphi_0, \varphi_1, \neg\varphi_3\}$,

(d) $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_2, c \neq d\}$.

Aufgabe 6

(a) Ist die folgende AL-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$[(X \to (Y \vee Z)) \wedge (Y \to \neg Z)] \leftrightarrow [\neg(\neg X \to (Y \wedge Z)) \vee \neg(Y \leftrightarrow Z)]$$

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Ist die folgende FO-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar? Ist sie ein Unendlichkeitsaxiom?

$$\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x \exists y Rxy \wedge \forall x (Rxx \to \forall y (Rxy \to \neg Ryx))$$

(c) Kann eine Formel gleichzeitig eine Tautologie und ein Unendlichkeitsaxiom sein?

Aufgabe 7

Seien R und E zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Gegeben sei $\varphi := \exists y[((\forall z Rzx) \rightarrow Rxy) \land \forall x(\neg Exz \lor Exy)]$. Berechnen Sie $\varphi[x/fxy,\ y/gz,\ z/fxx]$.

(b) Formen Sie

$$\psi := \exists y \forall x \neg Rxy \land \forall x \exists y Rxy \land \forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg \exists z (Rxz \land \neg z = y))$$

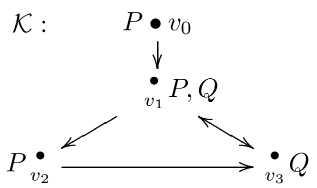
in eine äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform um.

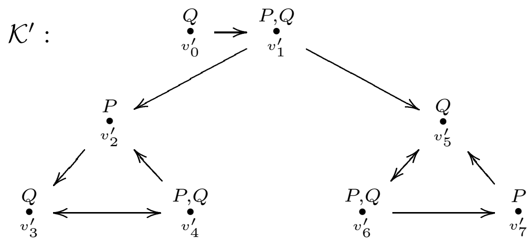
(c) Bilden Sie die Skolem-Normalform ψ'' von ψ'.

(d) Geben Sie je ein Modell für ψ' und ψ'' an.

Aufgabe 8

Betrachten Sie die Transitionssysteme





(a) Beweisen Sie, daß $\mathcal{K}, v_0$ und $\mathcal{K}', v_0'$ nicht bisimilar sind, oder geben Sie eine Bisimulation an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl m, so daß der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt.

(c) Geben Sie einen Satz φ mit minimalem Quantorenrang an, so daß $\mathcal{K} \models \varphi$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi$.

(d) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, v_0$ bisimilare Baumstruktur.

(e) Gibt es eine endliche Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, v_0$ bisimilar ist?

Aufgabe 9

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Mengen der Knoten an, die von folgenden Formeln definiert werden:

   (i) $\varphi(x) := \exists y(Exy \wedge \forall z(Eyz \rightarrow Qz))$

   (ii) $\pi_1((\pi_{1,4}\sigma_{2=3}(E \times E)) - (P \times Q))$

   (iii) $\mathbf{A}(P\mathbf{U}(\mathbf{EG}Q))$

   (iv) $\Box((P \wedge \Diamond\Diamond Q) \vee (P \wedge Q))$

(b) Geben Sie Formeln in ML, FO und RA an, welche die Menge $\{v_2', v_5'\}$ definieren, oder begründen Sie, wieso solche Formeln nicht existieren.

Aufgabe 10

Sei $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, welche einen Nachfolgern besitzen, an dem nicht Q gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens einen Vorgänger besitzen.

(c) Die Menge aller $v \in V$, von denen aus alle Pfade nach höchsens 3 Kanten enden.

(d) Die Menge aller $v \in V$, an denen ein Pfad beginnt, welcher keinen Knoten enthälten, an welchen P gilt.

Aufgabe 11

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{\, (A, f) \mid f \text{ ist injektiv, aber nicht surjektiv} \,\}$,

(b) $\mathcal{K}_2 := \{\, (A, f) \in \mathcal{K}_1 \mid A \text{ endlich} \,\}$,

(c) $\mathcal{K}_3 := \{\, (A, f) \mid (A, f) \cong (\mathbb{N}, s) \,\}$ wobei $s(n) := n + 1$,

(d) $\mathcal{K}_4 := \{\, (A, f) \mid A \text{ überabzählbar} \,\}$,

(e) $\mathcal{K}_5 := \{\, (A, f) \mid f^{-1}(a) \text{ ist unendlich für ein } a \in A \,\}$,

(f) $\mathcal{K}_6 := \{\, (A, f) \mid |\{\, f^n(a) \mid n \in \mathbb{N} \,\}| \leq 753 \text{ für alle } a \in A \,\}$,

(g) $\mathcal{K}_7 := \{\, (A, f) \in \mathcal{K}_6 \mid A \text{ endlich} \,\}$.

Aufgabe 12

Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller gerichteter Graph, in welchen jeder Knoten entweder keine oder unendlich viele ausgehende Kanten hat.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{K}$ FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.
Hinweis. Benutzen Sie den Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé.

(b) Beweisen Sie, daß die Klasse $\mathcal{K}'$ aller Graphen aus $\mathcal{K}$, welche keine unendlichen Pfade enthalten, nicht FO-axiomatisierbar ist.
Hinweis. Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.