Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 00/01

Probeklausur
Mathematische Logik

Aufgabe 1: 8 Punkte

ψ, φ seien aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) *(i)* $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ist eine Tautologie.
(ii) $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \rightarrow \theta$.
(iii) $((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ ist eine Tautologie.
(iv) $(\psi \vee \varphi) \rightarrow \theta \equiv (\psi \rightarrow \theta) \vee (\varphi \rightarrow \theta)$.

(b) Sei $maj_n(X_1, \dots, X_n) := \begin{cases} 1 & |\{i \ : \ X_i = 1\}| \geq \frac{n}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.
Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_1, \dots, X_n)$ an, welche maj_n definiert.

(c) Welche der folgenden Systeme sind funktional vollständig: $(maj_2, \neg)$, $(\neg maj_3, 1)$, $(maj_3, 0, 1)$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

(a) Formulieren Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Wie verwendet man diesen Satz, um nachzuweisen, dass eine Modellklasse $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar ist?

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K} := \{(A, E) \ : \ E$ ist Äquivalenzrelation auf A, so dass jede Äquivalenzklasse entweder höchstens 13 oder aber unendlich viele Elemente hat $\}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3: 8 Punkte

(a) Erläutern Sie in eigenenen Worten, was es bedeutet, dass

(i) eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist.
(ii) eine Regel

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$$

korrekt ist.

(b) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig, welche Regeln korrekt. Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)$, wenn c nicht in φ vorkommt.
(ii) $\varphi(c), \varphi(d), \forall z \forall z' (\neg\varphi(z) \vee z = z' \vee \neg\varphi(z')) \Rightarrow c = d$.

(iii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei

$\Gamma := \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y (x = y \vee Exy \vee Eyx), \forall x \forall y \forall z (Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)\}$ und
$\Delta := \{\forall x \forall y\ (Exy \vee Eyx), \neg \exists x \exists y (Exy \wedge Eyx)\}$.

(iv)

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}.$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \psi$.

(ii) $\neg \exists x \psi(x) \rightarrow \forall x \neg \psi(x)$.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Sei f ein zweistelliges, g ein einstelliges Funktionssymbol und P, E seien zweistellige Relationssymbole. Weiterhin sei $\psi := Pxx \wedge \forall x\ ((\exists y\ Pyx \wedge \exists y\ Pxy) \wedge \forall z\ Ezy)$

(a) Bilden Sie $\psi[x/fyy, y/gx]$.

(b) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 5: 6 Punkte

(a) Seien ψ in KNF und φ in DNF aussagenlogische Formeln. Erläutern Sie wie man mittels Resolution zeigt, dass

(i) ψ unerfüllbar ist.

(ii) φ allgemeingültig ist.

(iii) $\psi \models \varphi$.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution, dass

$$\psi \equiv \neg((X_1 \rightarrow X_2) \rightarrow X_3) \vee \neg(X_1 \vee X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee \neg(X_1 \rightarrow X_2)$$

allgemeingültig ist.

(c) Zeigen Sie mittels Resolution, dass

$$(\neg X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_3 \rightarrow X_2) \wedge (\neg X_3 \rightarrow \neg X_4) \wedge (X_1 \wedge X_3 \rightarrow X_5) \models X_2 \vee \neg X_4 \vee X_5.$$

Aufgabe 6: 6 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

$K_1 =$ Die Klasse aller diskreten linearen Ordnungen $(A, <)$ ohne kleinstes und grösstes Element, z.B. $(\mathbb{Z}, <)$.

$K_2 =$ Die Klasse aller abzählbaren Strukturen in $\mathcal{K}_1$.

$K_3 =$ Die Klasse aller Strukturen, die zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorph sind.

$K_4 =$ Die Klasse aller partiellen Ordnungen $(A, <)$, so dass es zu jedem $a \in A$ höchstens 4 Elemente $b \in A$ gibt mit $a < b$.

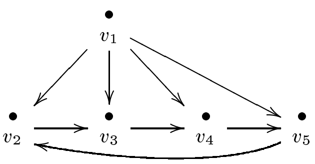
$K_5 =$ Die Klasse aller partiellen Ordnungen, welche zu $(\mathrm{Pot}\{1, , 2, 3\}, \subseteq)$ isomorph sind.

$K_6 =$ Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.

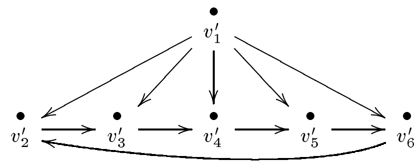
Aufgabe 7: Punkte

Gegeben seien folgende Transitionssysteme:

$\mathcal{K} :=$



$\mathcal{K}' :=$



(a) Sind $\mathcal{K}, v_1$ und $\mathcal{K}', v_1'$ bisimilar? Wenn ja, geben Sie eine Bisimulation an. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

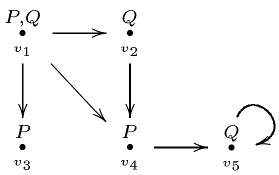
(b) Welches ist das kleinste m, so daß Spieler I das Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt?

(c) Geben Sie Formeln $\varphi \in \mathrm{ML}$ und $\psi \in \mathrm{FO}$ mit $\mathrm{qr}(\psi) = 3$ an, so daß $\mathcal{K}, v_1 \models \varphi$ und $\mathcal{K}', v_1' \not\models \varphi$, bzw. $\mathcal{K} \models \psi[v_1]$ und $\mathcal{K}' \not\models \psi[v_1']$ oder begründen Sie, warum solche Formeln nicht existieren.

Aufgabe 8: Punkte

(a) Sei $A := \{a, b\}$ eine Menge von Aktionen und $I := \{P, Q\}$ eine Menge atomarer Eigenschaften. Geben Sie jeweils in FO, RA und ML eine Formel an, die in Kripke-Strukturen mit Aktionen aus A und atomaren Eigenschaften aus I die Menge aller Knoten definiert, die keine Nachfolger haben oder aber durch einen ab-Pfad mit solchen verbunden sind.

(b) Sei $\mathcal{K}$ folgendes Transitionssystem:



Geben Sie für jede der folgenden Formeln die Knoten an, an denen die Formel gilt:

(i) $\varphi(x) := \forall y(Exy \to ((Px \leftrightarrow Py) \land (Qx \leftrightarrow Qy)))$.

(ii) $\pi_1[(\pi_{1,4}\sigma_{2=3}(E \times E)) - P \times P]$

(iii) $\Box(\neg P \land \neg Q) \lor \Diamond\Box Q$

Aufgabe 9: 3 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{a, b\}, P^{\mathfrak{A}})$, wobei P zweistellig mit $P^{\mathfrak{A}} := \{(a, b), (b, b), (a, a)\}$, sowie $\psi := \exists x(\forall y Pyx \land \exists y \neg Pxy)$ gegeben.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie an. (Gewinnstrategien beginnen an der Wurzel!)