Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, T. Ganzow, Ł. Kaiser

WS 2005/06

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz und erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die Formel

$$\big((X \land Y) \to (U \lor V)\big) \land (Y \to X) \land (U \land Y \to 0) \land (V \land Y \to 0) \land Y$$

unerfüllbar ist.

(c) Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode entscheiden, ob für zwei AL-Formeln φ und ψ die Beziehung $\varphi \models \psi$ gilt?

(d) Verwenden Sie die Methode aus (c), um zu zeigen, dass

$$((Z \land V) \to X) \land (V \to U) \land (\neg V \to \neg Y) \land (\neg Z \to U) \models Y \to (U \lor X).$$

Aufgabe 2

(a) Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_n(X_n, \dots, X_0, Y_n, \dots, Y_0)$, die besagt, dass bei der Addition der Binärzahlen $X_n \dots X_0$ und $Y_n \dots Y_0$ kein Überlauf entsteht.

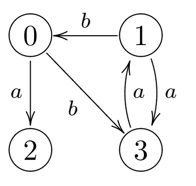
(b) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(X \to Y) \land (X \to \neg Z)$; (iii) $Y \lor ((X \to Y) \land (X \to Z))$;
(ii) $(X \to Y) \lor (X \to \neg Z)$; (iv) $Y \land ((X \to Y) \lor (X \to Z))$.

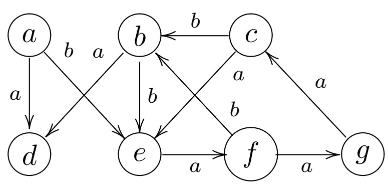
Aufgabe 3

Betrachten Sie die Transitionssysteme

$\mathcal{K}$:



$\mathcal{K}'$:



(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{K}, 0$ und $\mathcal{K}', a$ nicht bisimilar sind, oder geben Sie eine Bisimulation an.

(b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl m, so dass der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt.

(c) Geben Sie einen FO-Satz φ mit minimalem Quantorenrang an, so dass $\mathcal{K} \models \varphi$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi$.

(d) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilare Baumstruktur.

(e) Gibt es eine endliche Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, 0$ bisimilar ist?

Aufgabe 4

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Geben Sie die Mengen der Knoten an, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(E_a yx \wedge \forall z \neg E_b yz)$

(ii) $\psi := [b]0 \wedge \langle a \rangle \langle a \rangle 1$

(b) Geben Sie Formeln in ML und FO an, welche die Menge $\{c, f\}$ definieren.

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$ ein Transitionssystem. Sind die folgenden Mengen in (i) der Modallogik, (ii) der Prädikatenlogik, und (iii) CTL definierbar? Geben Sie jeweils eine entsprechende Formel an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Die Menge aller $v \in V$, an deren sämtlichen Nachfolgern P gilt.

(b) Die Menge aller $v \in V$, so dass es einen Pfad der Länge höchstens 3 von v zu einem Knoten gibt, welcher keinen Nachfolger besitzt.

(c) Die Menge aller $v \in V$, die mindestens zwei Nachfolger besitzen.

(d) Die Menge aller $v \in V$, so dass alle in v beginnenden Pfade nur Knoten enthalten, an welchen Q gilt.

Aufgabe 6

(a) Welche der folgenden Funktionen $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sind Homomorphismen, welche Einbettungen?

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$, $\quad \mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, \cdot, \leq)$,

$$f(x) := \begin{cases} 2^m 3^n k & \text{für } x = 2^n 3^m k,\ 2 \nmid k,\ 3 \nmid k, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \preceq, R^{\mathfrak{A}})$ mit

$$R^{\mathfrak{A}} := \{(v, w) \ : \ v \text{ und } w \text{ enthalten gleichviele Einsen}\},$$

$\mathfrak{B} := (P, \subseteq, R^{\mathfrak{B}})$, wobei $R^{\mathfrak{B}} := \{(X, Y) \ : \ |X| = |Y|\}$ und P die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist,
$f(a_0 \cdots a_{n-1}) := \{i \ : \ a_i = 1\}$.

(b) Geben Sie für die Strukturen aus (a) je einen Homomorphismus $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ an.

(c) Geben Sie alle endlichen Substrukturen der Struktur $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), f)$ an, wobei

$$f(X) := X \setminus \{\min X\}.$$

Aufgabe 7

Sei f ein zweistelliges, g ein einstelliges Funktionssymbol und seien P, E zweistellige Relationssymbole. Weiterhin sei $\psi := Pxx \wedge \forall x\ ((\exists y\ Pyx \wedge \exists y\ Pxy) \wedge \forall z\ Ezy)$

1. Bilden Sie $\psi[x/fyy, y/gx]$.
2. Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.
3. Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 8

(a) Ist die folgende AL-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar?

$$[(X \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Y \rightarrow \neg Z)] \leftrightarrow [\neg(\neg X \rightarrow (Y \wedge Z)) \vee \neg(Y \leftrightarrow Z)]$$

(b) Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Ist die folgende FO-Formel (i) eine Tautologie, (ii) erfüllbar, aber keine Tautologie oder (iii) unerfüllbar? Ist sie ein Unendlichkeitsaxiom?

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \wedge \forall x \exists y Rxy \wedge \forall x(Rxx \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx))$$

(c) Kann eine Formel gleichzeitig eine Tautologie und ein Unendlichkeitsaxiom sein?

Aufgabe 9

1. Erläutern Sie in eigenenen Worten, was es bedeutet, dass
   a) eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist.
   b) eine Regel $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}$ korrekt ist.
2. Welche der folgenden Sequenzen sind gültig, welche Regeln korrekt? Begründen Sie Ihre Antworten.
   a) $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)$, wenn c nicht in φ vorkommt.
   b) $\varphi(c), \varphi(d), \forall z \forall z'(\neg\varphi(z) \vee z = z' \vee \neg\varphi(z')) \Rightarrow c = d$.
   c) $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei
   $\Gamma := \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y(x = y \vee Exy \vee Eyx), \forall x \forall y \forall z(Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)\}$ und
   $\Delta := \{\forall x \forall y\ (Exy \vee Eyx), \neg\exists x \exists y(Exy \wedge Eyx)\}$.
   d) $\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$.
3. Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:
   a) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$.
   b) $(\neg\exists x \psi(x)) \rightarrow (\forall x \neg\psi(x))$.

Aufgabe 10

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) \ : \ f \text{ ist injektiv, aber nicht surjektiv}\}$,

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, f) \in \mathcal{K}_1 \ : \ A \text{ endlich}\}$,

(c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) \ : \ (A, f) \cong (\mathbb{N}, s)\}$ wobei $s(n) := n + 1$,

(d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) \ : \ A \text{ überabzählbar}\}$,

(e) $\mathcal{K}_5 := \big\{(A, f) \ : \ f^{-1}(a) \text{ ist unendlich für ein } a \in A\big\}$,

(f) $\mathcal{K}_6 := \{(A, f) \ : \ |\{f^n(a) \ : \ n \in \mathbb{N}\}| \leq 753 \text{ für alle } a \in A\}$,

(g) $\mathcal{K}_7 := \{(A, f) \in \mathcal{K}_6 \ : \ A \text{ endlich}\}$.