Aufgabe 1 — 12 Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass die Formel

$$(U \vee Y) \wedge (U \wedge Z \rightarrow Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (X \rightarrow (Y \vee Z)) \wedge (Y \rightarrow 0)$$

unerfüllbar ist.

(b) Seien Γ, Δ endliche Mengen von aussagenlogischen Formeln, und seien o.B.d.A. die Formeln aus Γ in KNF und die Formeln aus Δ in DNF gegeben. Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode entscheiden, ob die aussagenlogische Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ gültig ist?

(c) Verwenden Sie die Methode aus (b), um zu zeigen, dass die folgende Sequenz gültig ist:

$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow 0) \wedge (U \wedge Z \rightarrow Y) \wedge (X \vee Y \vee Z) \Rightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge \neg U)$$

Aufgabe 2 — 6 Punkte

(a) Gibt es eine modallogische Formel φ, so dass für alle Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und alle v gilt: $\mathcal{K}, v \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{K}$ ein Baum mit Wurzel v ist?

(b) Sei $\Phi_\infty := \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ (d.h. alle Modelle von Φ_∞ sind unendlich). Zeigen oder widerlegen Sie, dass für ein beliebiges Unendlichkeitsaxiom ψ die Menge $\Phi_\infty \cup \{\neg\psi\}$ immer unerfüllbar ist.

Aufgabe 3 — 8 Punkte

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar, welche unentscheidbar? Begründen Sie ihre Antwort knapp.

(a) Das Erfüllbarkeitsproblem der Modallogik.

(b) Das Auswertungsproblem für FO-Formeln auf endlichen Strukturen.

(c) Die Menge aller modallogischen Formeln, die ein Baummodell haben.

(d) Die Menge aller $\psi \in \mathrm{FO}$, so dass $\emptyset \Rightarrow \psi$ eine gültige Sequenz ist.

Aufgabe 4 — 10 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\{a,b\}^*, p : (x \mapsto ax), s : (x \mapsto xb))$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, f : (n \mapsto 2n), g : (n \mapsto 3n))$, d.h. p fügt ein a am Anfang des Wortes ein, und s hängt ein b an das Ende des Wortes an. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) ein nicht-trivialer Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

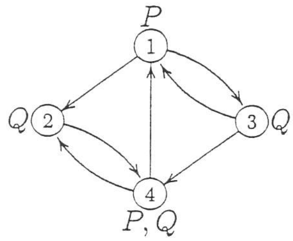
(b) ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$;

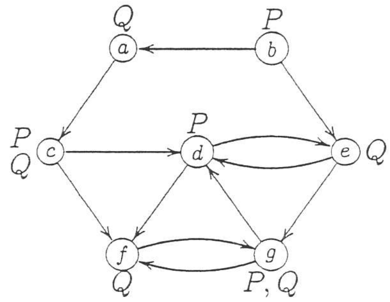
(c) ein nicht-trivialer Automorphismus von $\mathfrak{B}$.

(d) Sei μ eine injektive Abbildung von $b\{a,b\}^*a$ auf die Menge $\{n > 1 : 2 \nmid n \wedge 3 \nmid n\}$. Zeigen Sie, dass man μ zu einer Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ fortsetzen kann.

Aufgabe 5 — 16 Punkte

Seien zwei Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ mit atomaren Eigenschaften P und Q wie folgt gegeben:

$\mathcal{K} :=$ 

$\mathcal{K}' :=$ 

(a) Sind $\mathcal{K}, 1$ und $\mathcal{K}', b$ bisimilar? Geben Sie gegebenenfalls eine Bisimulation an.

(b) Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{ML}$ mit $\mathcal{K}, 2 \models \varphi$, $\mathcal{K}', a \not\models \varphi$ an oder begründen Sie, warum eine solche Formel nicht existiert.

(c) Welches ist das kleinste m, so dass der Herausforderer das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $G_m(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ gewinnt?

(d) Geben Sie einen Satz $\psi \in \mathrm{FO}$ mit minimalem Quantorenrang an, so dass $\mathcal{K} \models \psi$ und $\mathcal{K}' \models \neg\psi$.

(e) Skizzieren Sie eine zu $\mathcal{K}, 1$ bisimilare Baumstruktur.

(f) Gibt es eine *endliche* Baumstruktur, welche zu $\mathcal{K}, 1$ bisimilar ist?

Aufgabe 6 — 12 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}'$ aus Aufgabe 5.

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln die Knoten an, an denen die Formel gilt:

- (i) $\varphi_1(x) := Qx \wedge \exists y(Exy \wedge Qy \wedge \exists z(Eyz \wedge Pz \wedge x = z))$
- (ii) $\varphi_2 := \Box P \wedge Q \wedge \Diamond\Diamond\Diamond(P \wedge Q)$
- (iii) $\varphi_3 := \mathrm{A}(P\,\mathrm{U}\,\mathrm{A}(Q\,\mathrm{U}\,(P \wedge Q)))$

(b) Geben Sie Formeln in FO und ML an, welche die Menge $\{b, g\}$ definieren, oder begründen Sie, weshalb solche Formeln nicht existieren.

(c) Geben Sie eine CTL-Formel an, welche in einem beliebigen Transitionssystem $\mathcal{K}$ mit Zustand v ausdrückt, dass es keinen Pfad von v aus gibt, auf dem irgendwann P aber danach nie mehr Q gilt. Geben Sie eine äquivalente Formel in FO an, oder begründen Sie, weshalb eine solche nicht existiert.

Aufgabe 7 — 8 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Formeln für alle $n \geq 1$ Tautologien sind.

(a) $(X_1 \to (X_2 \to (X_3 \to \ldots (X_{n-1} \to X_n)\ldots))) \leftrightarrow ((X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) \to X_n)$

(b) $(\bigvee_{i=1}^{n}(X_i \to Y_i)) \to ((\bigwedge_{i=1}^{n} X_i) \to (\bigwedge_{i=1}^{n} Y_i))$

Aufgabe 8 6 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(a) $$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \neg\vartheta \Rightarrow \Delta, \neg\psi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \vartheta}$$

(b) $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}$$

Aufgabe 9 10 Punkte

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.
Hinweis zu (d) und (e): Wenden Sie den Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé auf geeignete Bäume an.

(a) $\mathcal{K}_a := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist eine endliche Gruppe$\}$

(b) $\mathcal{K}_b := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist eine unendliche Gruppe$\}$

(c) $\mathcal{K}_c := \{(A, \circ) : (A, \circ)$ ist eine Gruppe, die eine zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorphe Untergruppe enthält$\}$

(d) $\mathcal{K}_d := \{(V, E) : (V, E)$ ist ein gerichteter Graph, der keine unendlichen Pfade enthält$\}$

(e) Ein gerichteter Graph heißt *unendlich verzweigt*, wenn jeder Knoten entweder keine oder unendlich viele ausgehende Kanten hat. Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{K}_e$ der unendlich verzweigten, gerichteten Graphen FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 10 8 Punkte

Wir betrachten folgende Äquivalenzstrukturen:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{A}_1 := (\mathbb{N}, \sim) & \text{mit } \sim^{\mathfrak{A}_1} := \{(n, m) \ : \ n = m\} \\
\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{Z}, \sim) & \text{mit } \sim^{\mathfrak{A}_2} := \{(x, y) \ : \ 3 | (x - y)\} = \{(x, y) \ : \ x \equiv y \pmod 3\} \\
\mathfrak{A}_3 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}), \sim) & \text{mit } \sim^{\mathfrak{A}_3} := \{(A, B) \ : \ |A| = |B|\} \\
\mathfrak{A}_4 := (\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}, \sim) & \text{mit } \sim^{\mathfrak{A}_4} := \{(A, B) \ : \ \max\{a \in A\} = \max\{b \in B\}\}
\end{array}$$

wobei $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ bezeichnet. Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in$ FO an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 11 10 Punkte

(a) Formulieren Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik.

(b) Erläutern Sie, wie der Kompaktheitssatz aus dem Vollständigkeitssatz folgt.

(c) Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *torsionsfrei*, wenn $g^n \neq 1_G$ für alle Elemente $g \neq 1_G$ und alle $n > 0$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse der torsionsfreien Gruppen FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist.