Zusammenfassung der Vorlesung

Mathematische Logik

Bodo von der Heiden

Letzte Aktualisierung: 2. Februar 2005

Zeitraum der Vorlesung: WS 2004/2005
Professor: Prof. Grädel

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit!

Inhaltsverzeichnis

1 Modell

Ein Modell einer Formel ψ ist eine Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Statt $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ schreibt man auch $\mathfrak{I} \models \psi$ und sagt $\mathfrak{I}$ erfüllt ψ.

2 funktional vollständig

$[\![f(\varphi_1, ..., \varphi_n)]\!]^{\mathfrak{I}} := f([\![\varphi_1]\!]^{\mathfrak{I}}, ..., [\![\varphi_n]\!]^{\mathfrak{I}})$

3 erfüllbar

Hat eine Formel ein Modell, dann heißt sie erfüllbar, andernfalls unerfüllbar.

3.1 Folgerungsbeziehungen

- $\Phi \models \varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar
- $\Phi \not\models \varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar

$\Phi \models \varphi$: Jede Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \Phi$ (jede Interpretation, welche Φ wahr macht), muss auch das φ wahr machen, z.B. $\mathfrak{I} \models \varphi$.

3.2 Resolvente

Sei eine Formel ψ gegeben in KNF $\psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$. Ordne jeder Disjunktion $\bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$ eine Klausel C_i zu. Sei $K(\psi) = \{Y_i | i = 1, ..., n\} = Res^0$.

- Die leere Klauselmenge ist erfüllbar
- Wenn $\square \in K$, dann ist K unerfüllbar

Sei $X \in Y_i, \neg X \in Y_j$ So sei die Resolvente $Y = (Y_i - \{X\} \cup (Y_j - \{\neg X\})$.
Der Resolutionskalkül ist vollständig!
Bilde $Res^i(K)$ durch verkürzende Resolventenbildung aus $Res^{i-1}(K)$. $Res^*(K)$ ist die Menge für die als erstes $Res^k = Res^{k+1}$ gilt.

3.3 Allgemeingültigkeit von DNF-Formeln

Sei ψ in DNF, so gilt: ψ allgemeingültig $\Leftrightarrow \neg\psi$ unerfüllbar

3.4 Semantische Folgerung

$\psi \models \varphi \Leftrightarrow \psi \wedge \neg\varphi$ unerfüllbar

4 Tautologie

Eine Formel ψ heißt Tautologie (oder allgemeingültig), wenn jede zu ψ passende Interpretation ein Modell von ψ ist.

4.1 Lemma 1.6

Eine Formel ψ ist erfüllbar $\Leftrightarrow \neg\psi$ ist keine Tautologie.

5 logisch äquivalent

Zwei Formeln φ und ψ heißen logisch äquivalent ($\varphi \equiv \psi$), wenn für jede zu beiden Formeln passende Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt, dass $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$.

5.1 Einige einfache logische Äquivalenzen

(1) $\neg\neg\psi \equiv \psi$ (Elimination der doppelten Negation)

(2) $\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$ (de Morgan'sche Gesetze)
$\neg(\psi \vee \varphi) \equiv \neg\psi \wedge \neg\varphi$

(3) $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$ (Distributivgesetz)
$\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$

(4) $\psi \to \varphi \equiv \neg\varphi \to \neg\psi$ (Kontraposition)

(5) $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$ (Absorption)

(6) $\psi \wedge \psi \equiv \psi$ (Idempotenz)
$\psi \vee \psi \equiv \psi$

(7) $\psi \wedge \varphi \equiv \varphi \wedge \psi$ (Kommutativität)
$\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$

(8) $\psi \wedge (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \wedge \vartheta$ (Assoziativität)
$\psi \vee (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \vee \vartheta$

(9) $\psi \vee \varphi \equiv \neg\psi \to \varphi \Leftrightarrow \psi \to \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi$

5.2 Äquivalenzklasse

5.2.1 Reflexiv

aRa

5.2.2 Symmetrie

$aRb \Rightarrow bRa$

5.2.3 Transitivität

$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

6 Horn-Formel

Eine Horn-Formel ist eine Formel $\psi = \bigwedge_i \bigvee_j Y_{ij}$ in KNF, wobei jede Disjunktion $\bigvee_j Y_{ij}$ höchstens ein positives Literal enthält.

6.1 Satz über Äquivalenz zu Horn-Formeln

Sei ψ die Formel, welche auf Äquivalenz zu einer Horn-Formel getestet werden soll.

Seien $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ zwei Modelle, welche ψ erfüllen. So erfüllt auch $\mathfrak{I}_\cap : \mathfrak{I}_\cap(X) := min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$ die Formel ψ.

Beweis durch Widerspruch.

6.2 Einheitsresolution

Bei Horn-Formeln kann es sein, dass einige Variablen nur einzeln in einer Klausel vorkommen. Bei der Einheitsresolution wird nur mit diesen Klauseln resolviert. Ist hierbei $\square$ nicht ableitbar reicht dies um die Erfüllbarkeit der Horn-Formel zu zeigen.

7 Kompaktheitssatz

Sei $\Phi \subseteq AL, \psi \in AL$.

(i) Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar

(ii) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow$ es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$

8 Erfüllbarkeitstest

Gehe der Reihe nach alle Implikationen ($\rightarrow$) durch, die auf 1 gesetzt werden müssen. Wenn keine neue dazukommt, setze alle anderen auf Null. Bei Wiederspruch unerfüllbar.

8.0.1 von $\Phi \models \psi$

Bilde $\neg\psi$. Mach danach in $\neg\psi$ aus $\neg X \Rightarrow X \rightarrow 0$ und aus $X \Rightarrow 1 \rightarrow X$. Verfahre nach mit $\Phi \cup \neg\psi$ wie oben.

9 Aussagenlogisches Sequenzkalkül

Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (Antizedens $\Rightarrow$ Sukzedens).

9.1 gültig

Eine Sequenz heißt gültig, wenn jedes Modell von Γ auch ein Modell von mindestens einer Formel aus Δ ist (d.h. $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$).

Ist die Sequenz nicht gültig, so existiert eine Interpretation $\mathfrak{I}$ in der alle Formeln aus Γ wahr und alle Formeln aus Δ falsch sind. Wir sagen die Sequenz wird falzifiziert.

9.1.1 Beispiele

- Die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \varnothing$ ist genau dann gültig, wenn Γ unerfüllbar ist.
- Die Sequenz $\varnothing \Rightarrow \Delta$ ist genau dann gültig, wenn $\bigvee \Delta$ gültig (erfüllbar) ist.

9.2 Schlussregeln

Hier können jeweils für Γ, Δ, Σ beliebige endliche Formelmengen und für ψ, φ, ϑ beliebige Formeln eingesetzt werden. Hierbei gilt: $\dfrac{Praemisse}{Konklusion}$

$$(\neg \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow, \neg) \quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \;\; \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

$$(\wedge \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \;\; \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \;\; \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$$

Eine Sequenz ist gültig $\Leftrightarrow$ Auf den Blätter der Ableitung stehen auf sowohl in der Antezedens, als auch in der Sukzedens ein Axiom (d.h. eine einzelne Variable).

9.3 Nachweis der Korrektheit einer Schlussregel/oder Gegenbeispiel

Beweis dirket: (beide) obere(n) Sequenz(en) seinen gültig, so auch die untere.

Beweis über Gegenannahme: (beide) obere(n) Sequenz(en) seinen gültig, die untere aber nicht.

Sei $\mathfrak{I}$ Modell der von Antizedenz$\cup\neg$ Sukzedenz der Konklusion (untern). Für die Korrektheit der Schlussregel muss $\mathfrak{I}$ dann kein Modell der Prämisse sein (d.h. die Prämisse wird falzifiziert).

10 Mengen

10.1 gleichmächtig

Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig ($|A| = |B|$), wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt. (Wenn es je eine injektive Abbildung von A nach B und von B nach A gibt, gibt es auch eine bijektive Abbildung.)

10.2 abzählbar

A heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ gibt ($A := (f(n)|n \in \mathbb{N})$).

10.3 überabzählbar

A heißt überabzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : Pot(\mathbb{N}) \to A$ gibt ($A := (f(n)|n \in Pot(\mathbb{N}))$).

10.3.1 Potenzmenge

Keine Menge ist gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge.

10.4 endliche Mengen

Jede abzählbare Menge ist entweder endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

10.5 dicht

Eine Menge ist dicht, wenn zu zwei beliebigen Elementen $a < b$ immer ein c mit $a < c < b$ existiert.

10.6 Lineare und partielle Ordnung

Eine partielle Ordnung ist eine $\{<\}$-Struktur $(A, <)$ welche folgende Bedingungen erfüllt:

- Irreflexiv: Für kein $a \in A$ gilt $a < a$
- Transitivität: Wenn $a < b$ und $b < c$, dann folgt $a < c$

Es folgt, das $<$ antisymmetrisch ist.

Bei einer linearen Ordnung gilt zusätzlich:

- Vergleichbarkeit: Für alle $a, b \in A$ gilt entweder $a < b, a = b$ oder $a > b$.

11 Strukturen

Eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus

(1) einer nicht leeren Menge A (dem Universum oder Träger von $\mathfrak{A}$)

(2) einer Interpretationsfunktion welche jedem Relationssymbol $P \in R^n(\tau)$ eine Relation $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ und jedem Funktionssymbol $f \in F^n(\tau)$ eine Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ zuordnet.

11.1 Substruktur/Erweiterung

Die Signatur bleibt fest, das Universum wird geändert.

11.2 Redukt/Expansion

Das Universum bleibt erhalten, aber die Signaturen werden geändert.

12 Homomorphismen

12.0.1 injektiv, surjektiv und bijektiv

- Eine Abbildung heißt injektiv, wenn für alle $a \neq a'$ aus A auch die Funktionswerte $f(a)$ und $f(a')$ verschieden sind.
- Eine Abbildung heißt surjektiv, wenn es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt, so das $f(a) = b$ gilt.
- Eine Abbildung heißt bijektiv, wenn sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

12.1 Homomorphismus

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien τ-Strukturen. Eine Abbildung $\pi : A \to B$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $a_1, ..., a_n \in A$ gilt

$$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\pi a_1, ..., \pi a_n) \in R^{\mathfrak{B}}$$

(2) Für jedes Funktionssymbol $f \in F^n(\tau)$ und alle $a_1, ..., a_n \in A^n$ gilt:

$$\pi f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi a_1, ..., \pi a_n)$$

12.1.1 starker Homomorphismus

Ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist ein Homomorphismus, welcher folgende stärkere Version von (1) erfüllt:

(1)' Für jedes Relationssymbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $a_1, ..., a_n \in A^n$ gilt:

$$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (\pi a_1, ..., \pi a_n) \in R^{\mathfrak{B}}$$

12.2 Einbettung

Eine Einbettung ist ein injektiver starker Homomorphismus.

12.3 Isomorphismus

Ein Isomorphismus ist ein bijektiver starker Homomorphismus (also eine surjektive Einbettung).

12.3.1 Automorphismus

Ein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt Automorphismus.

13 Logiken

13.1 aussagenlogische Formeln (AL)

Die Menge AL der aussagenlogischen Formeln ist induktiv definiert durch

(1) $0, 1 \in AL$ (die Booleschen Konstanten sind Formeln)

(2) $\tau \subseteq AL$ (jede Aussagenvariable ist eine Formel)

(3) Wenn $\psi, \varphi \in AL$, dann sind auch die Wörter $\neg\psi, (\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi)$ und $(\psi \to \varphi$ Formeln aus AL.

13.2 DNF und KNF

Eine disjunktive Normalform (DNF) ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen $\psi := \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j_1}^{m_i} Y_{ij}$.

Eine Konjunktive Normalform (KNF) ist eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen $\psi := \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j_1}^{m_i} Y_{ij}$.

13.3 FO-Formeln/Prädikatenlogik

Die Menge $FO(\tau)$ der τ-Formeln der Prädikatenlogik ist induktiv definiert durch:

(1) Sind t_1, t_2 τ-Terme dann ist $t_1 = t_2$ eine τ-Formel.

(2) Sind $t_1, ..., t_n$ Terme aus $T(\tau)$ und ist $P \in \tau$ ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $Pt_1...t_n$ eine τ-Formel.

(3) Wenn ψ eine τ-Formel ist, dann auch $\neg\psi$.

(4) Wenn ψ und φ τ-Formeln sind, dann auch $(\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi)$ und $(\psi \to \varphi$.

(5) Wenn ψ eine τ-Formel ist und $x \in VAR$ eine Variable, dann sind $\exists x\psi$ und $\forall x\psi$ τ-Formeln.

13.3.1 Pränex-Normalform

Eine Formel ist in Pränex-Normalform, wenn sie die Form $Q_1x_1...Q_nx_n\varphi$ mit φ quantorenfrei hat $(Q_i \in \{\exists, \forall\})$.

Dazu hilfreich:

(i) $\exists x(\psi \vee \varphi) \equiv \exists x\psi \vee \exists x\varphi$
$\forall x(\psi \wedge \varphi) \equiv \forall x\psi \wedge \forall x\varphi$

(ii) $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$
$\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$
$\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$
$\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$

(iii) $\neg x\psi \equiv \forall x\neg\psi$
$\neg\forall\psi \equiv \exists x\psi$

(iv) $\exists x\exists y\psi \equiv \exists y\exists x\psi$
$\forall x\forall y\psi \equiv \forall y\forall x\psi$

13.3.2 Skolem-Normalform

Zu jeder Formel $\psi \in FO(\sigma)$ lässt sich eine Formel $varphi \in FO(\tau)$ mit $\sigma \subseteq \tau$ konstruieren, so dass gilt:

(i) $\varphi = \forall y_1 ... \forall y_s \varphi'$, wobei φ' quantorenfrei ist.

(ii) Frei(ψ) = Frei(φ)

(iii) $\varphi \models \psi$

(iv) Zu jedem Modell von ψ existiert eine Expansion, welche Modell von φ ist.

ψ und φ sind über dem selben Universum erfüllbar.

Praxis: Sei Formel in Pränes-Normalfom (z.B. $\psi = \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \varphi$) gegeben. Bei der Umwandlung in Skolem-Normalform wird jedes $\exists x$ durch eine Funktion über alle vorhergehenden $\forall y$ in φ ersetzt (im Beispiel: $\forall x_1 \forall x_3 \exists x_4 \varphi[x_2/fx_1] \equiv \forall x_1 \forall x_2 \varphi[x_2/fx_1, x_4/gx_1x_3]$).

13.4 Modallogik

13.4.1 Definition Modallogik

Eine Menge ML der modallogischen Formeln (mit Aktionen aus A und atomaren Eigenschaften P_i (für $i \in I$) ist induktiv definiert wie folgt:

- Alle aussagenlogischen Formeln mit Aussagenvariable P_i gehören zu ML.
- Wenn $\psi, \varphi \in ML$, dann auch $\neg\psi, (\psi \vee \varphi), (\psi \wedge \varphi)$ und $(\psi \rightarrow \varphi)$.
- Wenn $\psi \in ML$ und $a \in A$, dann gehören auch $\langle a \rangle \psi$ und $[a]\psi$ zu ML.

Hierbei steht $\langle a \rangle \psi$ („Diamond a“) für möglicherweise ψund $[a]\psi$ („Box a“) für notwendigerweise ψ.

13.4.2 Modellbeziehungen

(1) $\mathfrak{K}, v \models P_i$ genau dann wenn $v \in P_i$.

(2) Die Bedeutung von $\neg\psi, (\psi \vee \varphi), (\psi \wedge \varphi)$ und $(\psi \rightarrow \varphi)$ wie üblich.

(3) $\mathfrak{K}, v \models \langle a \rangle \psi$, wenn ein w existiert mit $(v, w) \in E_a$ und $\mathfrak{K}, w \models \psi$.

(4) $\mathfrak{K}, v \models [a]\psi$, wenn für alle w mit $(v, w) \in E_a$ gilt, dass $\mathfrak{K}, w \models \psi$.

13.4.3 Sonstiges

- $\langle a \rangle 0 \equiv$ Es existiert keine a-Kante.
- $\langle a \rangle 1 \equiv$ Es existiert eine a-Kante.
- $[a]0 \equiv$ Es existiert keine a-Kante.
- $[a]1 \equiv 1$

13.5 CTL-Formeln

13.5.1 Syntax von CTL

Die Formeln von CTL sind induktiv definiert wie folgt:

- Alle aussagenlogischen Formeln über $\{P_i|. \in I\}$ gehören zu CTL.
- CTL ist abgeschlossen unter den Booleschen Operatoren $\vee, \wedge, \rightarrow$ und $\neg$.
- Wenn $\psi, \varphi \in CTL$, dann sind auch die Ausdrücke $EX\psi, AX\psi, E(\psi U \varphi)$ und $A(\psi U \varphi)$Formeln von CTL.

Hierbei gilt: $(\psi U \varphi)$ (ψ until φ) steht dafür, dass es ein $n \geq 0$ gibt, so dass an allen Zuständen v_i mit $i < n$ ψ und an Zustand v_n φ gilt.
$X\psi$ (next ψ) bedeutet, das am nächsten Zustand auf dem Pfad ψ gilt.
$E\psi$ steht dafür, das ein Pfad existiert, auf dem ψ gilt.
$A\psi$ steht dafür, das auf allen Pfaden ψ gilt.

13.5.2 Notation

Zwei wichtige Abkürzungen:

1. $F\psi := (1U\psi)$: irgendwann gilt ψ
2. $G\psi := \neg F \neg\psi := \neg(1U\neg\psi)$: es gilt immer ψ

14 Spieltheoretische Semantik

14.1 fundiert

Ein Spiel ist fundiert, wenn es endlich ist. Alle Spiele in FO ($MC(\mathfrak{A}, \psi)$) sind fundiert.

14.2 determiniert

Ein Spiel ist determiniert, wenn von jeder Position aus einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategier hat, d.h. $W_0 \cup W_1 = V$.

14.3 Spielgraph zu Auswertungsspiel $MC(\mathfrak{A}, \phi)$

Ein Spielgraph hat in der Wurzel immer ϕ stehen. ϕ muss so umgeformt worden sein, das sie Impliziert-Frei ist. Danach wird begonnen die Formel zu binär zu zerlegen. Dabei gilt:

- Steht ein Allquantor ($\forall$) ist der Falzifizierer am Zug und es erfolgt eine Substitution durch 0 und 1 (binäre Verzweigung).
- Steht ein Existenzquantor ($\exists$) ist der Verifizierer am Zug und es erfolgt eine Substitution durch 0 und 1 (binäre Verzweigung).
- Steht ein ODER ($\psi \vee \vartheta$) ist der Verifizierer am Zug und es erfolgt eine binäre Verzweigung in ψ und ϑ.
- Steht ein UND ($\psi \wedge \vartheta$) ist der Falzifizierer am Zug und es erfolgt eine binäre Verzweigung in ψ und ϑ.

Ist eine Formel nicht weiter auflösbar (also atomar) so gehört dieser Knotem dem Verifizierer, wenn die Aussage richtig und dem Falzifizierer, wenn die Aussage falsch ist.

Eine Gewinnstrategie beginnt an einem Blatt und endet an der Wurzel. Sie ist nur gültig, wenn es egal welcher Zug gemacht wird der jeweilige Spieler gewonnen hat.

15 Axiomatisierbarkeit

Sei $Str(\tau)$ die Klasse aller τ-Strukturen.

15.1 Modellklasse

Sei Φ eine Menge von τ-Sätzen. Die Modellklasse von Φ (kurz: $Mod(\Phi)$) besteht aus allen τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi$. Eine Klasse K von τ-Strukturen ist axiomatisiert durch Φ, wenn $K = Mod(\Phi)$ gilt.

15.2 FO-axiomatisierbar

Eine Strukturklasse $K \subseteq Str(\tau)$ ist FO-axiomatisierbar (oder einfach axiomatiserbar), wenn eine Satzmenge $\Psi \subseteq FO(\tau)$ existiert, so dass $K = Mod(\Phi)$ gilt.

15.3 Endlich axiomatisierbar

Wenn das Axiomensystem Ψ für K endlich ist, dann können wir die Konjunktion $\psi = \bigwedge\{\phi|\phi \in \Phi\}$ bilden und damit K durch einen einzigen Satz axiomatisieren. Wir sagen in diesem Fall, K ist elementar oder endlich axiomatisierbar.

16 Bisimulationsspiel

Seien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zwei Transitionssisteme/Kripkestrukturen mit Knotenmengen V, V'.
Algorithmus:

1. Setze $C_0 = \{V, V'\}, i = 0$ und setze $\varnothing$.
2. Teile C_i in die Mengen mit gleichen Nachfolgern auf, nenne diese $i+1, ..., j$.
3. Durchlaufe nun alle Mengen $i+1, ..., j$ und teile diese erneut nach gleichen Nachfolgern aus den $C_k(k \in \{i+1, ..., j\})$ auf.
4. Wiederhole Schritt 3. solange, bis in einem Schritt die Mengen gleich bleiben. In diesem Moment ist der Algorithmus Stabil. Die so eingeteilten Mengen sind die Knoten, welche bisimilar sind.
5. Setze nun $Z = \varnothing$.
6. Durchlaufe nun die einzelnen Mengen und setze $Z = Z \cup (v_1, v_2)$, für alle Paare aus dieser Menge mit $v_1 \in V, v_2 \in V'$.

In Z sind nun alle Paare, welche bisimilar sind.

16.1 bisimulationsinvariant

Modallogiscke Formeln können bisimulare Formeln nicht unterscheiden.

(1.) $\mathfrak{K}, v \sim \mathfrak{K}', v' \Rightarrow \mathfrak{K}, v \equiv_{ML} \mathfrak{K}', v'$

(2.) $\mathfrak{K}, v \sim_n \mathfrak{K}', v' \Rightarrow \mathfrak{K}, v \equiv^n_{ML} \mathfrak{K}', v'$

Wenn $\mathfrak{K}, v \models \psi$ und $\mathfrak{K}, v \sim \mathfrak{K}', v'$, dann auch $\mathfrak{K}', v' \models \psi$.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

16.2 Abwicklungsinvariant

Eine Formel $\varphi(x)$ heißt invariant unter Abwicklung/abwickungsinvariant, wenn für alle Kripkestrukturen $\mathfrak{K}$ und alle Zustände v für die Abwickung $\mathfrak{T}_{\mathfrak{K},v}$ gilt:

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{K},v} \models \varphi(x) \Leftrightarrow \mathfrak{K} \models \varphi(x)$$

17 Wichtige Formeln

17.1 in Präsikatenlogik (FO)

Die Struktur sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$:

- $x = 0 := \varphi_0(x) := \forall y(x + y = y)$
- $x = 1 := \varphi_1(x) := \forall y(x \cdot y = y)$
- $x|y := \varphi_|(x, y) := \exists z(\neg(z = 0) \wedge x \cdot z = y)$
- $x < y := \phi_<(x, y) := \exists z(\neg(z = 0) \wedge x + z = y)$
- x `Primzahl` $:= \varphi_{prim} := \forall z(z|x \rightarrow (z = x \vee z = 1))$

18 Wichtig?

- Graph stark zusammenhängend
- Graph azyklisch

Index