Aufgabe 1: 7 Punkte

(a) Beweisen $ie (semantisch) die Korrektheit folgender Regeln:

(i)

$$(\wedge \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta}.$$

(ii)

$$(\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}.$$

(iii)

$$(\exists \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}, \text{ wenn } c \text{ in } \Gamma, \Delta \text{ und } \psi(x) \text{ nicht vorkommt.}$$

Zeigen Sie, dass die Bedingung, dass c nicht in Γ, Δ und $\psi(x)$ vorkommt, nicht ausgelassen werden darf.

(b) Sei $|$ der Junktor mit $(\varphi|\psi) \equiv \neg(\varphi \wedge \psi)$. Finden Sie (in Analogie zu $(\wedge \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \wedge)$) Ableitungsregeln $(\Rightarrow |)$ und $(| \Rightarrow)$, welche die Ableitung von Sequenzen der Form $\Gamma, (\psi|\varphi) \Rightarrow \Delta$ bzw. $\Gamma \Rightarrow \Delta, (\psi|\varphi)$ erlauben.

(c) Geben Sie eine Ableitung der Sequenz $\psi, \varphi, (\psi|\varphi) \Rightarrow \varnothing$ an.

Aufgabe 2: 8 Punkte

ψ, φ seien aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) *(i)* $\psi \to (\varphi \to \psi)$ ist eine Tautologie.

(ii) $\psi \to (\varphi \to \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \to \vartheta$.

(iii) $((\psi \to \varphi) \to \psi) \to \varphi$ ist eine Tautologie.

(iv) $(\psi \vee \varphi) \to \vartheta \equiv (\psi \to \vartheta) \vee (\varphi \to \vartheta)$.

(b) Sei $maj_n(X_1, \dots, X_n) := \begin{cases} 1 & |\{i : X_i = 1\}| \geq \frac{n}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_1, \dots, X_n)$ an, welche maj_n definiert.

(c) Welche der folgenden Systeme sind funktional vollständig: $(maj_2, \neg)$, $(\neg maj_3, 1)$, $(maj_3, 0, 1)$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

(a) Formulieren Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Wie verwendet man diesen Satz, um nachzuweisen, dass eine Modellklasse K nicht endlich axiomatisierbar ist?

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse $K := \{(A, E) : E$ ist Äquivalenzrelation auf A, so dass jede Äquivalenzklasse entweder höchstens 13 oder aber unendlich viele Elemente hat $\}$ nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4: 8 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Klassen von $\{f\}$-Strukturen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

$K_1 = \{(A, f) \ : \ f$ ist injektiv aber nicht surjektiv $\}$.

$K_2 = \{(A, f) \in K_1 \ : \ A$ endlich $\}$.

$K_3 =$ die Klasse aller $\{f\}$-Strukturen, welche isomorph sind zu $(\mathbb{N}, f)$, mit $f(n) = n + 1$.

$K_4 =$ die Klasse aller überabzählbaren $\{f\}$-Strukturen.

$K_5 = \{(A, f) \ : $ es gibt ein $a \in A$ und unendlich viele b, so dass $f(b) = a\}$.

$K_6 = \{(A, f) \ : $ für alle $a \in A$ gilt $|\{f^n(a) \ : \ n \in \mathbb{N}\}| \leq 753\}$.

$K_7 =$ die Klasse der endlichen $\{f\}$-Strukturen in K_6.

Aufgabe 5: 6 Punkte

Gegeben sei ein Transitionssystem $T = (S, E_a, E_b, P, Q)$, wobei E_a und E_b zwei zweistellige und P, Q zwei einstellige Relationen seien.

(a) Definieren Sie folgende Mengen mittels FO-Formeln:

(i) Die Menge aller Knotenpaare, die durch einen *bab*-Pfad verbunden sind.

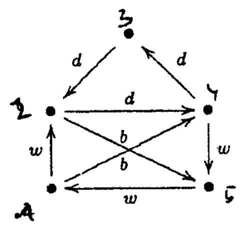
(ii) Die Menge alles Knoten mit (mindestens) zwei mit P beschrifteten a-Vorgängern und (mindestens) zwei mit Q beschrifteten b-Nachfolgern.

(b) Definieren Sie folgende Mengen mittels RA-Ausdrücken:

(i) Die Menge aller Knoten mit zwei a-Vorgängern und einem b-Nachfolger.

(ii) Die Menge aller mit P beschrifteten Knoten, die als mittlere Knoten auf einem *abba*-Pfad auftreten, dessen erster und letzter Knoten mit Q beschriftet ist.

(c) Gegeben sei folgende Version des ***Hauses vom Nikolaus.***



Geben Sie für jede der folgenden Formeln bzw. RA-Ausdrücke, die definierte Menge von Knoten an und beschreiben Sie die Bedeutung der Formeln.

(i) $\varphi(x) := \exists y \exists z (E_d xy \wedge E_d yz \wedge E_d zx \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$.

(ii) $\pi_1 \sigma_{2=3} \sigma_{4=5} \sigma_{6=7} \sigma_{8=1} (E_w \times E_d \times E_w \times E_w)$.

Aufgabe 6: 7 Punkte

Gegeben seien folgende $\{f, g, R\}$-Strukturen:

$$\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, f^{\mathfrak{A}}, g^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}})$$

mit $f^{\mathfrak{A}}(w) := w0, g^{\mathfrak{A}}(w) := w1$ und $R^{\mathfrak{A}} := \{(u,w) \ : \ \text{es gibt ein } v \text{ mit } uv = w\}$.

$$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{B}}, g^{\mathfrak{B}}, R^{\mathfrak{B}}),$$

mit $f^{\mathfrak{B}}(n) = g^{\mathfrak{B}}(n) = n+1$ und $R^{\mathfrak{B}} := \{(a,b) \ : \ a \leq b\}$.

$$\mathfrak{C} := (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{C}}, g^{\mathfrak{C}}, R^{\mathfrak{C}}),$$

mit $f^{\mathfrak{C}}(n) = 2n$, $g^{\mathfrak{C}}(n) = 3n$ und $R^{\mathfrak{C}} := \{(n,m) \ : \ n \text{ teilt } m\} \cup \{(0,0)\}$.

(a) Geben Sie je einen Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ und von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$ an.

(b) Welche dieser Homomorphismen sind starke Homomorphismen, welche Einbettungen?

(c) Gibt es einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ bzw. von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{A}$?

(d) Gibt es echte Substrukturen von $\mathfrak{A}$, welche zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind? Wie viele? Gibt es auch Substrukturen von $\mathfrak{A}$, die nicht zu $\mathfrak{A}$ isomorph sind?

Aufgabe 7: 3 Punkte

Sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und P ein zweistelliges Relationssymbol. Weiterhin sei $\psi := \exists y(Pxy \land fyx = y) \land \forall x \exists y(Pyx \land \neg fzx = y)$.

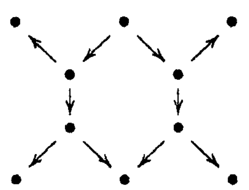
(a) Bilden Sie $\psi[x/fxy, z/y]$.

(b) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.

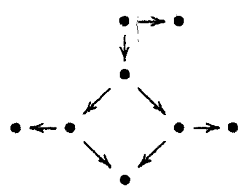
(c) Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 8: 4 Punkte

$\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:



(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spieler I das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt?

(b) Finden Sie einen Satz ψ mit Quantorenrang m, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 9: 3 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{a,b\}, P^{\mathfrak{A}})$, wobei P zweistellig mit $P^{\mathfrak{A}} := \{(a,b),(b,b),(a,a)\}$, sowie $\psi := \exists x(\forall y Pyx \land \exists y \neg Pxy)$ gegeben.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie an. (Gewinnstrategien beginnen an der Wurzel!)

Aufgabe 10: 8 Punkte

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, $\varphi \in FO[\tau]$ ein Satz und $\Phi \subseteq FO[\tau]$ eine Satzmenge. Erklären Sie kurz in Worten die Bedeutung der folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{A} \models \varphi; \qquad \Phi \models \varphi; \qquad \Phi \vdash \varphi.$$

Sind alle drei Beziehungen stets erfüllt, wenn φ allgemeingültig ist?
Sind alle drei Beziehungen stets falsch, wenn φ unerfüllbar ist?

(b) Geben Sie eine Formulierung des Vollständigkeitssatzes für FO an.

(c) Geben Sie eine Formulierung des Kompaktheitssatzes für FO an.

(d) Erläutern Sie, wie der Kompaktheitssatz aus dem Vollständigkeitssatz folgt.

Aufgabe 11: 4 Punkte

Sei ψ eine Konjunktion von AL-Formeln der Form

1. $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \rightarrow (Z_1 \vee Z_2)$
2. $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n \rightarrow 0.$

(a) Ist ψ erfüllbar, wenn

(i) ψ keine Formel des Typs 2 enthält?

(ii) ψ keine Formel des Typs 1 mit $n = 0$ enthält?

Geben Sie gegebenenfalls ein Modell an.

(b) Zeigen Sie mittels Resolution, dass

$$\psi \equiv (X_1 \wedge X_2 \rightarrow Z_1 \vee Z_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_1) \wedge (Z_1 \wedge X_2 \rightarrow 0) \wedge (Z_2 \wedge X_2 \rightarrow 0) \wedge X_2$$

unerfüllbar ist.