Lineare Algebra II

Sarah Horsten
Christoph Halmes

SS 2004

Disclaimer

- Dieses Skript ist eine Mitschrift der Vorlesung "Lineare Algebra II", die von Prof. Dr. Herbert Pahlings im SS 2004 an der RWTH Aachen gelesen wurde.
- Dieses Skript erhebt keinerlei Ansprüche auf Vollständigkeit und/oder Fehlerfreiheit. Insbesondere wurden die (meisten) Beweise nicht mit in das Skript aufgenommen.
- Dieses Skript darf zu nicht-kommerziellen Zwecken frei weitergegeben und kopiert werden.
- Für Schäden, die durch dieses Skript - auch indirekt - entstanden sind, haften die Autoren nicht.
- Wer Fehler findet, kann sie uns an `sarah.horsten@rwth-aachen.de` mailen oder behalten (falls es nur Rächtschraibfehler sind).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Normalformen von Matrizen, Euklidische Ringe, Moduln

1.1 Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

Es sei R ein komm. Ring (hier: immer mit Eins 1), z.B. $R = \mathbb{Z}, R = K[X]$ mit K Körper.

Definition 1.1.1 *(Volle lineare Gruppe)*

$GL_n(R) = \{A \in R^{n\times n} |$ es gibt $A^{-1} \in R^{n\times n}$ mit $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n\}$, wobei $E_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = diag(1, \ldots, 1) \in R^{n\times n}$, die **volle lineare Gruppe über R**.

Beispiel 1.1.1

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin GL_2(\mathbb{Z}), \in GL_2(\mathbb{Q})$
  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \notin \mathbb{Z}^{2\times 2}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$
  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Definition 1.1.2 *((R-)Äquivalenz, (R-)Ähnlichkeit)*

a) $A, B \in R^{m\times n}$ heißen **(R-)äquivalent**, wenn es $P \in GL_m(R)$, $Q \in GL_n(R)$ gibt mit $B = PAQ$.

b) $A, A' \in R^{n\times n}$ heißen **(R-)ähnlich**, wenn es $P \in GL_n(R)$ gibt mit $A' = P^{-1}AP$.

Bemerkung 1.1.1

a) (R-)Äquivalenz und (R-)Ähnlichkeit sind Äquivalenzrelationen.

b) $A, A' \in R^{n\times n}$ ähnlich $\Rightarrow A, A'$ äquivalent

Hintergrund und Motivation 1.1.1

V, W seien K-Vektorräume (K Körper), $dim(V) = n, dim(W) = m$,
$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basisfolgen von V, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basisfolgen von $W, \varphi \in Hom_K(V, W)$

- $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\varphi) = P \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) \cdot Q$ mit $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(id_W) \in GL_n(K)$,
  $Q = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_v) \in GL_n(K)$
  Die Matrizen von φ bzgl. verschiedener Basispaare sind (K-)äquivalent.

- $\varphi \in End_K(V)$
  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

  Beachte:
  $$\begin{array}{ccc} \varphi & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(\varphi) \\ End(V) & \rightarrow & K^{n\times n} \end{array}$$
  ist Algebra-Homomorphismus, d.h. $M_{\mathcal{B}}(\varphi \circ \psi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B}}(\psi)$.

  $M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot P$ mit $P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V) \in GL_n(K)$.
  Matrizen von φ bzgl. verschiedener Basen sind ähnlich.

- Klassifikations- und Normalformenprobleme

  a) Entscheide, ob A, A' R-äquivalent (bzw. R-ähnlich) sind.

  b) Gebe eine Menge $\mathcal{M} \in R^{m\times n}$ ("von Normalformen") an mit der Eigenschaft, dass jedes $A \in R^{m\times n}$ ($A \in R^{n\times n}$) zu genau einer Matrix $Norm(A) \in \mathcal{M}$ R-äquivalent (bzw. R-ähnlich) ist und einen Algorithmus, der $Norm(A)$ berechnet.

  Ist (b) gelöst, so ist damit auch (a) gelöst:
  A, A' äquivalent (bzw. ähnlich) $\Leftrightarrow Norm(A) = Norm(A')$.

Satz 1.1.1

$A, A' \in K^{m\times n}$ sind äquivalent $\Leftrightarrow Rg(A) = Rg(A')$.

Jedes A ist äquivalent zu einer Matrix $Norm(A) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

mit r Einsen, also $r = Rg(A)$.
(Algorithmus: elementare Zeilen- und Spaltenoperationen anwenden.)
$|\mathcal{M}| = Min(m, n) + 1$ ("die 1 wegen der Nullmatrix")

Beweis:

s. LA I

Bemerkung 1.1.2

$A, A' \in K^{n\times n}$
A, A' ähnlich $\Rightarrow$

- $Rg(A) = Rg(A')$
- $det(A) = det(A')$
- $Spur(A) = Spur(A')$
- $\chi_A = \chi_{A'}$
- $\mu_A = \mu_{A'}$

Die Umkehrung gilt nicht!
$\chi_A = det(XE_n - A)$

Definition 1.1.3 *(char. Matrix)*

Ist $A \in K^{n\times n}$, so heißt $XE_n - A \in K[X]^{n\times n}$ **charakteristische Matrix** zu A.

Satz 1.1.2 *(Frobenius)*

Ist K Körper und sind $A, A' \in K^{n\times n}$, so sind A, A' ähnlich in $K^{n\times n} \Leftrightarrow$ $XE_n - A, XE_n - A'$ sind äquivalent in $K[X]^{n\times n}$.

Beweis:

...

Beispiel 1.1.2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$XE_2 - A = \begin{bmatrix} X-1 & 0 \\ -1 & X-2 \end{bmatrix}$
Mit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ gilt:
$P(XE_2 - A) = \begin{bmatrix} X-1 & 0 \\ X-2 & X-2 \end{bmatrix}$, also
$P(XE_2 - A)Q = \begin{bmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & X-2 \end{bmatrix} = XE_2 - A'$.

Lemma 1.1.1

Ist $H \in K[X]^{n\times n}$, so kann man H eindeutig schreiben in der Form
$H = X^r H_r + \ldots + XH_1 + H_0$ mit $H_i \in K^{n\times n}$ und $H_r \neq \underline{0}$, falls $H \neq \underline{0}$.
Ist $A \in K^{n\times n}$, so sei $H(A) = A^r H_r + \ldots + AH_1 + H_0 \in K^{n\times n}$.
$(H = \underline{0}, H(A) = \underline{0})$
$H' \in K[X]^{n\times n}, (H \cdot H')(A) = (H(A) \cdot H')(A)$, wobei $H(A) \cdot H' \in K[X]^{n\times n}$ ist.

<u>Beweis:</u>

...

Beispiel 1.1.3

$$H = \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix} = H' = X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \underline{0}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$H^2 = \begin{bmatrix} X^2 & 0 \\ 0 & X^2 \end{bmatrix} = X^2 E_2 + \underline{0}$$
$$H(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$H(A)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$H^2(A) = A^2 E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq H(A)^2$$

$$\begin{aligned}(H(A) \cdot H)(A) &= (\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})(A) \\ &= (X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})(A) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Corrolar 1.1.1

Ist $(XE_n - A') = F^{-1} \cdot (XE_n - A) \cdot G$ mit $F, G \in GL_n(K[X])$, so ist
$A' = F(A)^{-1} \cdot A \cdot F(A)$.

Fragen 1.1.1

a) Wie stellt man fest, ob $XE_n - A'$ und $XE_n - A$ äquivalent sind?

b) Wie findet man $P, Q \in GL_n(K[X])$ mit $XE_n - A' = P^{-1}(XE_n - A)Q$?

c) Auf welche Form kann man $XE_n - A$ durch Multiplikation (von links und rechts) mit $P^{-1}, Q \in GL_n(K[X])$ bringen?

d) Frage nach Äquivalenz von Matrizen über $K[X]$?

Gleiche Fragen (insbesondere d)) auch interessant für Matrizen aus $\mathbb{Z}^{n\times n}$ statt $K[X]^{n\times n}$.

1.2 Euklidische Ringe

Definition 1.2.1 *(Int.bereich)*

Ein kommutativer Ring R (genauer: $(R, +, \cdot)$) (hier: immer mit 1) heißt **Integritätsbereich** (oder -ring), wenn aus $a, b \in R$ mit $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

Beispiel 1.2.1

$\mathbb{Z}, K[X]$ für K Körper sind Integritätsbereiche.
Ein Teilring (Unterring) R eines Körpers ist ein Integritätsbereich.
$\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ ist kein Integritätsbereich, denn $(2 + 6\mathbb{Z})(3 + 6\mathbb{Z}) = \underline{0}$.
$\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ ist kein Integritätsbereich, falls $m > 1$ und m keine Primzahl ist.

Definition 1.2.2 *($a|b, a \sim b$, Einheit, R^*, irreduzibel)*

Es sei R Integritätsbereich. $a, b \in R$

a) $a|b$ ("a **teilt** b") $\Leftrightarrow b = a \cdot c$ mit einem $c \in R$

b) $a \sim b$ ("a **assoziiert** zu b") $\Leftrightarrow a|b$ und $b|a$

c) a **Einheit** in $R \Leftrightarrow a$ ist invertierbar (oder: $a \sim 1$)
$\mathbf{R}^* = \{a \in R | a \text{ Einheit}\}$

d) a **irreduzibel** $\Leftrightarrow a \neq 0$ und $a \notin R^*$ und $a = b \cdot c \Rightarrow b \in R^*$ oder $c \in R^*$

$(u \in R^*, a \in R \rightsquigarrow a = (au)u^{-1})$

Beispiel 1.2.2

a) Sei $R = \mathbb{Z}$.
Dann:
$2|6$
$2 \sim (-2)$
$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$
a irreduzibel $\Leftrightarrow a$ Primzahl oder $-a$ Primzahl.

b) K Körper, $K^* = K \backslash \{0\}$
$a \neq 0, b \in K \rightsquigarrow a|b$, denn $b = a(a^{-1}b)$

c) K Körper, $R = K[X]$
$R^* = \{f \in K[X] | Grad(f) = 0\} = \{a \in K | a \neq 0\}$
$Grad(f \cdot g) = Grad(f) + Grad(g)$ (Dies impliziert sofort, dass $f \cdot g \neq 0$, denn das Nullpolynom hat keinen Grad.)
$Grad(f) = 1 \Leftrightarrow f = aX + b, a \neq 0, b \in K \Rightarrow f$ irreduzibel, denn sonst $f = g \cdot h \Rightarrow Grad(g) + Grad(h) = 1$
$X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel
$X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ reduzibel, denn $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Definition 1.2.3 *(ggT)*

R sei stets Integritätsbereich, $a, b \in R$.
$R \ni d$ heißt (ein) **größter gemeinsamer Teiler** von a, b (Notation:
$d \in ggT(a, b)$), wenn $d|a$ und $d|b$ und $(z \in R, z|a$ und $z|b) \Rightarrow z|d$.

Beispiel 1.2.3

$a = 4, b = 6, R = \mathbb{Z}$, dann $\overset{+}{-} 2 \in ggT(4,6)$

Bemerkung 1.2.1

Ein ggT von $a, b \in R$ ist, falls er existiert, bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt, denn $d, d' \in ggT(a,b)$, d.h. $d'|a,b$ also $d|d'$ und $d|a,b$ also $d'|d$.
Dann:
$\exists d_1, d_2 \in R$ mit $d' = d \cdot d_1$ und $d = d'd_2$.
Einsetzen liefert:
$d' = d'd_2d_1 \Leftrightarrow d' = (1 - d_2d_1) = 0 \underset{R \text{ Int.bereich}}{\Rightarrow} d_2d_1 = 1 \qquad d_1, d_2 \in R^*$ unter der Annahme, dass $d' \neq 0$, was aber ein trivialer Fall ist.

Definition 1.2.4 *(Euklidischer Ring)*

R heißt **Euklidischer Ring**, wenn R Integritätsbereich ist und
$\delta : R \backslash \{0\} \to \mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (gegeben ist) mit folgender Eigenschaft:
Zu $a, b \in R, b \neq 0$ gibt es stets $q, r \in R$ mit $a = q \cdot b + r$ mit $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(b)$.

Beispiel 1.2.4

a) $(\mathbb{Z}, \delta)$ mit $\delta(a) = |a|$ für $a \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ ist Euklidischer Ring.
$a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$

$\underline{b > 0}$
$\exists q \in \mathbb{Z}$ mit $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$
$q \cdot b \leq a < qb + b$
$0 \leq \delta(r) = r := a - qb < b = |b| = \delta(b)$
$\underline{b < 0}$
analog

b) $R = K$ Körper, $\delta(a) = 1 \; \forall a \in K \backslash \{0\}$
Zu $a, b \in K, b \neq 0$ existiert $q \in R$ mit $a = q \cdot b + 0$

c) $R = K[X], f \in R, f \neq 0, \delta(f) := Grad(f)$
Zu $f \neq 0$ und $g \in R$ existieren $q, r \in K[X]$ mit $g = q \cdot f + r$ und $r = 0$ oder $Grad(r) < Grad(f)$.

$$\begin{array}{lll} g & = X^3 + 2X^2 + 1, f = 2X^2 + 2, & q_1 = \frac{1}{2}X \\ q_1 f & = X^3 + X & \\ g - q_1 f & = 2X^2 - X + 1 & q_2 = 1 \\ q_2 f & = 2X^2 + 2 & \\ g - q_1 f - q_2 f & = -X - 1 = r & \end{array}$$

Ergebnis:
$q = q_1 + q_2 = \frac{1}{2}X + 1$
$g = qf + r, Grad(r) = 1 < 2 = Grad(f)$

d) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist kein euklidischer Ring (s.Ü.).

e) $\mathbb{Z}[X]$ ist kein euklidischer Ring (s. später).

Bemerkung 1.2.2

In der Definition müssen q, r nicht eindeutig sein.

Satz 1.2.1 *(Euklidischer Algorithmus)*

Sei (R, δ) Euklidischer Ring. Zu $a, b \in R$ existiert stets ggT. Ist $b \neq 0$, so erhält man einen ggT von a und b durch folgenden Algorithmus:

$$\begin{array}{lll} a & = q_1 b + r_2 & \delta(r_2) < \delta(b) \in \mathbb{N}_0 \\ b & = q_2 r_2 + r_3 & \delta(r_3) < \delta(r_2) \\ r_2 & = q_3 r_3 + r_4 & \delta(r_4) < \delta(r_3) \\ & \vdots & \vdots \\ r_{n-2} & = q_{n-1} r_{n-1} + r_n & \delta(r_n) < \delta(r_{n-1}) \\ r_{n-1} & = q_n r_n & \end{array}$$

Für ein $1 \leq n \leq \delta(b) + 1$.

Dann ist $r_n \in ggT(a, b)$.

Beweis:

Verfahren bricht nach max. $\delta(b) + 1$ Schritten ab.

...

Satz 1.2.2 *(Erweiterter Euklid. Algorithmus)*

Erweiterter Euklid. Algorithmus
Input: $a, b \in R$, R Euklidischer Ring, $b \neq 0$.
Initialisiere $r_0 := a, r_1 := b, i := 1, \begin{bmatrix} s_0 & t_0 \\ s_1 & t_1 \end{bmatrix} := E_2$
repeat

$r_{i+1} := r_{i-1} - q_i r_i$ mit $r_{i+1} = 0$ oder $\delta(r_{i+1}) < \delta(r_i)$
$s_{i+1} := s_{i-1} - q_i s_i$
$t_{i+1} := t_{i-1} - q_i t_i$
$i := i + 1$

until $r_i = 0$
Output: $d := r_{i-1}$, $s := s_{i-1}$, $t := t_{i-1}$
Dann ist $d \in ggT(a, b)$ und $d = s \cdot a + t \cdot b$.

$$\begin{bmatrix} r_i \\ r_{i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix}}_{Q_i} \begin{bmatrix} r_{i-1} \\ r_i \end{bmatrix} = \underbrace{Q_i \cdot Q_{i-1} \cdot \ldots \cdot Q_1}_{\begin{bmatrix} s_i & t_i \\ s_{i+1} & t_{i+1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$r_i = s_i a + t_i b$

$$\begin{bmatrix} s_i & t_i \\ s_{i+1} & t_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i-1} & t_{i-1} \\ s_i & t_i \end{bmatrix}$$

1.3 Invariantenteiler

Vor: (R, δ) sei Euklid. Ring.

Definition 1.3.1 *(Zeilen-/Spalten-Operationen)*

Es sei $A \in R^{m \times n}$. Man sagt $A' \in R^{m \times n}$ ensteht aus A durch eine **R-elementare Zeilen- (bzw. Spalten)-Operationen**, wenn

a) A' entsteht aus A durch Vertauschung von zwei verschiedenen Zeilen (bzw. Spalten).

b) A' entsteht aus A durch Addition des s-fachen ($s \in R$) einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte).

c) A' entsteht aus A durch Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit $a \in R^*$.

Lemma 1.3.1

Entsteht A‘ aus A durch eine elem. Zeilen- (bzw. Spalten-) Operation, so ex. $Q \in GL_m(R)$ (bzw. $P \in GL_n(R)$) mit $A‘ = QA$ (bzw. $A' = AP$).
Insbesondere gilt: ensteht A‘ aus A durch mehrere Zeilen- und Spaltenoperationen, so sind A, A' äquivalent (Umkehrung gilt auch, später!)

Beweis:

...

Satz 1.3.1

(R, δ) sei Euklid. Ring und $A \in R^{m \times n}$. Dann kann man A durch elem. Zeilen- und Spaltenoperationen auf folgende Form bringen:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \in R^{m \times n}$$

mit $d_1, \ldots, d_r \neq 0, r > 0$ und $d_i \in R^*$, so oBda $d_i = 1$

Beweis:

...

Lemma 1.3.2

(R, δ) sei Euklid. Ring, $0 \neq d \in ggT(a, b), a, b \in R$.
$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen auf die Form $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & \frac{ab}{d} \end{bmatrix}$ bringen.

Beweis:

...

Satz 1.3.2 *(Invariantenteilersatz)*

(R, δ) sei Euklid. Ring, $A \in R^{m \times n}$.
Dann kann man A durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen auf die Form

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_r \end{bmatrix}$$

mit $d_i \neq 0, r \geq 0$ und $d_i | d_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, r-1$ bringen.
(Diese d_i sind (s. Paragraph 4) bis auf Assoziiertheit eindeutig und heißen **Invariantenteiler** von A.)

Beweis:

...

Satz 1.3.3

a) Ist $A \in R^{n \times n}$ und ist A äquivalent zu $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$, so ist $det(A) = u \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ mit $u \in R^*$.

b) Ist $P \in GL_n(R)$ und R Euklid. Ring, so ist P ein Produkt von Elementarmatrizen.

$$(\ V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & 0 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{ij}(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$diag(1, \ldots, 1, u, 1, \ldots, 1)$ mit $u \in R^*$)

c) $A, A' \in R^{m\times n}$ äquivalent $\Leftrightarrow$ A' entsteht aus A durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen.

(Vor.: R Euklid. Ring.)

Beweis:

...

Beispiel 1.3.1

a) $R = \mathbb{Z}, A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$
$\delta(4)$ minimal

$$A \underset{\text{EZ}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \underset{\text{ES}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \underset{\text{ES}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 10 & -22 \end{bmatrix} \underset{\text{EZ}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -22 \end{bmatrix} \underset{\text{EZ}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & -22 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{ES}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 44 \end{bmatrix} \underset{\text{EZ}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 44 \end{bmatrix}$$

Invariantenteiler sind $2, 4$.

b) K Körper, $R = K[X], A = \begin{bmatrix} X-5 & 1 \\ 0 & X-2 \end{bmatrix}$
$\delta(1) = Grad(1) = 0$ minimal unter $Grad(a_{ij})$ mit $a_{ij} \neq 0$.

$$A \underset{\text{ES}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & X-5 \\ X-2 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{ES}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X-2 & -(X-2)(X-5) \end{bmatrix} \underset{\text{EZ}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (X-2)(X-5) \end{bmatrix}$$

$A = XE_2 - C, C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$
$\chi_C = det(A) = u \cdot 1 \cdot (X-2)(X-5), u \in K[X]^* = K/\{0\}$

Bemerkung 1.3.1

Ist $C \in K^{n\times n}$, so ist $\chi_C = u \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$, wobei $d_1, \ldots, d_n \in K[X]$ die Invariantenteiler von $XE_n - C$ sind.

1.4 Eindeutigkeit der Invariantenteiler

Vor.: R sei Euklidischer Ring.

Definition 1.4.1 *(k-Minor)*

Ist $C \in R^{m \times n}$. Ein **k-Minor** ist die Determinante einer $k \times k$-Untermatrix; genauer:
$J_k(l) = \{(i) = (i_1, \ldots, i_k) | 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq l\}$
$(i) \in J_k(m), (j) \in J_k(n)$
$C^{(i)}_{(j)} = \begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & \ldots & c_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i_k j_1} & \ldots & c_{i_k j_k} \end{bmatrix}$
$C = [c_{ij}]$
$\Delta_k(C) = \{det(C^{(i)}_{(j)}) | (i) \in J_k(m), (j) \in J_k(n)\}$
$\Delta_k(C) =$ Menge aller k-Minoren von C
$d_k(C) = ggt(\Delta_k(C))$

Beispiel 1.4.1

$R = \mathbb{Z}, C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$
$\Delta_1(C) = \{0, 4, 5, 7, 12\}, d_1(C) = \{\overset{+}{-} 1\}$
$\Delta_2(C) = \{det \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 12 \end{bmatrix},$
$\quad det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\} = \{4, 0, -28, 60, 48\}, d_2(C) = \{\overset{+}{-} 4\}$
$\Delta_3(C) = \{det \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \; d_3(C) = \{\overset{+}{-} 4 \cdot 12\} = \{\overset{+}{-} 48\}$

Satz 1.4.1

$d_k(C)$ für $C \in R^{m \times n}, k \leq Min\{m, n\}$, ändert sich nicht bei elementaren Zeilen- oder Spaltenoperationen (angewandt auf C).

Beweis:

...

Satz 1.4.2

Es sei R Euklidischer Ring und $C \in R^{m \times n}$. Dann sind die Invariantenteiler von C bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt.
$C, C' \in R^{m \times n}$ äquivalent $\Leftrightarrow C, C'$ haben (bis auf Assoziiertheit) gleiche Invariantenteiler.

Beweis:

...

Beispiel 1.4.2

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \underset{\text{ES}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \underset{\text{ESS}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$4|12$
$d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 12$
$d_1 d_2 = 4 \in d_2(C), d_1 d_2 d_3 = 4 \cdot 12 \in d_3(C)$

1.5 Die rationale kanonische Form

K sei Körper, $A, A' \in K^{n\times n}$.

A, A' ähnlich (d.h. es ex. $P \in GL_n(K)$ mit $P^{-1}AP = A'$)
$\overset{\S\ 1\ (\text{Satz } 2)}{\Leftrightarrow}$ $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind in $K[X]^{n\times n}$ äquivalent
$\overset{\S\ 4\ (\text{Satz } 2)}{\Leftrightarrow}$ die Invariantenteiler von $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind assoziiert
$\Leftrightarrow$ die normierten Invariantenteiler von $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind gleich.

Damit ist das Ähnlichkeitsproblem (s. § 1) gelöst.
($f \in K[X]$ normiert $\Leftrightarrow f = X^m + \ldots + a_1 X + a_0$)
$XE_n - A$ ist äquivalent zu $diag(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_1|d_2|\ldots|d_n$ (d_i Invariantenteiler).
$\chi_A = det(XE_n - A) = ud_1 \cdot \ldots \cdot d_n$ mit $u \in K[X]^* = K\backslash\{0\}$
Da χ_A normiert ist und alle d_i normiert sind

$$\chi_A = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n, d_1|d_2|\ldots|d_n$$

$n = Grad(\chi_A) = Grad(d_1) + \ldots + Grad(d_n)$

Beispiel 1.5.1

$A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}, A' \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$
$\chi_A = (X^2 + 1)(X - 1) = \chi_{A'}$
Invariantenteiler von $XE_n - A$ sind $1, 1, (X^2 + 1)(X - 1)$.
Invariantenteiler von $XE_n - A'$ sind $1, 1, (X^2 + 1)(X - 1)$.
Also A, A' ähnlich.

Satz 1.5.1

a) $A \in K^{n\times n}$ (K Körper) $\Rightarrow A$ ähnlich zu A^T

b) $C \in R^{n\times n}$ (R euklidischer Ring) $\Rightarrow C$ äquivalent zu C^T

Beweis:

...

Nun zum **Normalformenproblem** (s. § 1):

Erinnerung 1.5.1 *(an LA I)*

Ist $g = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1X + a_0$ ein normiertes Polynom in $K[X]$ vom Grad $m \geq 1$, so ist

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{m-1} \end{bmatrix} \in K^{m\times m} \textbf{ Begleitmatrix} \text{ zu } g.$$

(z.B. $A_{X-a} = [a], \chi_{A_g} = \mu_{A_g} = g$)
$XE_m - A_g$ ist äquivalent zu $diag(\underbrace{1,\ldots,1,}_{m-1}g)$ (s. Übung 2).

Satz 1.5.2

Ist K Körper, so ist jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ ähnlich zu genau einer Matrix der Form

$$A_{g_1,\ldots,g_r} = Diag(A_{g_1},\ldots,A_{g_r}) = \begin{bmatrix} A_{g_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{g_r} \end{bmatrix},$$

wobei $A_{g_1},\ldots,A_{g_r}$ Begleitmatrizen zu normierten Polynomen $g_1,\ldots,g_r$ (mit Grad ≥ 1) mit $g_1|\ldots|g_r$.
Dabei sind $g_1,\ldots,g_r$ die von 1 verschiedenen normierten Invariantenteiler von $XE_n - A$. Ferner $g_1\cdot\ldots\cdot g_r = \chi_A$ und $g_r = \mu_A$.

<u>Beweis:</u>

...

Definition 1.5.1 *(rationale kanonische Form (Frobenius'sche Normalform))*

$A_{g_1,\ldots,g_r}$ wie in Satz 2 heißt **rationale kanonische Form** (oder Frobenius'sche Normalform) von A.

Beispiel 1.5.2

$$K = \mathbb{Z}_2, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>gesucht:</u> rationale kanonische Form von A.

$$XE_4 - A = \begin{bmatrix} X+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & X+1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & X+1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & X \end{bmatrix}$$

$$\underset{V'_{13}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & X+1 & 1 \\ 1 & X+1 & 0 & 1 \\ X+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & X \end{bmatrix}$$

$$\underset{A'_{13}(X+1),A'_{14}(1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X+1 & X+1 & 0 \\ X+1 & 0 & X^2 & X \\ 0 & 1 & 1 & X \end{bmatrix}$$

$$\underset{A_{12}(1),A_{13}(X+1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 & X \\ 0 & 1 & 1 & X \end{bmatrix}$$

$$\underset{V_{24}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & X \\ 0 & 0 & X^2 & X \\ 0 & X+1 & X+1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A'_{23}(1),A'_{24}(X)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 & X \\ 0 & X+1 & 0 & X^2+X \end{bmatrix}$$

$$\underset{V'_{34},A_{24}(X+1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & X^2 \\ 0 & 0 & X^2+X & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A'_{34}(X)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^3+X^2 \end{bmatrix}$$

$g_1 = X, g_2 = X^3 + X^2$

$$A_{g_1,g_2} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mu_A = X^3 + X^2 = X^2(X+1)$

<u>Vorteile der rationalen kanonischen Form</u>

a) Leicht zu bestimmen.
Nur elementare Operationen und (ggf.) Euklidischen Algorithmus.

b) Absolut eindeutig.

c) Geht über jedem Körper.

<u>Nachteil:</u> Die rationale kanonische Form ist nicht immer die "einfachste" Form.

Beispiel 1.5.3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$
$\chi_A = (X-1)(X-2) = g_1 = X^2 - 3X + 2$
rationale kanonische Form von A ist $A_{g_1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Dieser Nachteil wird nun umgangen:

1.6 Weierstraß-Normalform und Jordansche Normalform

Satz 1.6.1

Es sei (R, δ) ein euklidischer Ring.
Dann gibt es zu jedem $a \in R\backslash\{0\}$, mit $a \notin R^*$ irreduzible Elemente $p_1, \dots, p_r \in R$ mit $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$.
Ist auch $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ mit $q_i \in R$ irreduzibel, so ist $r = s$ und es gibt Permutation $\sigma \in S_r$ so, dass $p_i = u_i q_{\sigma(i)}$ mit $u_i \in R^*; p_i, q_{\sigma(i)}$ assoziiert.

Beweis:

...

Man sagt: R euklidischer Ring ist **faktoriell**.
$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist nicht faktoriell, da $6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ und $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ irreduzibel.
($\mathbb{Z}[X]$ ist faktoriell, aber nicht euklidisch (ohne Beweis).)

Bemerkung 1.6.1

Für $R = \mathbb{Z}$ (Mittelstufe).

Definition 1.6.1 *(Elementarteiler)*

Es sei R euklidischer Ring, $C \in R^{m\times n}, d_1, \dots, d_r$ seien die von 0 und Einheiten verschiedenen Invariantenteiler.

$d_j = p_1^{m_{j_1}} \cdot \ldots \cdot p_s^{m_{j_s}}$, wobei $p_1, \dots, p_s$ irreduzibel und paarweise nicht assoziiert.

Dann heißen die $p_i^{m_{j_i}} \neq 1$ **Elementarteiler** von C.

Bemerkung 1.6.2

Nach § 4 und Satz 1 sind die Elementarteiler von C bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit eindeutig.

Beispiel 1.6.1

a) $R = \mathbb{Z}, d_1 = 2, d_2 = 4, d_3 = 60$ Invariantenteiler
Elementarteiler $2, 2^2, 2^2, 3, 5$

b) Elementarteiler von $C \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ seien

$$2^2, 3, 3^2, 3^2, 7$$

Invariantenteiler $d_{r-2} = 3, d_{r-1} = 3^2, d_r = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \Rightarrow r = 3$

Satz 1.6.2

K sei Körper. Jedes $A \in K^{n\times n}$ ist ähnlich zu einer Matrix der Form

$$A_{q_1,\ldots,q_s} = Diag(A_{q_1}, \ldots, A_{q_s})$$

mit normierten Polynomen q_i, die Potenzen von irreduziblen Polynomen sind (q_i nicht notwendigerweise (paarweise) verschieden). Die q_i sind die Elementarteiler, der charakteristischen Matrix $XE_n - A$. $A_{q_1,\ldots,q_s}$ ist bis auf Reihenfolge der q_i eindeutig und heißt **Weierstraßsche Normalform** von A.

Beweis:

...

Lemma 1.6.1

Ist $g = f \cdot h \in K[X], 1 \neq f; g, h$ normiert, $1 \in ggT(f, h)$
$\Rightarrow A_g$ ähnlich zu $\begin{bmatrix} A_f & \\ & A_h \end{bmatrix}$

Beweis:

...

Satz 1.6.3

Ist $A \in K^{n\times n}$ und χ_A zerfalle in Linearfaktoren. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix der Form $J(A) = Diag(J_{r_1}(a_1), \ldots, J_{r_s}(a_s))$, wobei $a_1, \ldots, a_s \in K$ nicht notwendigerweise verschieden, $r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{N}$, dabei ist $n = \sum\limits_{i=1}^{s} r_i$,
$\chi_A = \prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{r_i}$.

$$J_r(a) = \begin{bmatrix} a & & & & 0 \\ 1 & a & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & a \end{bmatrix} \in K^{r\times r} \text{ Jordan-Block (oder -Kasten).}$$

$J(A)$ heißt **Jordansche Normalform** von A.

Beweis:

...

Bemerkung 1.6.3

Ist $K = \mathbb{C}$, so existiert zu jedem $A \in K^{n\times n}$ "die" Jordansche Normalform.

Beispiel 1.6.2

a) Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist ähnlich zu einer Matrix der Form
$J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \chi_A = (X - a_1)(X - a_2)$ oder
$J(A) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}, \chi_A = (X - a)^2 = \mu_A$
$\mu_A = \begin{cases} \chi_A & \text{,falls } a_1 \neq a_2 \\ X - a_1 & \text{,sonst} \end{cases}$

b) Jedes $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ist ähnlich zu
$J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}$ oder $J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & 0 \\ & 1 & a_2 \end{bmatrix}$ oder
$J(A) = \begin{bmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ & 1 & a \end{bmatrix}$

Wie berechnet man $J(A)$?
Existiert $J(A)$?

1) Bringe $XE_n - A$ (durch elementare Zeilen- und Spalten-Operationen) auf Diagonalform $diag(1, \dots, 1, \underbrace{g_1, \dots, g_r}_{\in K[X], \text{normiert}})$.

2) Faktorisiere $g_1, \dots, g_r$
$g_i =$ Produkt von $q_j^{m_j}, q_j$ irreduzibel, $Grad(q_j) > 1$, da $J(A)$ sonst nicht existiert; $q_j^{r_j} = (X - a_j)^{r_i}, a_j \in K, r_i \in \mathbb{N}$ Elementarteiler
Für jeden Elementarteiler $(X - a_j)^{r_i}$ füge auf Diagonale $J_{r_j}(a_j)$ ein.

Beispiel 1.6.3

$XE_n - A$ äquivalent zu $diag(1, \dots, 1, \underbrace{X^4 - X^3}_{g_1}, \underbrace{(X - 1)^3}_{g_2})$

$g_1 = X^3(X - 1), g_2 = (X - 1)^3$
Elementarteiler sind $X - 1, (X - 1)^3, X^3$.
$J(A) = Diag(\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix})$

Vorteil:
$J(A)^m$ für beliebiges m berechenbar.
$Diag(Jr_1(a_1), \dots, J_{r_s}(a_s))^m = Diag(J_{r_1}(a_1)^m, \dots, J_{r_s}(a_s)^m)$

$A = J_r(a) = D + N$ mit $D = diag(\underbrace{a, \dots, a}_{s}) = aE_r, N = J_r(0) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$N^2 \underset{\text{(s. Ü. LA I)}}{=} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, N^r = \underline{0}$$

$D \cdot N = N \cdot D = a \cdot N$

$$A^m = (D+N)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} D^j N^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_j N^{m-j}$$

$$A^m = \begin{bmatrix} a^m & & & \\ ma^{m-1} & a^m & & \\ \binom{m}{m-2} a^{m-2} & ma^{m-1} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \binom{m}{m-r+1} a^{m-r+1} \ldots & \binom{m}{m-2} a^{m-2} & ma^{m-1} & a^m \end{bmatrix}$$

$P^{-1}AP = J(A), P \in GL_n(K), A^m = (PJ(A)P^{-1})^m = P \cdot J(A)^m \cdot P^{-1}$

Sei $K = \mathbb{C}$.

Definition 1.6.2 *($exp(A)$)*

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so sei $exp(A) = e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j = lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} A^j$

$$\begin{aligned} A = J_r(a) : \tfrac{1}{m!} A^m &= \sum_{j=m-r+1}^{m} \frac{1}{m!} \binom{m}{j} a^j N^{m-j} \\ &= \sum_{j=m-r+1}^{m} \frac{1}{(m-j)!} \frac{1}{j!} a^j N^{m-j} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m!} a^m & & & \\ \frac{1}{1!} \frac{1}{(m-1)!} a^{m-1} & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{2!} \frac{1}{(m-1)!} a^{m-1} & \frac{1}{m!} a^m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} e^a & & \\ e^a & \ddots & \\ \frac{1}{2} e^a & \ddots & \\ & \ddots & \end{bmatrix}$$

Allgemein: $e^A = Pe^{J(A)}P^{-1}$, falls $P^{-1}AP = J(A)$

<u>Anwendung:</u>
$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Gesucht $y_i : \begin{array}{ccc} K & \to & K \\ t & \mapsto & y_i(t) \end{array}$ diffbar, $y_i = y_i(t), A \in K^{n \times n}$

$y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Ay$ lineares Dgl.-System mit konstanten Koeffizienten.

<u>1. Fall:</u>

Sei $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$.

$$\circledast = \begin{cases} y_1' &= a_1 y_1 \\ y_2' &= a_2 y_2 \\ \vdots & \\ y_n' &= a_n y_n \end{cases} \qquad \text{"entkoppeltes System"}$$

Lösungsraum von $\circledast$ ist $L = \{t \mapsto c_1 \begin{bmatrix} e^{a_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_2 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{a_n t} \end{bmatrix}\}$

Eine Basis des Lösungsraums L finden sie in den Spalten von $e^{Dt}, D = A$.

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

<u>2. Fall:</u>

A allgemein, $A \in K^{n \times n}$.
$y' = Ay$ ist zu lösen.
$z = P^{-1} y$ für $P \in GL_n(K)$
$z' = P^{-1} y' = P^{-1} A y = P^{-1} A P z$
$z' = P^{-1} A P z$
y Lösung von $y' = Ay \Leftrightarrow z$ Lösung von $z' = P^{-1} A P z$.
Wähle $P \in GL_n(K)$ so, dass $P^{-1} A P = J(A)$. ("Entkoppeln")

Sei also oBdA $J(A) = J_r(A) = \begin{bmatrix} a & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & a \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} z_1' &= a z_1 \\ z_2' &= z_1 + a z_2 \\ z_3' &= z_2 + a z_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$e^{J(A)t} = \begin{bmatrix} e^{at} & & & 0 \\ te^{at} & & & \\ \frac{1}{2!} t^2 e^{at} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at} & \ldots & te^{at} & e^{at} \end{bmatrix}$$

Spalten liefern Basis des Lösungsraums von $z' = J(A) \cdot z$.

1.7 Moduln über Ringen, Homomorphiesatz

<u>Vor.:</u> R sei Ring mit 1.

Definition 1.7.1 *(R-Modul)*

Ein **R-Modul** ist eine Menge $\emptyset \neq M$ zusammen mit

$$+ : \begin{array}{ccc} M \times M & \to & M \\ (m_1, m_2) & \mapsto & m_1 + m_2 \end{array}$$
$$\bullet : \begin{array}{ccc} R \times M & \to & M \\ (a, m) & \mapsto & a \cdot m \end{array}$$

(genauer: R-Links-Modul), wobei die Axiome (V1)-(V8) aus LA I gelten.
(V1)-(V4) besagt: $(M, +)$ ist abelsche (d.h. kommutative) Gruppe.
(V5): $(a_1 \cdot a_2) \bullet m = a_1 \bullet (a_2 \bullet m)$
(V6): $1 \bullet m = m$
(V7): $a \bullet (m_1 + m_2) = a \bullet m_1 + a \bullet m_2$
(V8): $(a_1 + a_2) \bullet m = a_1 \bullet m + a_2 \bullet m$
(für alle $m, m_1, m_2 \in M, a, a_1, a_2 \in R$)

Beispiel 1.7.1

a) $R = K$ Körper
R-Modul = K-Vektorraum

b) $R = \mathbb{Z}$
"$\mathbb{Z}$-Modul = abelsche Gruppe (additiv geschrieben)"
Sei $(M, +)$ abelsche Gruppe.
$n \in \mathbb{Z}, v \in M$

$$n \bullet v := \begin{cases} \underbrace{v + v + \ldots + v}_{n} & \text{,falls } n \in \mathbb{N} \\ \underline{0} \in M & ,n = 0 \\ -\underbrace{(v + \ldots + v)}_{-n} & \text{,falls } n < 0 \end{cases}$$

$\bullet : \mathbb{Z} \times M \to M$
Nachrechnen ergibt (V5)-(V8) sind erfüllt.
(V1)-(V4) gelten nach Voraussetzung.
$(M, +, \bullet)$ ist $\mathbb{Z}$-Modul.
Umgekehrt: $(M, +, \bullet)\mathbb{Z}$-Modul $\Rightarrow (M, +)$ ist abelsche Gruppe.

Definition 1.7.2 *(Erzeugnis, Untermodul)*

M sei ein R-Modul (R Ring).
$S = \{v_i | i \in I\} \subseteq M$
$< S >_R = \{\sum\limits_{i \in I} a_i v_i | a_i \in R, a_i \neq 0$ nur für endlich viele $i\}$, der **von S erzeugte Untermodul**.
$M' \subseteq M$ heißt **Untermodul**, wenn $(M', +_{|M' \times M'}, \bullet_{|R \times M'})R$-Modul

$\Leftrightarrow (v, w \in M', a \in R \Rightarrow v + w \in M', \underline{0} \in M', av \in M')$

R sei Ring mit 1. $M R$-Modul.

Definition 1.7.3 *(Basis, freier R-Modul, endlich erzeugt)*

$B \subseteq M$ heißt **Basis** von M, wenn $< B >_R = M$ und $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0, a_i \in R$, $v_i \in B, v_i \neq v_j$ für $i \neq j \Rightarrow a_1 = \ldots = a_m = 0$.
M heißt **freier R**-Modul, wenn M eine Basis hat.
M heißt **endlich erzeugt**, wenn $M =< S >_R$ mit $|S| < \infty$.

Bemerkung 1.7.1

a) $R = K$ Körper $\Rightarrow M K$-Modul ($\hat{=} K$-Vektorraum) hat Basis, also M freier K-Modul.

b) $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}, +_n$ sei Addition modulo n
$(\mathbb{Z}_n, +_n)\mathbb{Z}$-Modul mit $n \bullet x = \underbrace{x +_n \ldots +_n x}_{n} = 0 \; \forall x \in \mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}_n$ hat keine $\mathbb{Z}$-Basis. $\mathbb{Z}_n =< 1 >_{\mathbb{Z}}$
$\mathbb{Z}_n$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

c) $\mathbb{Z}^{n \times 1}$ ist freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
(Dies gilt auch für $R^{n \times 1}$ für beliebigen Ring).

Definition 1.7.4 *(R-linear, Hom_R, R-Isomorphismus,$Kern$, Bild,Nebenklasse)*

$M, M' R$-Moduln, $\varphi : M \to M'$ heißt **R-linear**, wenn

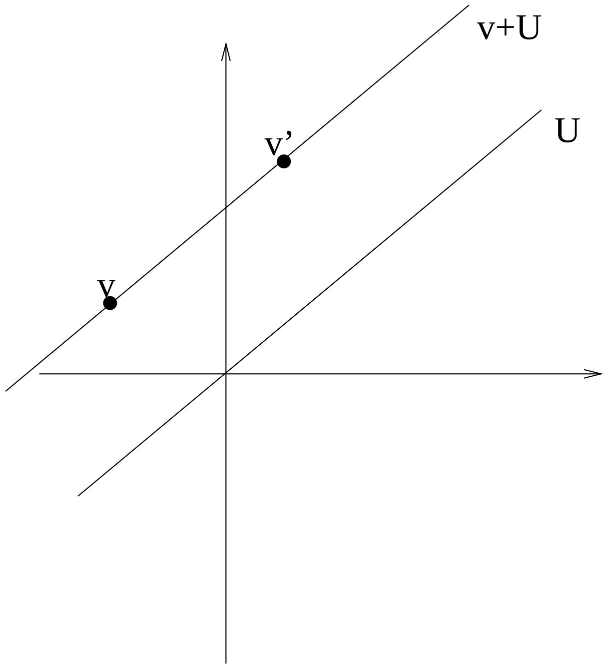
$$\varphi(sm_1 + m_2) = s\varphi(m_1) + \varphi(m_2) \; \forall s \in R, m_1, m_2 \in M$$

$Hom_R(M, M') = \{\varphi : M \to M' | \varphi \; R\text{-linear} \}$
Ist φ zusätzlich bijektiv, so heißt φ **R-Isomorphismus**.
$M \cong_R M' \Leftrightarrow \exists \varphi : M \to M' R$-Isomorphismus
Ist $\varphi \in Hom_R(M, M')$, so sei $Kern(\varphi) = \{v \in M | \varphi(v) = 0\}$,
$Bild(\varphi) = \{\varphi(v) | v \in M\}$.
Ist $U \leq_R M$ $(U R-$Untermodul$)$, $v \in M$, so sei

$v + U = \{v + u | u \in U\}$ **Nebenklasse** (oder Restklasse) (von v) nach U.

Beispiel 1.7.2

$M = \mathbb{R}^2$



Bemerkung 1.7.2

$v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U$

Satz 1.7.1 *(Homomorphiesatz für (R-)Moduln)*

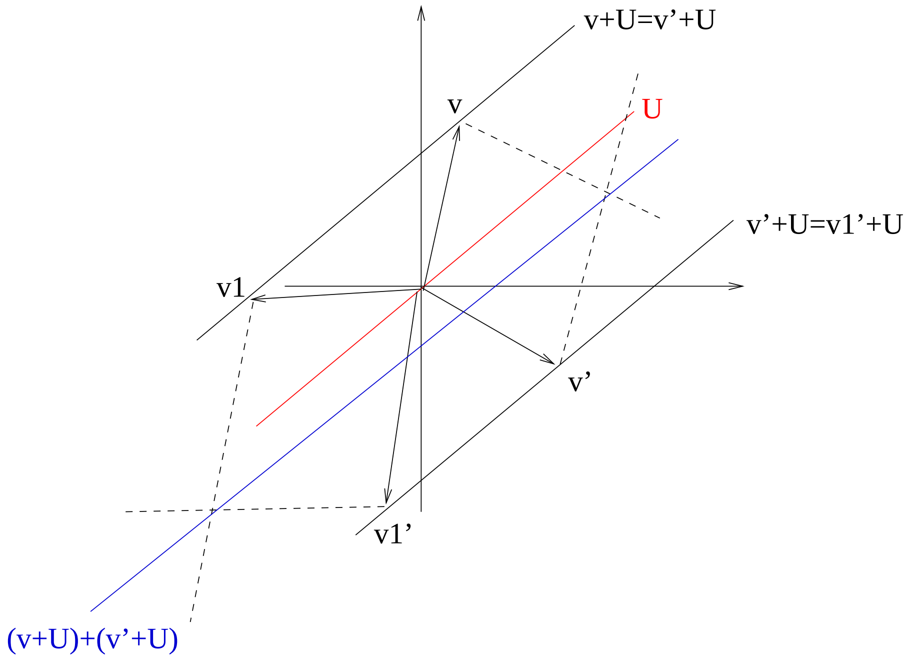
M, M' seien R-Moduln.

a) Ist $U \leq_R M$, so wird $M/U = \{v + U | v \in M\}$ (**Faktormodul** oder Restklassenmodul) zu einem R-Modul mit

$$\begin{aligned}(v + U) \dotplus (v' + U) &:= v + v' + U \\ a \bullet (v + U) &:= a \cdot v + U\end{aligned}$$

und $\pi = \pi_U : \begin{array}{ccc} R & \rightarrow & M/U \\ v & \mapsto & v + U \end{array}$ ist surjektiv R-linear (**R-Epimorphismus**).

b) Sei $\varphi : M \rightarrow M'$ R-linear, so ist $Kern(\varphi) \leq_R M$ und $Bild(\varphi) \leq_R M'$ und $Bild(\varphi) \cong_R M/Kern(\varphi)$
($\varphi(v) \rightarrow v + Kern(\varphi)$ ist Isomorphismus.)



Beweis:

...

Bemerkung 1.7.3

Ist $R = K, V$ K-Vektorraum, $U \leq_K V$, so existiert $U' \leq V$ (Basisergänzungssatz mit $V = U + U'$ und $U \cap U' = \{0\}$; jedes $v \in V$ hat eindeutige Darstellung als $v = u + u'$ mit $u \in U, u' \in U'$).

$v + U = u + u' + U = u' + U$

$$\begin{array}{ccc} V/U & \leftrightarrow & U' \\ u'+U & \leftarrow & u' \end{array} \quad \text{bijektiv}$$

$V/U \cong U'$

Beispiel 1.7.3

a) $M = \mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}, U = \mathbb{Z} \cdot 3 = \{0, \pm 3, \pm 6, \dots\}$

$M/U = \mathbb{Z}_{/\mathbb{Z}\cdot 3} = \{z + 3\mathbb{Z} | z \in \mathbb{Z}\} = \{\underbrace{0 + 3\mathbb{Z}}_{3+3\mathbb{Z}}, 1 + 3\mathbb{Z}, \underbrace{2 + 3\mathbb{Z}}_{-1+3\mathbb{Z}}\}$

b) $M = \mathbb{Z}^{2\times 1}, U =< \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} >_{\mathbb{Z}} = \{\begin{bmatrix} 3a \\ 2b \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}\}, R = \mathbb{Z}$

$M/U = \{0 + U, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + U, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + U, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U\}$

$\overline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U$

$\overline{a} + \overline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + U = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + U$

$3\overline{a} = \overline{a} + \overline{a} + \overline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U$

$4\overline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + U + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + U$

$5\overline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U$

$6\overline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + U$

Also: $M/U = < \overline{a} >$

Definition 1.7.5 *(direkte Summe)*

Sind $M_1, \ldots, M_n$ R-Moduln, so sei $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n := \{(v_1, \ldots, v_n) | v_i \in M_i\}$ (**direkte Summe**) R-Modul mit

$$(v_1, \ldots, v_n) + (v'_1, \ldots, v'_n) := (v_1 + v'_1, \ldots, v_n + v'_n)$$
$$a \in R, a(v_1, \ldots, v_n) := (av_1, \ldots, av_n)$$

z.B. $\mathbb{Z}^{2\times 1} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to (a, b)$

Satz 1.7.2

Jeder endlich erzeugte R-Modul M (mit einem Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$) ist ein homomorphes Bild von $R^n = \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{n} \cong R^{n\times 1}$ ist also (nach Homomorphiesatz) isomorph zu R^n/U für einen Untermodul $U \leq_R R^n$.
Ist M frei mit Basis(-folge) $(v_1, \ldots, v_n)$, dann ist $M \cong_R R^n$.

Beweis:

...

Bemerkung 1.7.4

Um alle endlich erzeugten R-Moduln bis auf Isomorphie zu erhalten, braucht man "nur" alle Untermoduln von R^n zu finden.

Satz 1.7.3

Es sei $e_i \in R^{m\times 1}$ und $U = < d_1 e_1, \ldots, d_r e_r >_R \leq R^{m\times 1}$.
Dann ist $R^{m\times 1}/U \cong_R R_{/Rd_1} \oplus \ldots \oplus R_{/Rd_r} \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{m-1}$.

Beweis:

...

Bezeichnung 1.7.1 *(Spaltenmodul)*

Ist $A \in R^{m\times n}$, so sei $SM(A) = < \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} >$ **Spaltenmodul**.
Jeder endlich erzeugte Untermodul von $R^{m\times 1}$ ist von der Form $SM(A)$ mit $A \in R^{m\times n}$ für ein n.

1.8 Moduln über Euklidischen Ringen

R sei euklidischer Ring.

M R-Modul erzeugt von m Elementen $\Rightarrow M \cong_R R^{m\times 1}/U$
$U \leq_R R^{m\times 1}$
Wenn U endlich erzeugt ist (von n Spalten), so ist $U = SM(A)$ mit $A \in R^{m\times n}$.

Lemma 1.8.1

a) Ensteht $A' \in R^{m\times n}$ aus $A \in R^{m\times n}$ durch R-elementare Spaltenoperationen (d.h. $A' = AQ, Q \in GL_n(R)$), so ist $SM(A) = SM(A')$.

b) Entsteht $A' \in R^{m\times n}$ aus $A \in R^{m\times n}$ durch R-elementare Zeilenoperationen (d.h. $A' = PA, P \in GL_m(R)$), so ist $R^{m\times 1}/SM(A) \cong_R R^{m\times 1}/SM(A')$.

Beweis:

...

Folgerung 1.8.1

R sei euklidischer Ring, $A \in R^{m\times n}$ beliebig.
$R^{m\times 1}/SM(A) \cong R/_{Rd_1\oplus\ldots\oplus Rd_r\oplus}\underbrace{R\oplus\ldots\oplus R}_{m-r}$ mit
$d_1|\ldots|d_r \neq 0$ Invariantenteiler $\neq 0$ von A.

Beweis:

...

Fragen 1.8.1

Ist jeder Untermodul U von $R^{m\times 1}$ endlich erzeugt?
Im Allgemeinen nein, aber bei euklidischen Ringen doch.

Satz 1.8.1

R sei euklidischer Ring. Ist $U \leq_R R$, so gibt es $d \in R$ mit $U = < d >_R = R\cdot d$.
("Ein euklidischer Ring ist ein **Hauptidealring** (d.h. jedes Ideal in einem euklidischen Ring ist ein Hauptideal).")

Beweis:

...

Bemerkung 1.8.1 *(Ideal, Hauptideal)*

Ein Untermodul eines kommutativen Ringes heißt ein **Ideal**. Ein Untermodul der Form $R \cdot d$ heißt **Hauptideal**. (Ideale sind Kerne von Ringhomomorphismen.)

Satz 1.8.2

R sei euklidischer Ring, $U \leq_R R^m$. Dann hat U eine R-Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ mit $n \leq m$.

Beweis:

...

Satz 1.8.3 *(Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über euklidischen Ringen)*

Ist R euklidischer Ring und M endlich erzeugter R-Modul, so ist

$$M \cong R_{/Rd_1} \oplus \ldots \oplus R_{/Rd_r} \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{s \geq 0}$$

Satz 1.8.4 *(Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen)*

Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zu

$$A = \mathbb{Z}_{/\mathbb{Z}d_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{/\mathbb{Z}d_r} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{s}$$

mit $d_1 | \ldots | d_r \neq 0$ (oBdA $d_i \in \mathbb{N}_{>1}$) und auch isomorph zu

$$\mathbb{Z}_{/\mathbb{Z}q_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{/\mathbb{Z}q_l} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{s}$$

mit Primzahlpotenzen $q_1, \ldots, q_l$.

Beispiel 1.8.1

a) ges.: alle A mit $|A| = 15$
$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}_{/15\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{/3\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/5\mathbb{Z}}$

b) ges.: alle A mit $|A| = 4$
$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$ oder $A \cong \mathbb{Z}_{/4\mathbb{Z}}$

Kapitel 2

Linear- und Bilinearformen

2.1 Dualraum

K Körper, $V K$-Vektorraum.

Definition 2.1.1 *(Dualraum, Linearform)*

Ist VK-Vektorraum, so sei $V^* = Hom_K(V, K)$.V^* heißt **Dualraum** zu V.
(Generell ist $Hom_K(V, W)$ ein K-Vektorraum.)
$\lambda \in V^*$, so heißt λ **Linearform** (oder lineares Funktional).

Lemma 2.1.1

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ K-Basis von V $(dim(V) = n)$, so sei

$$v_j^* \in V^* \text{ def. durch } v_j^*(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Dann ist $(v_1^*, \ldots, v_n^*) = B^*$ eine K-Basis von V^*.

<u>Beweis:</u>

...

$\mathcal{B}^*$ heißt die zu $\mathcal{B}$ **duale Basis** von V^*.

Folgerung 2.1.1

Ist $dim(V) = n < \infty$, so ist $V^* \cong V \cong K^{1\times n}$.

Bemerkung 2.1.1

$M^B_{\{1\}}(\lambda) = [a_1, \ldots, a_n]$, für $\lambda \in V^*$
$\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i^*$

Bemerkung 2.1.2

Ist $dim(V) = \infty$, so ist $V^* \ncong V$.

Beispiel 2.1.1

$V = K^{(\mathbb{N})} = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} |$ mit $a_j \neq 0$ nur für endlich viele $j, a_j \in K\}$
$B = \{e_i | i \in \mathbb{N}\}, e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{\infty}$ Basis von V
Dann ist $V^* \cong K^{\mathbb{N}}$
$\lambda \mapsto (\lambda(e_i))_{i=1}^{\infty}$
Ist $K = \mathbb{Q}$ oder $|K| < \infty$, so ist $K^{(\mathbb{N})}$ abzählbar, $K^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar.

Bemerkung 2.1.3

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V, \lambda \in V^*, \lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i^*$
$(\lambda(v_i) = a_i, i = 1, \ldots, n)$
$Kern(\lambda) = \{\sum_{i=0}^{n} x_i v_i | \underbrace{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0}_{\text{lin. homogene Gleichung}}\}$
Zwei duale Aufgaben:

a) <u>geg.</u>: lin. homogenes Gleichungssytem, also $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in V^*$
<u>ges.</u>: Lösungsraum, also $\bigcap_{i=1}^{m} Kern(\lambda_i)$

b) <u>geg.</u>: Teilraum U von V
<u>ges.</u>: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit $U = \bigcap_{i=1}^{m} Kern(\lambda_i)$

Definition 2.1.2 *(Annihilator)*

Sei $M \subseteq V, V K$-Vektorraum.
$M^0 = \{\lambda \in V^* | \lambda(v) = 0$ für alle $v \in M\} \subseteq V^*$ **Annihilator** von M.

Bemerkung 2.1.4

a) $M^o \leq V^*$

b) $M^0 = < M >^0$

Satz 2.1.1 *(Dualitätssatz)*

Sei $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

a) $U_1 \leq U_2 \leq V \Rightarrow U_2^0 \leq U_1^0 \leq V^*$

b) $dim(U^0) = n - dim(U)$

c) $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$
$(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$

und die Abbildung $\Phi : \begin{array}{ccc} U & \mapsto & U^0 \\ \{U | U \text{ Teilraum von } V\} & \rightarrow & \{\text{Teilräume von } V^*\} \end{array}$
ist bijektiv.

<u>Beweis:</u>

...

Ist $dim(V) = n < \infty$ und $\varphi : V^* \rightarrow V$ Isomorphismus, so ist
$\Phi' : \begin{array}{ccc} U & \rightarrow & \varphi(U^0) \\ \{\text{Teilräume von } V\} & \rightarrow & \{\text{Teilräume von } U\} \end{array}$ Bijektion mit

$$\begin{gathered} U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow \Phi'(U_2) \leq \Phi'(U_1) \\ dim(\Phi'(U)) = n - dim(U) \end{gathered}$$

Beispiel 2.1.2

$\mathbb{Z}_2^{10}$ hat $2^{10} - 1 = 1023$ 9-dimensionale Teilräume.
$\mathbb{Z}_2^{10}$ hat 1023 1-dimensionale Teilräume.

Satz 2.1.2

Es sei $\varphi : V \rightarrow W$ K-lineare Abbildung. Dann ist die Abbildung $\varphi^T : \begin{array}{ccc} W^* & \rightarrow & V^* \\ \lambda & \mapsto & \lambda \circ \varphi \end{array}$
K-linear ("die zu φ **transponierte Abbildung**").

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\text{phi}"] & W \arrow[d, "\text{lambda}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basisfolge von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ Basisfolge von W und $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, so ist $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(\varphi^T) = A^T$.

<u>Beweis:</u>

...

Bemerkung 2.1.5

Ist $dim(V) = n < \infty$, so erhält man durch Wahl einer Basis von V und der dualen Basis von V^* einen Isomorphismus. Jeder Isomorphismus wird definiert durch eine Basis. Dagegen erhält man einen Isomorphismus $\alpha : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & V^{**} = (V^*)^* \\ v & \mapsto & (\alpha_v : \lambda \rightarrow \lambda(v)) \end{array}$
(α_v "Auswertung an v; V^{**} **Bidualraum**) der unabhängig von jeder Basiswahl ist ("natürlicher Isomorphismus").

2.2 Bilinearformen

Definition 2.2.1 *(Bilinearform)*

Ist V ein K-Vektorraum, so heißt $\Phi : V \times V \to K$ **Bilinearform**, wenn

$$\begin{gathered}\Phi(sv + v', w) = s\Phi(v, w) + \Phi(v', w) \\ \Phi(v, sw + w') = s\Phi(v, w) + \Phi(v, w') \\ \text{für alle } v, w, v', w' \in V, s \in K \text{ gilt.}\end{gathered}$$

Definition 2.2.2 *(Gram-Matrix)*

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, so heißt $M_\mathcal{B}(\Phi) = [\Phi(v_i, v_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$ **Gram-Matrix** (Φ Bilinearform).

Bemerkung 2.2.1

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ wie oben. $A = M_\mathcal{B}(\Phi)$, so ist $\Phi(v, w) = x^T Ay$, wobei $v = \sum x_i v_i, w = \sum y_i v_i, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Bemerkung 2.2.2

Sind $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ Basen von V, $\Phi : V \times V \to K$ Bilinearform

$$M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = P^T \cdot M_\mathcal{B}(\Phi) \cdot P \text{ mit } P = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(id_V) \text{ Basiswechselmatrix.}$$

Definition 2.2.3 *(kongruent)*

$A, A' \in K^{n \times n}$ heißen **kongruent**, wenn es ein $P \in GL_n(K)$ gibt mit

$$A' = P^T AP$$

(Dies ist eine Äquivalenzrelation.)

Beispiel 2.2.1

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ kongruent, aber nicht ähnlich in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ sind ähnlich, aber nicht kongruent.
$(P^T AP)^T = P^T A^T P$, also $A = A^T$ (A symmetrisch) und A, A' kongruent $\Rightarrow A' = A'^T$ (A' symmetrisch).

Folgerung 2.2.1

Ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix $diag(t_1, \dots, t_n)$, so muss A symmetrisch sein ($A^T = A$).

Bemerkung 2.2.3

Ist $\Phi : V \times V \to K$ Bilinearform, so erhält man zu jedem $w \in V$ eine Linearform $\lambda_w : v \mapsto \Phi(v,w)$ und die Abbildung $\lambda : \begin{matrix} w & \mapsto & \lambda_w \\ V & \to & V^* \end{matrix}$ ist lineare Abblidung.
$Bifo(V) = \{\Phi : V \times V \to K | \Phi \text{ Bilinearform } \} \cong Hom_K(V, V^*)$

Definition 2.2.4 *(nicht ausgeartet)*

$\Phi \in Bifo(V)$ heißt **nicht ausgeartet**, wenn aus

$$\Phi(v,w) = 0 \text{ für alle } v \in V \text{ folgt: } w = 0$$

Beispiel 2.2.2

$V = \mathbb{R}^{n\times 1}, \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

a) Φ gegeben durch $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

b) Φ gegeben durch $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$

$\Phi(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$
Φ ist nicht ausgeartet.

Bemerkung 2.2.4

$\Phi : V \times V \to K$ nicht ausgeartet ($dim(V) = n$) $\Leftrightarrow Rang(M_{\mathcal{B}}(\Phi)) = n = dim(V)$.

2.3 Orthogonalität

Definition 2.3.1 *(symmetrisch, alternierend, orthogonal, Orthogonalraum, Radikal, isotrop)*

$\Phi \in Bifo(V)$ heißt **symmetrisch** (bzw. **alternierend**), wenn

$$\Phi(v,w) = \Phi(w,v) \text{ (bzw. } \Phi(v,w) = -\Phi(w,v)) \text{ für alle } v,w \in V \text{ gilt.}$$

$v, w \in V$ heißen **orthogonal bzgl. Φ**, wenn $\Phi(v,w) = 0$.
(Bem.: Φ ist symmetrische Relation.)
$v \perp w$ (v,w orthogonal $\Rightarrow w,v$ orthogonal)
Ist $M \subseteq V$, so sei $M^\perp = \{v \in V | \Phi(v,u) = 0 \; \forall u \in M\} \leq V$ (**Orthogonalraum zu M**).
$V^\perp =: Rad(\Phi) = \{v \in V | \Phi(v,w) = 0 \; \forall w \in V\}$ (**Radikal**)
(Φ nicht ausgeartet, wenn $Rad(\Phi) = \{0\}$.)
$v \in V$ **isotrop** (bzgl. Φ) $\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \Phi(v,v) = 0$.

Bemerkung 2.3.1

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = A$
Φ symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^T$ (A symmetrisch)
Φ alternierend $\Leftrightarrow A^T = -A$ (A schiefsymmetrisch)
Φ nicht ausgeartet $\Leftrightarrow Rg(A) = n$

Beispiel 2.3.1

$V = \mathbb{R}^{n\times 1}, \Phi(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$
$\{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} | x \text{ isotrop } \} = \{x | x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\}$
(Für $n = 3$: Kegel (s. Skizze in der Mitschrift))

Satz 2.3.1

Sei $\Phi : V \times V \to K$ symmetrisch oder alternierend, $dim(V) = n < \infty, U \subseteq V$.

$$dim(U) + dim(U^\perp) = dim(V) + dim(U \cap \underbrace{Rad(\Phi)}_{V^\perp})$$

<u>Beweis:</u>
...

Beispiel 2.3.2

$\Phi(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ ("Lorentz-Metrik")
$U =< \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$
$U^\perp =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$
$Rad(\Phi) = \{0\}$ ($\rightsquigarrow dim(U) + dim(U^\perp) = dim(V)$)
$V \neq U + U^\perp$
$U \cap U^\perp = U$

Corrolar 2.3.1

Es enthalte U keine isotropen Vektoren, oder $\Phi_{|U\times U}$ sei nicht ausgeartet, dann ist

$$V = U + U^\perp \text{ und } U \cap U^\perp = \{0\} \ (V \cong U \oplus U^\perp).$$

<u>Beweis:</u>
...

2.4 Symmetrische Bilinearformen, Orthogonalisierung

Fragen 2.4.1

Wenn $\Phi : V \times V \to K$ symmetrische $Bifo, \mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V, existiert "Orthogonalbasis" $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ mit $M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = diag(t_1, \ldots, t_n)$ (d.h. $\Phi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$)?

Beispiel 2.4.1

Es sei K Körper "der Charakteristik 2", d.h. $1 + 1 = 0 \in K$ (z.B. $K = \mathbb{Z}_2$, Körper aus Übung LA I mit 4 Elementen). Φ gegeben auf $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
$\mathcal{B} = (v_1, v_2), v = x_1 v_1 + x_2 v_2 \in V$

$$\begin{aligned}\Phi(v, v) &= x_1^2 \Phi(v_1, v_1) + x_2^2 \Phi(v_2, v_2) + x_1 x_2 \Phi(v_1, v_2) + x_2 x_1 \Phi(v_2, v_1) \\ &= x_1 x_2 (1 + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Jeder Vektor in V ist isotrop.
Wäre $\mathcal{B}' = (w_1, w_2)$ Orthogonalbasis: $M_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nicht kongruent zu $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Satz 2.4.1

Ist $Char(K) \neq 2$ (d.h. $1+1 \neq 0 \in K$), $dim(V) = n < \infty, \Phi$ symmetrische $Bifo$. Dann existiert Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

$$M_{\mathcal{B}} = diag(t_1, \ldots, t_n)$$

(d.h. $\Phi(v_i, v_j) = \delta_{ij} t_i$)

Beweis:

...

Corrolar 2.4.1

$Char(K) \neq 2, A = A^T \in K^{n \times n} \Rightarrow A$ kongruent zu Diagonalmatrix
$\exists P \in GL_n(K) : P^T A P = diag(t_1, \ldots, t_n)$
(P Basiswechselmatrix)

Fragen 2.4.2

Wie findet man $diag(t_1, \ldots, t_n)$ und P?
Nach Kapitel 1 § 3 Satz 3 ist jedes $P \in GL_n(K)$ Produkt von Elementarmatrizen E_i: $P = E_1 \cdot \ldots \cdot E_r$
A gegeben, $E_r^T \cdot \ldots \cdot E_1^T \cdot A \cdot E_1 \cdot \ldots \cdot E_r$
E_i sind von der Form

i) $D_i(c) = diag(1, \ldots, 1, c, 1 \ldots, 1) = D_i(c)^T, c \neq 0 \in K$ (d.h. $c \in K^*$)
$A \mapsto D_i(c)^T A D_i(c)$
Multipliziere i-te Spalte von A mit c und danach (oder davor) i-te Zeile von A mit c.

ii) $$A_{ij}(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & t & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$
$A_{ij}(t)^T = A_{ji}(t)$
$A \mapsto A_{ij}(t)^T A A_{ij}(t)$
Addiere t-faches der i-ten Spalte zur j-ten Spalte und danach t-faches der i-ten Zeile zur j-ten Zeile.

iii) $$V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = V_{ij}^T$$
$A \mapsto V_{ij}^T A V_{ij}$
Vertausche i-te und j-te Spalte von A, i-te und j-te Zeile von A.

Verfahren:

- "gekoppelte elementare Spalten- und Zeilenoperationen"
- "modifizierter Gaußalgorithmus"
- "quadratische Ergänzung"

Beispiel 2.4.2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$
Vertausche 1. und 3. Spalte und Zeile:
$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$AE_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -9 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A' = E_1^T AE_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$E_1E_2E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$A'E_2E_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{49}{5} & -\frac{7}{5} \\ 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$A'' = E_3^T E_2^T AE_2E_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{49}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$E_1E_2E_3E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$A''' = E_4^T A'' E_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{49}{5} \end{bmatrix}$

$E_1E_2E_3E_4E_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$

$E_5^T A''' E_5 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D = P^T AP$

(Test: die Matrix sollte symmetrisch bleiben)

Definition 2.4.1 *(zu Φ gehörige quadratische Form, Quadrik)*

Ist $\Phi : V \times V \to K$ (symmetrische) $Bifo$, so heißt die Abbildung

$$Q_\Phi : V \to K \text{ mit } Q_\Phi(v) = \Phi(v, v)$$

die **zu Φ gehörige quadratische Form** und für $c \in K$ beliebig

$$Q = \{v \in V | Q_\Phi(v) = c\} \text{ (homogene) } \textbf{Quadrik} \text{ zu } \Phi \text{ (und } c).$$

Beispiel 2.4.3

A wie oben, $V = \mathbb{R}^{3\times 1}, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ Standardbasis, $M_\mathcal{B}(\Phi) = A$

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$Q_\Phi(v) = \Phi(v, v)$

$$= \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= -9x_2x_2 + 5x_3x_3 + 2(-1x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3)$$

$Q = \{v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} | -9x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1\}$
$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) = P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$
$M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$Q = \{v = \sum y_i v_i | \Phi(v,v) = 5y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = 1\}$
$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$
$-9x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = -9(x_2 + s_1x_1 + s_3x_3)^2$
$\rightsquigarrow -2 \cdot 9s_1 = -2, -2 \cdot 9s_3 = 4$
Im neuen Koordinatensystem (v_1, v_2, v_3): hyperbolischer Zylinder (vgl. Mitschrift).

2.5 Symmetrische Bilinearformen über angeordneten Körpern

Definition 2.5.1 *(angeordneter Körper)*

Ein **angeordneter Körper** ist ein Körper K zusammen mit einer Teilmenge $P \subseteq K$ ("Positivitbereich, Positivitätsmenge") mit

i) $K = P \mathbin{\dot\cup} \{0\} \mathbin{\dot\cup} \{-x | x \in P\}$

ii) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P, x \cdot y \in P$

<u>Schreibweise:</u>

- $x > 0 \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x \in P$
- $x > y \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x - y \in P$

Bemerkung 2.5.1

Ist K angeordneter Körper mit Positivbereich P.

a) $x^2 \in P$ für alle $x \in K \backslash \{0\}$

b) $1 \in P$

c) $x \in P \Rightarrow x^{-1} \in P$

Beweis:

...

Bemerkung 2.5.2

a) Ist "$char(K) \neq 0$", d.h. $\exists p \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p} = 0$

$\Rightarrow K$ nicht angeordnet, denn $1 + \ldots + 1 \in P$ und $0 \notin P$

b) In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gibt es nur je einen Positivitätsbereich P mit (i) und (ii), denn in $\mathbb{Q}: n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n, m, m^{-1} \in P, \frac{n}{m} \in P$ und in $\mathbb{R}$:
$P_1 := \{x^2 | x \neq 0\} \subseteq P$ und $\mathbb{R} = P_1 \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} (-P_1)$

c) $\mathbb{C}$ nicht angeordneter Körper, denn
$-1 = i^2 \in P$ für Positivitätsbereich
$1 \in P$ (Widerspruch)

Definition 2.5.2 *(positiv definit, negativ definit)*

$\Phi : V \times V \to K$ (K angeordneter Körper) heißt **positiv definit** (bzw. **negativ definit**, wenn $\Phi(v, v) > 0$ (bzw. $\Phi(v, v) < 0$) für alle $0 \neq v \in V$.

Satz 2.5.1 *(Trägheitssatz von Sylvester)*

Sei $\Phi : V \times V \to K$ symmetrische $Bifo$ (K angeordnet), $dim(V) = n < \infty$. Dann existiert Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = diag(d_1, \ldots, d_p, d'_1, \ldots, d'_q, 0, \ldots, 0)$$

mit $d_i > 0$ und $d'_j < 0$ und p, q sind eindeutig bestimmt.
((p, q) **Signatur**)
Ist $K = \mathbb{R}$, so kann man $d_1 = \ldots = d_p = 1$ und $d'_1 = \ldots = d'_q = -1$ wählen.

Beweis:

...

Beispiel 2.5.1

Seien $n = 2, K = \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $A = M_{\mathcal{B}}(\Phi)$. Dann ist A kongruent zu
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (2, 0), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (0, 2), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (1, 1), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (1, 0), \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (0, 1), \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (0, 0)$
Die Wertepaare hinter den Matrizen sind die Signaturen (der zugehörigen Linearformen). Die zugehörigen Linearformen Φ sind bei den ersten drei Matrizen nicht ausgeartet und bei den letzten drei ausgeartet.

Folgerung 2.5.1

Seien $\Phi : V \times V \to K$ symmetrische $Bifo$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $dim(V) = n < \infty$.

$$\Phi \text{ positiv definit} \Rightarrow det(M_{\mathcal{B}}(\Phi) > 0$$

Klar, falls $\mathcal{B}$ Orthogonalbasis $\mathcal{B}_1$.
$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = P^T M_{\mathcal{B}_1}(\Phi)P, P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1}(id) \in GL_n(K)$
$det(M_{\mathcal{B}}(\Phi)) = \underbrace{(det(P))^2}_{>0} \underbrace{det(M_{\mathcal{B}_1}(\Phi))}_{>0,\text{falls } \Phi \text{ pos. def.}}$
$(det(P^T) = det(P))$

Satz 2.5.2

$\Phi : V \times V \to K$ (K angeordneter Körper) symmetrische $Bifo$
$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = A \in K^{n\times n}$

Φ positiv definit $\Leftrightarrow det(A_k) > 0$ für $k = 1, \ldots, n$ mit $A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}$,
$A = A_n$

Beweis:

...

Folgerung 2.5.2

$\Phi : V \times V \to K$ positiv definit $\Rightarrow \Phi(v,w)^2 \leq \Phi(v,v) \cdot \Phi(w,w)$
mit Gleichheit $\Leftrightarrow (v,w)$ linear abhängig
(Im Fall $K = \mathbb{R}$: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)
Beweis: ...

2.6 Isometriegruppen - orthogonale Gruppen

Definition 2.6.1 *(Isometriegruppe)*

Sei $\Phi : V \times V \to K$ $Bifo$.
$G(\Phi) = \{\varphi \in GL(V) | \Phi(\varphi(v), \varphi(w)) = \Phi(v,w)\ \forall v, w \in V\}$ **Isometriegruppe** zu Φ.
$A \in K^{n\times n}, G(A) = \{F \in GL_n(K) | F^T AF = A\}$
$(GL(V) = \{\varphi \in End(V) | \varphi$ Isomorphismus$\})$
Ist (V, Φ) euklidischer Raum, d.h. Φ symmetrisch, positiv definit, V $\mathbb{R}$-Vektorraum, so heißt $G(\Phi) = O(\Phi) = O(V, \Phi)$ **orthogonale Gruppe**.

Lemma 2.6.1

a) $G(\Phi)$ und $G(A)$ sind Gruppen.

b) $dim(V) = n < \infty$ und $A = M_{\mathcal{B}}(\Phi)$, so ist
$\begin{array}{ccc} G(\Phi) & \to & G(A) \\ \varphi & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(\varphi) \end{array}$ Isomorphismus.

c) Sind $A, A' \in K^{n\times n}$ kongruent, d.h. $\exists P \in GL_n(K)$ mit $A' = P^T AP$, so ist $G(A) \cong G(A')$.
$G(A) = G(c \cdot A)$ für $c \in K, c \neq 0$

d) Ist Φ nicht ausgeartet, $det(A) \neq 0$, $dim(V) < \infty$ so gilt für
$\varphi \in G(\Phi) : det(\varphi) = \overset{+}{-} 1$
$F \in G(A) : det(A) = \overset{+}{-} 1$

<u>Beweis:</u>
...

Definition 2.6.2 *(n-dim. orthogonale Gruppe, n-dim. Lorentzgruppe)*

$D = D_{pqr} = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, n = p + q + r$ (Gram-matrix von $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit Signatur (p, q))
$O_{pqr}(\mathbb{R}) = \{F \in GL_n(K) | F^T D_{pqr} F = D_{pqr}\}$
oBdA $p \geq q$
$O_n(\mathbb{R}) = O_{n00}(\mathbb{R})$ **n-dimensionale orthogonale Gruppe**
$L_n(\mathbb{R}) = O_{(n-1)10}(\mathbb{R})$ **n-dimensionale Lorentzgruppe**

Beispiel 2.6.1

$n = 2$
$O_2(\mathbb{R}) = O_{200}(\mathbb{R})$
$O_{101}(\mathbb{R}) = O_{011}(\mathbb{R})$
$L_2(\mathbb{R})$
$O_{002}(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R})$

<u>Zu $O_2(\mathbb{R})$:</u>
$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ $\mathbb{R}$-Basis von $V, \Phi : V \times V \to \mathbb{R}$
mit $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$1 = \Phi(v_1, v_1) = \Phi(\varphi(v_1), \varphi(v_1)), 0 = \Phi(v_1, v_2) = \Phi(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$
Sei $\varphi \in G(\Phi).M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = F$
(1) $1 = a^2 + b^2$
(2) $1 = c^2 + d^2$
(3) $0 = ac + bd$
vgl. Skizzen in Mitschrift
$cos(\Theta) = \frac{1}{2}(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta})$
$sin(\Theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\Theta} - e^{-i\Theta})$
Aus (3) folgt:
$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$
$F = \begin{bmatrix} a & -eb \\ b & ea \end{bmatrix}$
$e = \overset{+}{-} 1$, weil $det(F) = ad - bc = \overset{+}{-} 1$
<u>Also:</u>
$F = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}$, Drehung um Θ

$F = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & -cos(\Theta) \end{bmatrix}$, Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\frac{\Theta}{2}$
$F^2 = E_2$

Zu $L_2(\mathbb{R})$:
$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ $\mathbb{R}$-Basis von $V, \Phi : V \times V \to \mathbb{R}$
mit $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
$1 = \Phi(v_1, v_1) = \Phi(\varphi(v_1), \varphi(v_1)), 0 = \Phi(v_1, v_2) = \Phi(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$
Sei $\varphi \in G(\Phi).M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = F$
(1) $1 = a^2 - b^2$
(2) $-1 = c^2 - d^2$
(3) $0 = ac - bd$
vgl. Skizzen in Mitschrift
$cosh(\Theta) = \frac{1}{2}(e^{\Theta} + e^{-\Theta})$
$sinh(\Theta) = \frac{1}{2}(e^{\Theta} - e^{-\Theta})$
Aus (3) folgt:
$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$
$F = \begin{bmatrix} a & -eb \\ b & ea \end{bmatrix}$
$e = \pm 1$, weil $det(F) = ad - bc = \pm 1$
Also:
$F = \begin{bmatrix} cosh(\Theta) & sinh(\Theta) \\ sinh(\Theta) & cosh(\Theta) \end{bmatrix}, det = 1$
$F = \begin{bmatrix} -cosh(\Theta) & sinh(\Theta) \\ sinh(\Theta) & -cosh(\Theta) \end{bmatrix}, det = 1$
oder
$F = \begin{bmatrix} cosh(\Theta) & -sinh(\Theta) \\ sinh(\Theta) & -cosh(\Theta) \end{bmatrix}, det = -1$
$F = \begin{bmatrix} -cosh(\Theta) & -sinh(\Theta) \\ sinh(\Theta) & cosh(\Theta) \end{bmatrix}, det = -1$

Satz 2.6.1

Sei (V, Φ) euklidischer n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ positiv definit.
Ist $\varphi \in O(\Phi) \cong O_n(\mathbb{R})$, so existiert ON-Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit
$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = Diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, D(\Theta_1), \ldots, D(\Theta_r)) = D$, wobei
$D(\Theta_i) = \begin{bmatrix} cos(\Theta) & -sin(\Theta) \\ sin(\Theta) & cos(\Theta) \end{bmatrix}, \Theta \notin \mathbb{Z}\pi.$

Beweis:
...

Corrolar 2.6.1

Ist $A \in O_n(\mathbb{R})$ $(A^T A = E)$, so existiert $P \in O_n(\mathbb{R})$ mit $P^{-1}AP = D$ mit D wie in Satz 1.

Lemma 2.6.2

Ist $\varphi \in O(\Phi)$ und $\Phi(v,v) \neq 0\ \forall v \in V \backslash \{0\}$ und $t \in K$ Eigenwert von φ, so ist $t = \pm 1$, denn
$\Phi(\varphi(v), \varphi(v)) = \Phi(v,v)$. Ist $\varphi(v) = tv, v \neq 0$, so ist $\Phi(\varphi(v), \varphi(v)) = t^2 \underbrace{\Phi(v,v)}_{\neq 0} =$

$\underbrace{\Phi(v,v)}_{\neq 0} \rightsquigarrow t^2 = 1$.

Folgerung 2.6.1

Ist (V, Φ) 3-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\varphi \in O(\Phi)$, so ist, falls $det(\varphi) = 1$ ist, φ eine Drehung um Achse $< v_1 >$ mit Drehwinkel Θ, d.h. $\exists$ ON-Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3), M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & D(\Theta) \end{bmatrix}, \Theta \in \mathbb{R}, -\pi \leq \Theta \leq \pi$ (Drehwinkel), oder falls $det(\varphi) = -1$ ist, eine Drehung um die Achse $< v_1 >$ "gefolgt" von einer Spiegelung an $< v_1 >^{\perp}$, d.h. es existiert ON-Basis
$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von V mit $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & D(\Theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & D(\Theta) \end{bmatrix}$

Kapitel 3

Tensorprodukte

3.1 Ko- und Kontravariante Vektoren und Tensorgrößen

Es sei V n-dim. K-Vektorraum mit Basen $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und
$\mathcal{B}' = \mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$.
$V \ni v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i w_i$, wobei die x_i die "alten" Koordinaten und die y_i die "neuen" Koordinaten sind.
Frage: Wie erhält man die y_i aus den x_i?
Mit Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V) = [a_j^i]$

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i v_i$$

Wir schreiben jetzt: $v = \sum_{j=1}^{n} x^j v_j = \sum_{j=1}^{n} y^j w_j$

$$\rightsquigarrow v = \sum_{j=1}^{n} y^j \sum_{i=1}^{n} a_j^i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j) v_i$$

Koeffizientenvergleich: $x^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j$

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^i x^j \text{ mit } [\tilde{a}_j^i] = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id_V) = [a_j^i]^{-1}$$

"**Kontravariantes Transformationsverhalten**" ("über Kreuz")

Es sei jetzt $V^* = Hom(V, K)$ Dualraum zu V.
$\mathcal{B}^* = (v^1, \ldots, v^n)$ sei zu $\mathcal{B}$ duale Basis, also $v^i(v_j) = \delta_{ij}$.
$\mathcal{C}^* = (w^1, \ldots, w^n)$ sei zu $\mathcal{C}$ duale Basis.

$$\lambda \in V^*, \lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i v^i = \sum_{i=1}^{n} y_i w^i, x_i, y_i \in K$$

Definition 3.1.1 *(kontra-, kovariante Vektorgröße)*

V sei n-dim. K-VR.
$\mathfrak{B}$ = Menge aller K-Basen von V.
Eine **kontravariante** (bzw. **kovariante**) **Vektorgröße** ist eine Abbildung $g : \mathfrak{B} \to K^n$ mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Ist } \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{B}, \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n) \in \mathfrak{B}$$
$$\circledast w_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i v_i$$
$$[a_j^i] = A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V), [\tilde{a}_j^i] = A^{-1}$$
$$\text{so ist } g(\mathcal{B}')(i) = g(\mathcal{B}')^i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^i g(\mathcal{B})^j$$
$$(\text{bzw. } g(\mathcal{B}')(j) = g(\mathcal{B}')_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i g(\mathcal{B})_i)$$

Beispiel 3.1.1

a) $v \in V, g_v : \mathfrak{B} \to K^n$

$$g_v(\mathcal{B}) = (x^1, \dots, x^n), \text{ falls } v = \sum_{i=1}^{n} x^i v_i$$

$g_v(\mathcal{B})^i = x^i$
g_v kontravariante Vektorgröße.

b) Sei $\lambda \in V^* = Hom(V, K)$.
$g_\lambda(\mathcal{B}) = (\lambda(v_1), \dots, \lambda(v_n))$

$$g_\lambda(\mathcal{B}')_j = \lambda(w_j) = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \lambda(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_j^i g_\lambda(\mathcal{B})_i$$

g_λ kovariante Vektorgröße.

c) Ist $\Phi : V \times V \to K$ Bilinearform.
$g_\Phi : \mathfrak{B} \to K^{n\times n}$
$g_\Phi(\mathcal{B}) = M_\mathcal{B}(\Phi) = [\Phi(v_i, v_j)]$
$g_\Phi(\mathcal{B})(i,j) = g_\Phi(\mathcal{B})_{ij} = \Phi(v_i, v_j)$
$M_{\mathcal{B}'}(\Phi) = A^T M_\mathcal{B}(\Phi) A$

$$g_\Phi(\mathcal{B}')(i,j) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_i^k \Phi(v_k, v_l) a_j^l$$
$$g_\Phi(\mathcal{B}')_{ij} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_i^k a_j^l g_\Phi(\mathcal{B})_{kl}$$

d) $\varphi \in End(V), g_\varphi : \mathfrak{B} \to K^{n\times n}$
$g_\varphi(\mathcal{B}) = M_\mathcal{B}(\varphi)$

$$g_\varphi(\mathcal{B}')(i,j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_k^i g_\varphi(\mathcal{B})(k,l) a_j^l$$

$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = A^{-1} M_\mathcal{B}(\varphi) A$

$$g_\varphi(\mathcal{B}')_j^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_k^i a_j^l g_\varphi(\mathcal{B})_l^k$$

Definition 3.1.2 *(r-fach kontra-, s-fach kovariante Tensorgröße)*

$\mathfrak{B}$ = Menge der Basen von V (V n-dim. K-Vektorraum). Eine **r-fach kontra-, s-fach kovariante Tensorgröße** (der Stufe $r+s$) ist eine Abbildung

$$g : \mathfrak{B} \to K^{\overbrace{n \times n \times \ldots \times n}^{r+s}} = Abb(\underbrace{\{1,\ldots,n\} \times \ldots \times \{1,\ldots,n\}}_{r+s}, K) \text{ mit}$$

$$g(\mathcal{B}')(i_1,\ldots,i_1,j_1,\ldots,j_s) =: g(\mathcal{B}')^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{n} \sum_{l_1,\ldots,l_s=1}^{n} \tilde{a}^{i_1}_{k_1} \ldots \tilde{a}^{i_r}_{k_r} a^{l_1}_{j_1} \ldots a^{l_s}_{j_s} g(\mathcal{B})^{k_1,\ldots,k_r}_{l_1,\ldots,l_s}$$

Beispiel 3.1.2

c) 2-fach kovariant (Bilinearformen)

d) 1-fach kontra-, 1-fach kovariant (Endomorphismen)

3.2 Tensorprodukte

Definition 3.2.1 *(multilinear)*

$V_1,\ldots,V_m,T$ seien K-Vektorräume oder K-Moduln, wobei K kommutativer Ring. Eine Abbildung $\Phi : V_1 \times \ldots \times V_m \to T$ heißt **multilinear**, wenn $\Phi(v_1,\ldots,v_i+sv_i',\ldots,v_m) = \Phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_m) + s\Phi(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_m)$ für alle $1 \le i \le m$ und alle $v_j, v_j' \in V_j$.

Beispiel 3.2.1

a) $T = K, m = 1$ Linearform
$T = K, m = 2$ Bilinearform (hier: $V_1 = V_2$)

b) Determinantenform $D : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n} \to K$

c) $V_1 = Hom_K(V', V''), V_2 = Hom_K(V, V'), V, V', V''$ K-Vektorräume.
$(\psi, \varphi) \mapsto \psi \circ \varphi$
$V_1 \times V_2 \to V_3 = T = Hom_K(V, V'')$

d) $\mathcal{A}$ sei K-Algebra.
$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
$(a, b) \mapsto a \cdot b$ bilinear

Bemerkung 3.2.1

Ist $\Phi : V_1 \times \ldots \times V_m \to T$ multilinear und $\varphi : T \to W$ K-linear (W K-Modul), so ist $\varphi \circ \Phi$ multilinear.
$\varphi \circ \Phi : V_1 \times \ldots \times V_m \to W$

Satz 3.2.1

Zu gegebenen K-Moduln $W_1,\ldots,W_m$ (K kommutativer Ring) existiert ein K-Modul T und $\tau : W_1 \times \ldots \times W_m \to T$ multilinear, mit folgender "universeller" Eigenschaft $\circledast$:

Zu jeder multilinearen Abbildung
$\Phi : W_1 \times \ldots \times W_m \to W$ (W beliebiger K-Modul) existiert eine (durch Φ)
eindeutig bestimmte lineare Abbildung
$\varphi : T \to W$ (d.h. $\varphi \in Hom_K(T, W)$) mit $\Phi = \varphi \circ \tau$

Also: $\{\Phi : W_1 \times \ldots \times W_m \to W|$ multilinear$\} \leftrightarrow Hom_K(T, K)$ mit $\Phi \mapsto \varphi$, falls $\Phi = \varphi \circ \tau$.

1. Beweis: (nur für endlich dimensionale K-Vektorräume)

...

2. Beweis: (allgemein)

...

Definition 3.2.2 *(Tensorprodukt)*

Sind T, τ wie in Satz 1, so heißt (T, τ) **Tensorprodukt** von $W_1, \ldots, W_m$.
$T =: W_1 \otimes \ldots \otimes W_m, \tau(w_1, \ldots, w_m) = w_1 \otimes \ldots \otimes w_m$.

Satz 3.2.2

Sind $\tau : W_1 \times \ldots \times W_m \to T$ und $\tau' : W_1 \times \ldots \times W_m \to T'$ multilinear mit der universellen Eigenschaft $\circledast$ (d.h. es gilt auch $\exists^1 \varphi' \in Hom(T', W)$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau'$), dann gibt es genau einen Isomorphismus $\psi : T \to T'$ mit $\tau' = \psi \circ \tau$.
("Eindeutigkeit des Tensorproduktes")

Beweis:

...

3.3 Eigenschaften und Beispiele von Tensorprodukten

Vor.: $W_1, \ldots, W_m$ seien K-Moduln, K kommutativer Ring.

Bemerkung 3.3.1

Es gilt in $W_1 \otimes \ldots \otimes W_m = T$:

a) $w_1 \otimes \ldots \otimes w_j + sw'_j \otimes \ldots \otimes w_m$
$= w_1 \otimes \ldots \otimes w_j \otimes \ldots \otimes w_m + sw_1 \otimes \ldots \otimes w'_j \otimes \ldots \otimes w_m$ für $w_j, w'_j \in W_j, s \in K$
("τ multilinear")

b) Ist ein $w_j = 0 \in W_j$, so ist $w_1 \otimes \ldots \otimes w_j \otimes \ldots \otimes w_m = \underline{0} \in T$
Im Allgemeinen gilt die Umkehrung nicht.

c) $T =< w_1 \otimes \ldots \otimes w_m | w_i \in W_i >_K$

d) Ist $< B_j >_K = W_j, B_j$ Erzeugendensystem, so ist
$T =< w_1 \otimes \ldots \otimes w_m | w_i \in B_i, \ldots >_K$

e) Sind in (d) alle B_j Basen, so ist auch $\mathcal{B} = \{(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) | w_i \in B_i\}$ Basis von T.
$dim_K(W_i) = n_i < \infty, dim(T) = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$
(Bem.: Die Angabe der Dimension von W_i impliziert, dass W_i ein Vektorraum ist.)

Warnung: Im Allgemeinen gilt nicht
$W_1 \otimes \ldots \otimes W_m = \{w_1 \otimes \ldots \otimes w_m | w_i \in W_i, 1 \leq i \leq n\}$.
Richtig: $W_1 \otimes \ldots \otimes W_m =< w_1 \otimes \ldots \otimes w_m | \ldots >_K$

Beispiel 3.3.1

$W_1 = K^{m \times 1}, W_2 = K^{n \times 1}, K$ Körper
$\Phi : W_1 \times W_2 \to K^{m \times n}$

$(v, w) \mapsto vw^T = [x_i y_j]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, falls $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Φ bilinear.
Nach Definition (Satz 1 §2)

$$\begin{tikzcd} W1 \times W2 \arrow[rr, "tau"] \arrow[dr, "Phi"'] & & W1 \otimes W2 \arrow[dl, "phi"] \\ & K^{mxn} & \end{tikzcd}$$

existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi : W_1 \otimes W_2 \to K^{m \times n}$ mit
$\varphi(w_1 \otimes w_2) = \Phi(w_1, w_2) = w_1 w_2^T$.
(e_i^j) sei Standardbasis von $W_j, j = 1, 2$.
$\Phi(e_i^1, e_k^2) = E_{ik} = e_i^1 \otimes e_k^2$
$\{E_{ij} | \ldots\}$ Basis von $K^{n \times m}$.
Also: $Bild(\varphi)$ enthält Erzeugendensystem (sogar Basis) von $K^{m \times n}$.
Also φ surjektiv.
Da $dim(W_1 \otimes W_2) = m \cdot n = dim(K^{m \times n})$, ist φ auch injektiv $\Rightarrow \varphi$ Isomorphismus.
Dabei $\varphi : \begin{array}{ccc} K^{m \times 1} \otimes K^{n \times 1} & \to & K^{m \times n} \\ v \otimes w & \mapsto & vw^T \end{array}$

Aber $\{vw^T | v \in K^{m \times 1}, w \in K^{n \times 1}\} \overset{\text{Übung}}{=} \{A \in K^{m \times n} | Rang(A) \leq 1\}$
Ist also $A \in K^{m \times n}$ mit $Rang(A) = r > 1$, so ist
$\varphi^{-1}(A) \in K^{m \times 1} \otimes K^{n \times 1} \backslash \{v \otimes w | v \in K^{m \times 1}, w \in K^{n \times 1}\}$

Beispiel: $m = 2, n = 2$

$$t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in K^{m \times 1} \otimes K^{n \times 1}$$

Dies ist $\neq v \otimes w \; \forall v, w \in K^{2 \times 1}$, denn $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Rang = 2$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$\tau : \begin{array}{ccc} (v,w) & \mapsto & v\otimes w \\ V\times W & \rightarrow & V\otimes W\end{array}$ ist im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel 3.3.2

$K=\mathbb{Z}$
$W_1=\mathbb{Z}_4=\mathbb{Z}_{/4\mathbb{Z}}=<a>_{\mathbb{Z}}, a=1+4\mathbb{Z}$
$W_2=\mathbb{Z}_6=\mathbb{Z}_{/6\mathbb{Z}}=<b>_{\mathbb{Z}}, b=1+6\mathbb{Z}$
In $W_1=\mathbb{Z}_4$ ist $4\cdot a=0$. In $W_2=\mathbb{Z}_6$ ist $6\cdot b=0$.

$$\begin{aligned} W_1\otimes W_2 &= \mathbb{Z}_4\otimes\mathbb{Z}_6\\ &=<a\otimes b>_{\mathbb{Z}}\\ &=\{na\otimes b|n\in\mathbb{Z}\} \text{ nach Bem.3.3.1 (c).}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot(a\otimes b) &= (6-4)(a\otimes b)=6(a\otimes b)-4(a\otimes b)\\ &= a\otimes(6b)-(4a)\otimes b\\ &= a\otimes 0-0\otimes b\\ &\underset{\text{Bem.3.3.1}}{=} \underline{0}-\underline{0}\\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_4\otimes\mathbb{Z}_6=\{0,a\otimes b\}\cong\mathbb{Z}_2$, denn $\mathbb{Z}_4\otimes\mathbb{Z}_6\neq 0$ und $2(a\otimes b)=0$.
$a\otimes b\neq 0$, denn $\Phi : \begin{array}{ccc} W_1\times W_2 & \rightarrow & \mathbb{Z}_2=<c>, c=1+2\mathbb{Z}\\ (i\cdot a, j\cdot b) & \mapsto & i\cdot j\cdot c\end{array}$ bilinear, $\neq 0$ (Nullabbildung).

<u>Regeln:</u>

a) $(sv)\otimes w=v\otimes sw=s(v\otimes w), s\in K, v\in V, w\in W$
$(v+v')\otimes w=v\otimes w+v'\otimes w$
$v\otimes(w+w')=v\otimes w+v\otimes w'$
τ bilinear

b) $0\otimes w=v\otimes 0=\underline{0}\in V\otimes W$
Ist K Körper, so gilt $v\otimes w=\underline{0}\Rightarrow v=0$ oder $w=0$
(denn $v\neq 0, w\neq 0\Rightarrow v,w$ als "Basisvektoren" wählbar,
$v\otimes w$ ist Basisvektor von $V\otimes W$ (Bem.3.3.1 (e))

c) $V=<\mathcal{B}>_K, W=<\mathcal{B}'>_K$
$\Rightarrow V\otimes W=<v\otimes w|v\in\mathcal{B}, w\in\mathcal{B}'>_K$

Beispiel 3.3.3

$K=\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}_n=\{0\}$
$\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}=<a>, a=1+n\mathbb{Z}$, denn $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Z}_n=<\frac{z}{m}\otimes a|z\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}>$
$\frac{z}{m}\otimes a=\frac{nz}{nm}\otimes a=\frac{z}{nm}\otimes na=\frac{z}{nm}\otimes 0=0$

Beispiel 3.3.4

K Körper, V K-Vektorraum, $Bifo(V) = \{\Phi : V \times V \rightarrow K | \Phi \text{ bilinear } \}$,
$dim(V) = n < \infty, V^* = Hom_K(V, K)$ Dualraum

$$\begin{tikzcd}
V^*xV^* \arrow[rr, "tau"] \arrow[dr, "Phi"'] & & V^* \otimes V^* \arrow[dl, "phi"] \\
& Bifo(V) &
\end{tikzcd}$$

Zu jeder bilinearen Abbildung $\Phi : \begin{array}{ccc} V^* \times V^* & \rightarrow & Bifo(V) \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & \lambda * \mu \end{array}$
$\exists^1 \varphi : V^* \otimes V^* \rightarrow Bifo(V)$ mit $\varphi(\lambda \otimes \mu) = \Phi(\lambda, \mu), \varphi$ linear, wobei
$\lambda * \mu(v, w) = \lambda(v) \underbrace{\cdot}_{\in K} \mu(w) \in K, v, w \in V$, bilinear.
$\exists^1 \varphi : V^* \otimes V^* \rightarrow Bifo(V), \varphi$ K-linear, mit $\lambda \otimes \mu = \lambda * \mu$
$dim(V^* \otimes V^*) = n^2 = dim(Bifo(V))$

<u>Es genügt zu zeigen:</u> φ surjektiv
Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V
$\mathcal{B}^* = (v^1, \ldots, v^n)$ zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*
$v^i * v^j(v_k, v_l) = \underbrace{v^i(v_k)}_{\delta_{ik}} \cdot \underbrace{v^j(v_l)}_{\delta_{jl}}$
$M_{\mathcal{B}}(v^i * v^j) = E_{ij} \in K^{n \times n}$

<u>Also:</u>
$Bild(\Phi) \supseteq$ Erzeugendensystem von $Bifo(V)$
$Bild(\Phi) \subseteq Bild(\varphi) \supseteq$ Erzeugendensystem von $Bifo(V)$
also φ surjektiv

Definition 3.3.1 *(Tensoren)*

Es sei V K-Vektorraum. Die Elemente von $T = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{r} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{s}$
heißen r-fach kovariante, s-fach kontravariante **Tensoren** (der Stufe $r+s$) über V.
Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V, \mathcal{B}^* = (v^1, \ldots, v^n)$ zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*.
Jedes $t \in T$ hat eindeutige Darstellung $t = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_s = 1}^{n} \underbrace{x_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}}_{\in K} v^{i_1} \otimes \ldots \otimes v^{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_s}$

Definiert man $g_t : \mathfrak{B} = \{\text{Basen von } V\} \rightarrow K^{\overbrace{n \times \ldots n}_{r+s}}$,
$\mathcal{B} \mapsto g_t(\mathcal{B})(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s) = x_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$
so ist g_t eine r-fach ko-, s-fach kontravariante Tensorgröße gemäß §1.

Satz 3.3.1 *(Assoziativität des Tensorproduktes)*

Es gilt für K-Moduln W_1, W_2, W_3 (K kommutativer Ring):

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Es gibt Isomorphismen mit:} & & \\ (W_1 \otimes W_2) \otimes W_3 & \cong & W_1 \otimes W_2 \otimes W_3 & \cong & W_1 \otimes (W_2 \otimes W_3) \\ (w_1 \otimes w_2) \otimes w_3 & \leftrightarrow & w_1 \otimes w_2 \otimes w_3 & \leftrightarrow & w_1 \otimes (w_2 \otimes w_3) \end{array}$$

Beweis:

...

Gegenbeispiel:

Es gibt im Allgemeinen ($char(K) \neq 2$) keine (K-lineare Abbildung) $\varphi : V \otimes V \to V$, V K-Vektorraum, mit $\varphi(v \otimes w) = v - w$, denn

$v \otimes v \to v - v = 0$

$2v \otimes \frac{1}{2}v \to 2v - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v$

aber $v \otimes v = 2v \otimes \frac{1}{2}v$ und

$0 \neq \frac{3}{2}v$ i.A.

Satz 3.3.2

Sind V, V', W K-Moduln (K kommutativer Ring), so gibt es Isomorphismen

a) $\varphi : V \otimes W \cong W \otimes V$ mit $\varphi(v \otimes w) = w \otimes v$, $v \in V, w \in W$

b) $\varphi : K \otimes W \cong W$ mit $\varphi(s \otimes w) = s \cdot w$, $s \in K, w \in W$

c) $\varphi : (V \oplus V') \otimes W \cong V \otimes W \oplus V' \otimes W$
$\varphi((v, v') \otimes w) = (v \otimes w, v' \otimes w), v \in V, v' \in V', w \in W$

Beweis:

a)
Übung

b)
Übung

c)
Preisaufgabe

3.4 Tensorprodukte von linearen Abbildungen

Satz 3.4.1

Es seien V, W, V', W' K-Moduln, K kommutativer Ring, und $\varphi \in Hom_K(V, V')$ und $\psi \in Hom_K(W, W')$.

a) Es gibt genau eine K-lineare Abbildung

$$\varphi \otimes \psi : \begin{array}{ccc} V \otimes W & \to & V' \otimes W' \\ v \otimes w & \mapsto & \varphi(v) \otimes \psi(w) \end{array}$$

b) Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ K-Basis von $V, \mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_m')$ K-Basis von V', $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_p)$ K-Basis von $W, \mathcal{C}' = (w_1', \dots, w_q')$ K-Basis von W' und
$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = A = [a_{ij}] \in K^{m\times n}$, d.h. $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i'$ und
$M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\psi) = D = [d_{ij}] \in K^{q\times p}$, d.h. $\psi(w_k) = \sum_{j=1}^{q} d_{jk} w_j'$
$\mathcal{B}\otimes\mathcal{C} := (v_1\otimes w_1, \dots, v_1\otimes w_p, \dots, v_n\otimes w_1, \dots, v_n\otimes w_p)$ (lexikographisch geordnet)
$\mathcal{B}'\otimes\mathcal{C}' := (v_1'\otimes w_1', \dots, v_1'\otimes w_q', \dots, v_m'\otimes w_1', \dots, w_m'\otimes w_q')$, dann ist

$$M_{\mathcal{B}'\otimes\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}}(\varphi\otimes\psi) = \underbrace{A\otimes D}_{\text{Kroneckerprodukt}} = \begin{bmatrix} a_{11}D & \dots & a_{1n}D \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}D & \dots & a_{mn}D \end{bmatrix}$$

<u>Beweis:</u>

(a)

Definiere $\Phi : (v, w) \mapsto \varphi(v)\otimes\psi(w)$, Φ bilinear. Die Existenz von $\varphi\otimes\psi$ mit Eigenschaften wie behauptet folgt aus Satz 1 (§2).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{VxW} \arrow[rr, "\mathrm{tau}"] \arrow[dr, "\mathrm{Phi}"'] & & \mathrm{V} \otimes \mathrm{W} \arrow[dl, "\mathrm{phi} \otimes \mathrm{psi}"] \\ & \mathrm{V'} \otimes \mathrm{W'} & \end{tikzcd}$$

(b)

...

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Bemerkung 3.4.1

Bei anderer Anordnung der Basen
$\mathcal{B}'\otimes\tilde{\mathcal{C}} := (v_1\otimes w_1, \dots, v_m\otimes w_1, \dots, v_1\otimes w_p, \dots, v_m\otimes w_p)$
$\mathcal{B}'\otimes\tilde{\mathcal{C}}' := (v_1'\otimes w_1', \dots)$
$M_{\mathcal{B}'\otimes\tilde{\mathcal{C}}'}^{\mathcal{B}\otimes\tilde{\mathcal{C}}}(\varphi\otimes\psi) = D\otimes A$.

Satz 3.4.2

Seien $\varphi : V \to V', \varphi' : V' \to V''$ und
$\psi : W \to W', \psi' : W' \to W''$ K-lineare Abbildungen. Dann gilt:

$$(\varphi'\otimes\psi')\circ(\varphi\otimes\psi) = (\varphi'\circ\varphi)\otimes(\psi'\circ\psi)$$

$$\begin{array}{ccccc} V \otimes W & \overset{\varphi\otimes\psi}{\rightarrow} & V' \otimes W' & \overset{\varphi'\otimes\psi'}{\rightarrow} & V'' \otimes W'' \\ v \otimes w & \mapsto & \varphi(v) \otimes \psi(w) & \mapsto & \varphi'(\varphi(v)) \otimes \psi'(\psi(w)) \\ & & & & \varphi' \circ \varphi(v) \otimes \psi' \circ \psi(w) \end{array}$$

Beweis:

r.S. $(v \otimes w) =$ l.S. $(v \otimes w)$ $\forall v \in V, w \in W$
(Bem.: Abbildungen sind gleich, wenn sie auf einem Erzeugendensystem übereinstimmen.)
$\Rightarrow$ r.S. $=$ l.S.

$\square$

Seien nun V, V', V'', W, W', W'' freie Moduln mit endlichen Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'', \mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$.
$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = A, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(\varphi') = A'$,
$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\psi) = D, M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}''}(\psi) = D'$
$M^{\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'\otimes\mathcal{C}'}(\varphi \otimes \psi) = A \otimes D$

Folgerung 3.4.1

Für $A \in K^{m\times n}, A' \in K^{l\times m}, B \in K^{p\times q}, B' \in K^{k\times p}$ gilt

$(A' \otimes B') \cdot (A \otimes B) = (A' \cdot A) \otimes (B' \cdot B)$, dabei ist $\cdot$ das Matrixprodukt und $\otimes$ das Kroneckerprodukt, also

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in K^{mp\times nq}$$

Satz 3.4.3

Es seien $A \in K^{m\times m}, B \in K^{n\times n}$ (K kommutativer Ring). Dann gilt:

a) Sind A und B invertierbar, so auch $A \otimes B$ und $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

b) $spur(A \otimes B) = spur(A) \cdot spur(B)$

c) $det(A \otimes B) = (det(A))^n (det(B))^m$

d) Falls K Körper: $A \otimes B$ und $B \otimes A$ sind ähnlich.

e) Falls K Körper: Zerfallen die charakteristischen Polynome $\chi_A, \chi_B \in K[X]$ in Linearfaktoren, so ist

$$\chi_{A\otimes B} = \chi_A \otimes \chi_B := \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (X - s_i t_j),$$
$$\text{wobei } \chi_A = \prod_{i=1}^{m}(X - s_i), \chi_B = \prod_{j=1}^{n}(X - t_j)$$

$(A \otimes B \in K^{mn\times mn})$
Beachte: $\chi_A \otimes \chi_B \neq \chi_A \cdot \chi_B$

Bemerkung 3.4.2

In der Algebra lernt man, dass es zu jedem Körper K einen algebraisch abgeschlossenen Körper $\overline{K}$ gibt mit $K \subseteq \overline{K}$.
$A \in K^{m\times m} \subseteq \overline{K}^{m\times m}, B \in K^{n\times n} \subseteq \overline{K}^{n\times n}$
$\Rightarrow$ In (e) kann man die Voraussetzung über χ_A, χ_B weglassen.

Beispiel 3.4.1

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B, det(A) = 1, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\chi_A = \chi_B = X^2 - 3X + 1$
$A \otimes B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
$(A \otimes B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
$\chi_A^2 = X^4 - 6X^3 + \ldots \Rightarrow \chi_{A\otimes B} \neq \chi_A \cdot \chi_A$
$spur(A \otimes B) = 9$
$det(A \otimes B) = 1^2 \cdot 1^2 = 1$

<u>Nebenrechnung:</u>

$$\chi_A = (X - \underbrace{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}_{s_1})(X - \underbrace{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}_{s_2})$$

$$\begin{aligned} \chi_{A\otimes A} &= (X - s_1^2)(X - s_1 s_2)(X - s_2 s_1)(X - s_2^2) \\ &= (X-1)^2(X - \tfrac{1}{2}(7+3\sqrt{5}))(X - \tfrac{1}{2}(7-3\sqrt{5})) \\ &= \ldots \\ &= X^4 - \underbrace{9}_{\text{durch die Spur}} X^3 + 14X^2 + 5X + \underbrace{1}_{\text{durch die Determinante}} \end{aligned}$$

3.5 Das äußere Produkt

V, W seien K-Moduln, K kommutativer Ring.

Definition 3.5.1 *($Alt_r(V,W)$)*

$Alt_r(V,W) = \{\Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r} \to W | \Phi \text{ multilinear}, \underbrace{\Phi(v_1,\ldots,v_r) = 0 \text{ falls } |\{v_1,\ldots,v_r\}| < r}_{\Phi \text{ alternierend}}\}$
(<u>Alternativ:</u> $Alt_r(V,W) = \{\Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r} \to W | \Phi$ multilinear und

$\Phi(w_1,\ldots,w_r) = 0$, falls $\exists i \neq j$ mit $w_i = w_j\}$)

Beispiel 3.5.1

Determinantenform (s. LA I), $V = K^{n\times 1}, W = K, r = n$

$$D(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}) = det[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$$

Bemerkung 3.5.1

Ist $\Phi \in Alt_r(V, W)$, so gilt

$$\Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -\Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r),$$

denn:

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_r) \\ &= \underbrace{\Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_r)}_{=0} + \Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) + \\ &\quad \underbrace{\Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_r)}_{=0} + \Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r) \end{aligned}$$

Satz 3.5.1

Zu $r \in \mathbb{N}$ und V K-Modul (K kommutativer Ring) existieren $\bigwedge^r V = \bigwedge^r(V)$ und $\alpha : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r} \to \bigwedge^r V$ alternierend multilinear, d.h. $\alpha \in Alt_r(V, \bigwedge^r V)$, mit folgender "universeller" Eigenschaft $\circledast$:

Zu jedem $\Phi \in Alt_r(V, W), W$ K-Modul, existiert genau ein $\varphi \in Hom_K(\bigwedge^r V, W)$ mit $\Phi = \varphi \circ \alpha$.

Beweis:

...

Definition 3.5.2 *(r-te äußere Potenz)*

$(\bigwedge^r V, \alpha)$ heißt **r-te äußere Potenz** von V.
Man schreibt: $\alpha(v_1, \ldots, v_r) =: v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$.

Bemerkung 3.5.2

$Alt_r(V, W) \leftrightarrow Hom_K(\bigwedge^r V, w)$

Satz 3.5.2 *(Eindeutigkeit)*

Erfüllen auch $\tilde{\bigwedge}^r V$ und $\begin{array}{ccc} V \times \ldots \times V & \to & \tilde{\bigwedge}^r(V) \\ (w_1, \ldots, w_r) & \mapsto & w_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} w_r \end{array}$ die Bedingung $\circledast$, so existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : \bigwedge^r V \to \tilde{\bigwedge}^r V$ mit $\varphi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = v_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} v_r$.

Beweis:

Genau wie in §2 Satz 2.

Satz 3.5.3

V sei K-Modul. $\bigotimes^r V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r}$

a) Es gibt genau einen Epimorphismus $\varphi : \bigotimes^r V \to \bigwedge^r V$ mit $w_1 \otimes \ldots \otimes w_r \mapsto w_1 \wedge \ldots \wedge w_r$.

b) Es gibt $\psi' : \bigwedge^r V \to \bigotimes^r V, \psi'$ K-linear, mit $w_1 \wedge \ldots \wedge w_r \mapsto \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(r)}$, wobei S_r = symmetrische Gruppe auf $\{1, \ldots, r\}, \varepsilon(\sigma) = \pm 1 = signum(\sigma) \in K$
$Bild(\psi') =< \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma) w_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(r)} | w_1, \ldots, w_r \in V >_K =: \bigotimes_{alt}^r V$

c) Setze $\pi' = \psi' \circ \varphi \in End(\bigotimes^r V)$.
Dann gilt: $\pi'^2 = \pi' \circ \pi' = r!\pi'$

d) Ist K Körper mit $char(K) \not| r!$ (d.h. $r! \neq 0$ in K), so setze $\pi = \frac{1}{r!}\pi'$.
Dann gilt $\pi^2 = \pi$.
$\psi = \frac{1}{r!}\psi'$
$\bigotimes^r V = Bild(\pi) + Kern(\pi) \cong \bigotimes_{alt}^r V \oplus Kern(\pi)$,
$Bild(\pi) \cap Kern(\pi) = \{0\}$ und $\psi : \bigwedge^r V \to \bigotimes_{alt}^r V$ ist ein Isomorphismus mit $\psi^{-1} = \varphi_{| \bigotimes_{alt}^r V}$.

<u>Beweis:</u>

(a)

...

(b)

...

(c)

...

(d)

...

Beispiel 3.5.2

$r = 2, v, w \in V$

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^2 V & \xrightarrow{\sim} & \bigotimes_{alt}^2 V \\ v \wedge w & \mapsto & \frac{1}{2!}(v \otimes w - w \otimes v) \end{array} \quad (\xrightarrow{\sim}\text{: Isomorphismus})$$

Satz 3.5.4

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V (V freier K-Modul), so ist $\bigwedge^r(\mathcal{B}) := \{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ eine K-Basis von $\bigwedge^r V$.
Ist K Körper, so ist $dim_K \bigwedge^r V = \binom{n}{r}$.

<u>Beweis:</u>

...

Corrolar 3.5.1

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ Basis von $V, w_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i v_i, 1 \leq j \leq r, A = [a_j^i] \in K^{n\times r}$, so ist $w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq n} det(A^{i_1\ldots i_r}) v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$ mit $A^{i_1\ldots i_r}$ = Untermatrix von A mit Zeilen(indizes) $i_1, \ldots, i_r$.

Folgerung 3.5.1

Ist in Satz 3.5.4 $r > n$, so ist $\bigwedge^r V = \{0\}$.
(Denn $\bigwedge^r(\mathcal{B}) = \emptyset$.)

Beispiel 3.5.3

a) Sei $dim(V) = n = r, \binom{n}{r} = 1$.
$\bigwedge^n V =< v_1 \wedge \ldots \wedge v_n >, \mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V.
$w_1, \ldots, w_n \in V$ beliebig
$w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = a \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ mit $a \in K$
$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i v_i, a = det(A) = det([a_j^i])$
$w_1, \ldots, w_n$ l.a. $\Leftrightarrow a = 0$
$w_1, \ldots, w_n$ l.u. $\Leftrightarrow w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ mit $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$

b) $r = 2, n = dim(V)$
$dim(\bigwedge^r V) = \binom{n}{2} \overset{!}{=} n \Leftrightarrow n \in \{0, 3\}$
Sei also $n = 3$, K Körper.
$\bigwedge^2 V \cong V$
Wähle feste Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.
$\bigwedge^2(\mathcal{B}) = (v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3)$

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} \bigwedge^2(V) & \to & V \\ v_1 \wedge v_2 & \mapsto & v_3 \\ v_2 \wedge v_3 & \mapsto & v_1 \\ v_3 \wedge v_1 & \mapsto & v_2 \end{array} \quad \text{Isomorphismus.}$$

Definition 3.5.3 *(äußeres Produkt (Vektorprodukt))*

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ sei Basis des K-Vektorraums $V, \varphi_{\mathcal{B}}$ wie oben.
Dann heißt für $v, w \in V$ $v \times w = \varphi_{\mathcal{B}}(v \wedge w)$ **äußeres Produkt** (oder Vektorprodukt oder Kreuzprodukt).

$v = w_1 = \sum_{i_1=1}^{3} a_1^{i_1} v_{i_1}, w = w_2 = \sum_{i_2=1}^{3} a_2^{i_2} v_{i_2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix}$$

$$w_1 \wedge w_2 \underset{\text{Cor.}}{=} det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} v_1 \wedge v_2 + det \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix} v_2 \wedge v_3 + det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix} v_1 \wedge v_3$$

$$w_1 \times w_2 = det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} v_3 + det \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix} v_1 - det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix} v_2$$
$$= \text{"formale Determinante} \begin{bmatrix} v_1 & a_1^1 & a_2^1 \\ v_2 & a_1^2 & a_2^2 \\ v_3 & a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix} \text{entwickelt nach 1. Spalte"}$$

Beispiel 3.5.4

$V = \mathbb{R}^{3\times 1}, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$w_1 \times w_2 = det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} e_1 - det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} e_2 + det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} e_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

Bemerkung 3.5.3

$(w_1 + sw_1') \times w_2 = (w_1 \times w_2) + s(w_1' \times w_2) \;\; s \in K, w_1, w_1' \in V$
$w_1 \times w_2 = -w_2 \times w_1$
w_1, w_2 l.a. $\Rightarrow w_1 \times w_2 = \underline{0}$

Bemerkung 3.5.4

Sei (zusätzlich) $\Phi : V \times V \to K$ symmetrische $Bifo$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ sei ON-Basis. Dann gilt:

a) $\Phi(w_1 \times w_2, w_3) = det[a_j^i], w_j = \sum_{i=1}^{3} a_j^i v_i$

b) $w_1 \times w_2 \in w_1^\perp \wedge w_2^\perp =< w_1, w_2 >^\perp$

c) $(w_1 \times w_2) \times w_3 \in < w_1, w_2 >$
$(w_1 \times w_2) \times w_3 = \Phi(w_1, w_3)w_2 - \Phi(w_2, w_3)w_1$

d) $\times$ ist nicht assoziativ.
$(w_1 \times w_2) \times w_3 \underbrace{- w_1 \times (w_2 \times w_3)}_{(w_2 \times w_3) \times w_1} = (w_1 \times w_3) \times w_2$ oder
$\circledast$ $(w_1 \times w_2) \times w_3 + (w_2 \times w_3) \times w_1 + (w_3 \times w_1) \times w_2 = 0$ (**Jacobi-Gleichung**)
$(V, +, \times)$ ist Beispiel einer "**Lie-Algebra**" (d.h. Assoziativgesetz wird ersetzt durch Jacobi-Identität).

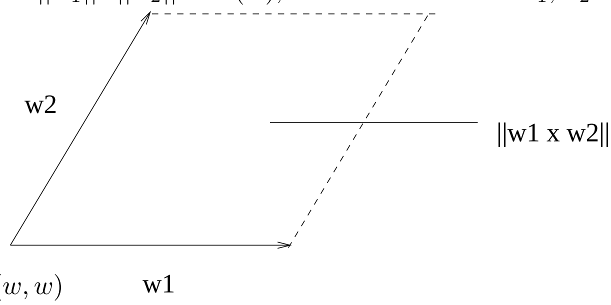
Bemerkung 3.5.5

$(K^{n\times n}, +, [,]), [A, B] := AB - BA$ ist Lie-Algebra.
Vgl. $\circledast, [[A, B], C] + \ldots \overset{\text{Ü.}}{=} 0$

Bemerkung 3.5.6

$\Phi(w_1 \times w_2, w_1 \times w_2) = \Phi(w_1, w_1)\Phi(w_2, w_2) - \Phi(w_1, w_2)^2$

Speziell:
$K = \mathbb{R}$
$||w_1 \times w_2|| = ||w_1|| \cdot ||w_2|| - \Phi(w_1, w_2)$
$\qquad = ||w_1|| \cdot ||w_2|| \cdot sin(\Theta), \Theta$ Winkel zwischen w_1, w_2



$||w||^2 = \Phi(w, w)$

Beweis:
In §6.

Satz 3.5.5

V sei n-dimensionaler K-Vektorraum. Dann gilt:

a) Für $w_1, \ldots, w_r \in W$ gilt: $(w_1, \ldots, w_r)$ l.a. $\Leftrightarrow w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = 0$

b) $< u_1, \ldots, u_r >=< w_1, \ldots, w_r >= U, dim(U) = r$
$\Leftrightarrow w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = au_1 \wedge \ldots \wedge u_r$ mit $a \in K \backslash \{0\}$

Beweis:
(a)
...
(b)
...

Definition 3.5.4 *(Plücker-Koordinaten)*

Ist V K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $U =< u_1, \ldots, u_r >$ Teilraum von V der Dimension r, so heißen die Koordinaten von $u_1 \wedge \ldots \wedge u_r$ bzgl. $\bigwedge^r(\mathcal{B})$ die "**Plücker-Koordinaten**" von U. Sie sind nach Satz 3.5.5 bis auf ein gemeinsames skalares Vielfaches eindeutig bestimmt.

Beispiel 3.5.5

$V = \mathbb{R}^{4 \times 1}, \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$

$$U =< \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} >=< u_1, u_2 >, dim(U) = 2$$

$u_1 \wedge u_2 = (5 - 8)e_1 \wedge e_2 + (-6)e_1 \wedge e_3 + 1 \cdot e_1 \wedge e_4 + \ldots$

Plücker-Koordinaten(U)=$[-3,-6,-1,\ldots,\ldots,\ldots]$
$w_1 = \left[\ \vdots\ \right], w_2 = \left[\ \vdots\ \right]$
Frage: $< w_1, w_2 >= U$?
Antwort: Falls die Plücker-Koordinaten von $< w_1, w_2 >$ ein Vielfaches von denen von U sind, dann Ja.

3.6 Äußeres Produkt von linearen Abbildungen

Satz 3.6.1

Sind V, W K-Moduln (K kommutativer Ring) und $\varphi : V \to W$ K-linear und $r \in \mathbb{N}$,

a) so existiert eindeutig $\bigwedge^r \varphi : \bigwedge^r V \to \bigwedge^r W$ mit
$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \mapsto \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_r)$.

b) Ist $\psi : W \to W'$ K-linear, so ist $\bigwedge^r(\psi \circ \varphi) = \bigwedge^r \psi \circ \bigwedge^r \varphi$.

Beweis:
(a)
...
(b)
...

Es sei nun $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ K-Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ K-Basis von W.
$\varphi : V \to W$ linear, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi) = [a_{ij}] = A \in K^{m \times n}$
$\bigwedge^r(\mathcal{B}) = \{v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_r} | 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_r \leq n\}$ Basis von $\bigwedge^r V$.
$\bigwedge^r(\mathcal{C}) = \{w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_r} | 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_r \leq n\}$ Basis von $\bigwedge^r W$.
lexikographisch geordnet

$$\begin{aligned}
\textstyle\bigwedge^r \varphi(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_r}) &= \varphi(v_{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_{j_r}) \\
&\underset{\text{Corr. zu Satz 3 §5}}{=} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_r \leq m} det(A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}) w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_r} \\
&\text{mit } A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r} = \begin{bmatrix} a^{i_1}_{j_1} & \ldots & a^{i_1}_{j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} & \ldots & a^{i_r}_{j_r} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Also $M^{\bigwedge^r(\mathcal{B})}_{\bigwedge^r(\mathcal{C})}(\bigwedge^r \varphi) = [det(A^{(i)}_{(j)})]_{(i) \in \underline{\underline{\binom{m}{r}}}, (j) \in \underline{\underline{\binom{n}{r}}}} =: \bigwedge^r A$ mit
$\underline{\underline{\binom{m}{r}}} = \{(i) = (i_1 \ldots i_r) | 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_r \leq m\}$,
$\underline{\underline{\binom{n}{r}}} = \{(j) = (j_1 \ldots j_r) | 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_r \leq n\}$

Beispiel 3.6.1

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in K^{2\times 3}$
$\bigwedge^2 A = A \wedge A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \in K^{1\times 3}$
(mit $\binom{m}{r} = \binom{2}{2}$ Zeilen und $\binom{n}{r} = \binom{3}{2}$ Spalten)

Satz 3.6.2

a) Ist $A \in K^{m\times n}, D \in K^{n\times p}$
$\bigwedge^r (A \cdot D) = \bigwedge^r A \cdot \bigwedge^r D$

b) (Cauchy-Binet)
Ist $A \in K^{m\times n}, D \in K^{n\times m}$, dann gilt
$det(A \cdot D) = \sum_{(k)\in \underline{\underline{\binom{n}{m}}}} det(A_{(k)})det(D^{(k)})$
$((k) = (k_1, \ldots, k_m))$
Beachte: $A_{(k)}, D^{(k)} \in K^{m\times m}$

Beweis:

(a)
Folgt direkt aus Satz 3.6.1 (b).

(b)
Folgt aus (a) mit $r = m$.

Bemerkung 3.6.1

Ist in Satz 3.6.2 (b) $n < m$, so ist $\underline{\underline{\binom{n}{m}}} = \emptyset$, also r.S. $\underset{\text{Konvention}}{=}$ 0.
$Rang(\underbrace{A \cdot B}_{\in K^{m\times n}}) \leq Min\{n, m\} = n$

Beispiel 3.6.2

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 7 & 3 \\ \sqrt{2} & 1 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$det(A \cdot D) = -78$, denn

$$\begin{aligned} det(A \cdot D) = det &\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 7 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \underbrace{det \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}_{=0} \\ &+ \underbrace{det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ \sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}}_{=0} det \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 39 \cdot (-2) \\ &= -78 \end{aligned}$$

Folgerung 3.6.1 *(die Wahrheit über die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung (endlich enthüllt :-))*

Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in K, K$ kommutativer Ring.
$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$
Ist $K \subseteq \mathbb{R}$, dann $(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \geq 0$ und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ l.a. ist.

Beweis:

...

Folgerung 3.6.2

$(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{B}$ sei ON-Basis von V (V K-Vektorraum) bzgl. $\Phi : V \times V \to K$.
$v \times w$ sei Vektorprodukt (bzgl. $\mathcal{B}$).
$\Phi(v \times w, v \times w) = \Phi(v, v)\Phi(w, w) - \Phi(v, w)^2$
$v = \sum_{i=1}^{3} x_i v_i, w = \sum_{i=1}^{3} y_i v_i$
$v \times w = det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} v_1 - det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix} v_2 + det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} v_3$
$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$
$\Phi(v \times w, v \times w) \underset{\text{Cauchy-Binet}}{=} det(A \cdot A^T) \underset{\text{direkt ausgerechnet}}{=} det \begin{bmatrix} \Phi(v, v) & \Phi(v, w) \\ \underbrace{\Phi(w, v)}_{=\Phi(v,w)} & \Phi(w, w) \end{bmatrix}$

Satz 3.6.3

Ist $A \in K^{n \times n}$ (K Körper), so ist $\chi_A = det(XE_n - A) = X^n + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r a_r X^{n-r}$
mit $a_r = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \underbrace{det(A^{i_1 \ldots i_r}_{i_1 \ldots i_r})}_{\text{Hauptminoren}}$ mit $A^{i_1 \ldots i_r}_{i_1 \ldots i_r} = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r i_1} & \ldots & a_{i_r i_r} \end{bmatrix}$

Beispiel 3.6.3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\chi_A = X^3 - (1 + 2 - 1)X^2 + (\underbrace{det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=1} + \underbrace{det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=0} + \underbrace{det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=1})X$$
$$+ \underbrace{det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=0}$$

$= X^3 - 2X^2 + 2X$

3.7 Skalarerweiterungen

Es seien $K \subseteq L$ kommutative Ringe (z.B. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}, \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \ldots$).
Ist W ein L-Modul, genauer $W = (W, +, \bullet), \bullet : \begin{array}{ccc} L \times W & \to & W \\ (d, w) & \mapsto & d \cdot w \end{array}$, so wird $W_K = (W, +, \bullet_{|K \times W})$ ein K-Modul (auf K eingeschränkter Modul).

Beispiel 3.7.1

$W =< w_1, w_2 >$ 2-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.
$W_{\mathbb{R}}$ ist 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.
(w_1, iw_1, w_2, iw_2) ist $\mathbb{R}$-Basis.
$\mathbb{C}$ ist 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $(1, i)$.

Satz 3.7.1

Sind $L \supseteq K$ Körper, $dim_K L = m$, und ist W L-Vektorraum mit $dim_L W = n$, so ist W_K K-Vektorraum mit $dim(W_K) = m \cdot n$.

Beweis:

...

Satz 3.7.2

Sind $K \subseteq L$ kommutative Ringe und ist V K-Modul, so wird $L \otimes_K V$ zu L-Modul, wobei gilt $d(c \otimes v) = dc \otimes v, d, c \in L$.
Ist V freier K-Modul mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$, so ist $L \otimes_K V$ freier L-Modul mit Basis $(1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n)$.

Beweis:

...

Kapitel 4

Affine und projektive Räume

4.1 Affine Räume

Definition 4.1.1 *(affiner Raum, Dimension affiner Raum)*

Ein **affiner Raum** $\mathcal{A}$ über dem K-Vektorraum V ist eine nichtleere Menge $\emptyset \neq \mathcal{A}$ mit einer "regulären Operation von V auf $\mathcal{A}$", d.h.

$$\dotplus\colon \begin{array}{ccc} V \times \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (v, P) & \mapsto & v \dotplus P \end{array}$$

mit

i) $0 \dotplus P = P \; \forall P \in \mathcal{A}$

ii) $(v_1 + v_2) \dotplus P = v_1 \dotplus (v_2 \dotplus P) \; \forall v_1, v_2 \in V, P \in \mathcal{A}$

iii) Zu $P, Q \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in V$ mit $Q = v \dotplus P$.

Man schreibt: $v =: \overrightarrow{PQ}$.
Die Dimension von V heißt auch **Dimension von** $\mathcal{A}$.
<u>Exakt:</u> $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V, \dotplus)$ affiner Raum

Bemerkung 4.1.1

Es gilt für einen affinen Raum $(\mathcal{A}, V, \dotplus)$:

a) $\overrightarrow{PP} = \underline{0} \in V \; \forall P \in \mathcal{A}$ (wegen (i))

b) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (wegen (ii))

c) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ (wegen (b))

d) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow Q = R$

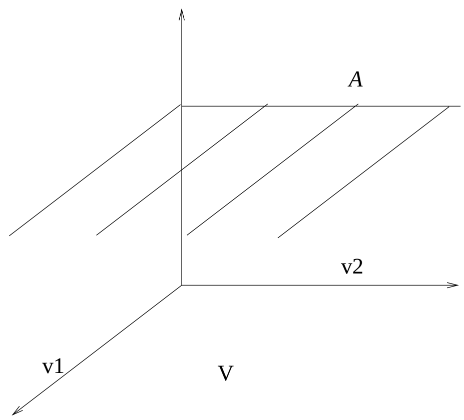
e) Nach Wahl von $P_0 \in \mathcal{A}$ ist $\begin{array}{ccc} v & \mapsto & v + P_0 \\ V & \to & \mathcal{A} \end{array}$ eine Bijektion. (wegen (iii))

$V = \{\overrightarrow{P_0P} | P \in \mathcal{A}\}$

Beispiel 4.1.1

a) Sei V K-Vektorraum.
$\mathcal{A} = (V, V, +)$

b) $V \leq W, w_0 \in W$ beliebig, $\mathcal{A} = w_0 + V = \{w_0 + v = v + w_0 | v \in V\}$
V, W K-Vektorraum
$(\mathcal{A}, V, +_{|V \times \mathcal{A}})$, wobei $+$ die Addition in W ist.



Definition 4.1.2 *(affiner Teilraum)*

Ist $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, V)$ affiner Raum, so heißt $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ **affiner Teilraum**, wenn es ein $P_0 \in \mathcal{A}'$ gibt mit $U := \{\overrightarrow{P_0P} | P \in \mathcal{A}'\}$ ist Teilraum von V.

Bemerkung 4.1.2

Ist $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ affiner Teilraum, so ist $\mathcal{A}'$ affiner Raum über U (s. Def.). Man sieht: Ist $Q_0 \in \mathcal{A}'$, so ist $U = \{\overrightarrow{Q_0P} | P \in \mathcal{A}'\}$, denn $\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{P_0P} - \overrightarrow{P_0Q_0} \in U$.
$\mathcal{A}' = \{u + P_0 | u \in U\}$

Lemma 4.1.1

Sind $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ affine Teilräume von $(\mathcal{A}, V)$ und $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ affiner Teilraum, denn
$P_0 \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'', \mathcal{A}' = \{u' + P_0 | u' \in U'\}, U' = \{\overrightarrow{P_0P'} | P' \in \mathcal{A}'\}$
$\mathcal{A}'' = \{u'' + P_0 | u'' \in U''\}, U'' = \{\overrightarrow{P_0P''} | P'' \in \mathcal{A}''\}$
$\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \{u + P_0 | u \in \underbrace{U' \cap U''}_{\leq V}\}$

Definition 4.1.3 *()*

$P_0, P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}' = \{v + P_0 | v \in < \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m} >\}$ ist affiner Teilraum und $\mathcal{A}' = \bigcap\{\mathcal{A}'' | \mathcal{A}''$ affiner Teilraum und $P_i \in \mathcal{A}''$ für $i = 0, \ldots, m\}$
$\mathcal{A}' = < P_0, \ldots, P_m >_{aff}$

4.2 Affine Abbildungen

Definition 4.2.1 *(affine Abbildung)*

Sind $(\mathcal{A}, V)$ und $(\mathcal{A}', V')$ affine Räume, V, V' K-Vektorräume, so heißt $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ **affine Abbildung**, wenn

i) Für $P, Q \in \mathcal{A}, P_1, Q_1 \in \mathcal{A}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1}$ gilt:

$$\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} = \overrightarrow{\alpha(P_1)\alpha(Q_1)}$$

und

ii) die (gemäß (i) wohldefinierte) Abbildung φ_α: $\begin{array}{ccc} V & \to & V' \\ \overrightarrow{PQ} & \mapsto & \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} \end{array}$

linear ist.

Bemerkung 4.2.1

i) besagt "Paralellogramme werden mit affinen Abbildungen auf Paralellogramme abgebildet."

ii) kann ersetzt werden durch
(ii)' $\varphi_\alpha(s\overrightarrow{PQ}) = s\varphi_\alpha(\overrightarrow{PQ})\ \forall s \in K$, denn
$v = \overrightarrow{PQ}, w = \overrightarrow{QR}, v + w = \overrightarrow{PR}$
$$\left.\begin{array}{r} \varphi_\alpha(v) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} \\ \varphi_\alpha(w) = \overrightarrow{\alpha(Q)\alpha(R)} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_\alpha(v) + \varphi_\alpha(w) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(R)} = \varphi_\alpha(\overrightarrow{PR})$$

(ii)' bedeutet: Affine Abbildungen lassen Teilverhältnisse fest, sofern sie definiert sind.

Definition 4.2.2 *(Teilverhältnis, Mittelpunkt)*

$P, Q, R \in \mathcal{A}, (P \neq Q), \mathcal{A}$ affiner Raum, $\overrightarrow{PR} = s\overrightarrow{PQ}, s \in K$ so heißt
$s = TV(P, Q, R)$ **Teilverhältnis** von R bzgl. P, Q.
Ist $char(K) \neq 2$ und $s = \frac{1}{2}$, so heißt R "**Mittelpunkt**" von P, Q.

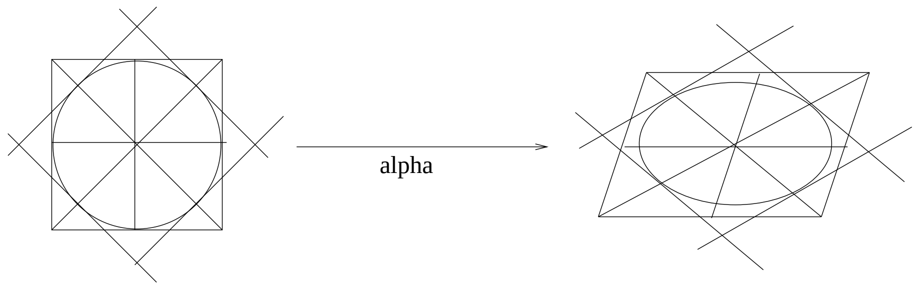
Bemerkung 4.2.2

Affine Abbildungen bilden affine Teilräume auf affine Teilräume ab.

<u>Beweis:</u>
leichte Übung

Beispiel 4.2.1

$\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$



Satz 4.2.1

Sind $(\mathcal{A}, V), (\mathcal{A}', V')$ affine Räume über K, so existiert zu $P_0 \in \mathcal{A}, Q_0 \in \mathcal{A}'$ und $\varphi \in Hom_K(V, V')$ genau eine affine Abbildung $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mit $\alpha(P_0) = Q_0$ und $\varphi_\alpha = \varphi$.

Beweis:

(Eindeutigkeit):

...

(Existenz):

...

Satz 4.2.2

Ist $(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum über $K, char(K) \neq 2, 3$, und (P_1, P_2, P_3) Dreieck in $\mathcal{A}$, d.h. $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}, dim < P_1, P_2, P_3 >_{aff} = 2$, so schneiden sich die "Seitenhalbierenden" $< P_i, M_i >_{aff}$ für $i = 1, 2, 3$ in einem Punkt M und $TV(P_i, M_i, M) = \frac{2}{3}$, wobei

- $M_1 =$ Mittelpunkt P_2, P_3
- $M_2 =$ Mittelpunkt P_3, P_1
- $M_3 =$ Mittelpunkt P_1, P_2

Beweis:

...

Definition 4.2.3 *(affines Koordinatensystem, affiner bzw. inhomogener Koordinatenvektor)*

Ist $(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum über K, so heißt $S = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ ein **affines Koordinatensystem** von $\mathcal{A}$, wenn $P_i \in \mathcal{A}$ für $i = 0, \dots, n$ und $\mathcal{B} = (\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n})$ eine K-Basis von V ist.

Dann $P \in \mathcal{A}$ (beliebig), $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{P_0P_j}$. Dann heißt

$$\kappa_S(P) = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^{n \times 1} \text{ bzw. } \tilde{\kappa}_S(P) = \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^{(n+1) \times 1}$$ **affiner** bzw. **inhomogener Koordinatenvektor** von P bzgl. S.

Lemma 4.2.1

Seien $\alpha : (\mathcal{A}, V) \to (\mathcal{A}', V')$ affine Abbildung, $S = (P_0, \ldots, P_n)$ bzw.
$S' = (Q_0, \ldots, Q_m)$ affine Koordinatensysteme von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$.
$\mathcal{B} = (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ Basis von V, $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{Q_0Q_1}, \ldots, \overrightarrow{Q_0Q_m})$.
Sei $A = [a_{ij}] = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi_\alpha) \in K^{m\times n}$ und $P \in \mathcal{A}$.

$x = \kappa_S(P) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\tilde{x} = \tilde{\kappa}_S(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Dann ist $\kappa_{S'}(\alpha(P)) = Ax + a$ mit $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \kappa_{S'}(\alpha(P_0))$,

$\tilde{\kappa}_{S'}(\alpha(P)) = \tilde{A}\tilde{x}$ mit $\tilde{A} = M^S_{S'}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_m & & & \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \in K^{(m+1)\times(n+1)}$

Beispiel 4.2.2

Eine affine Abbildung $\alpha : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ ist von der Form $x \mapsto Ax + a$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $a \in K^{m\times 1}$.

Satz 4.2.3

Sind $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ und $\beta : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ affine Abbildungen, so ist $\beta \circ \alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ affin.
Sind S, S', S'' affine (endliche) Koordinatensysteme von $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$, so gilt:

$$M^S_{S''}(\beta \circ \alpha) = M^{S'}_{S''}(\beta) \cdot M^S_{S'}(\alpha)$$

<u>Beweis:</u>

Klar, per Definition.

<u>Beispiel:</u>

$M^{S'}_{S''}(\beta) = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & B \end{bmatrix}$, $M^S_{S'}(\alpha) = \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix}$

$\tilde{B} \cdot \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b + Ba & BA \end{bmatrix}$

Definition 4.2.4 *(Affinität)*

Eine **Affinität** ist eine bijektive affine Abbildung.

Beispiel 4.2.3

S affines (endliches) Koordinatensystem von $\mathcal{A}$.

$\kappa_S : \begin{array}{ccc} P & \mapsto & \kappa_S(P) \\ \mathcal{A} & \rightarrow & K^{n\times 1} \end{array}$ ist Affinität.

Satz 4.2.4

Es sei $(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum.

a) $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ ist Affinität $\Leftrightarrow \alpha$ affin und φ_α ist Isomorphismus.

b) $Aff(\mathcal{A}) = \{\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} | \alpha \text{ Affinität}\}$ ist Gruppe bzgl. $\circ$.

c) $$\begin{aligned} T(\mathcal{A}) &= \{\alpha \in Aff(\mathcal{A}) | \varphi_\alpha = id_V\} \leq Aff(\mathcal{A}) \\ &= \{\tau_v : P \mapsto v + P | v \in V\} \\ &\cong (V, +) \end{aligned}$$

"Translationsuntergruppe"

d) Zu jedem $P_0 \in \mathcal{A}$ existiert

$$\begin{aligned} Aff_{P_0}(\mathcal{A}) &= \{\alpha \in Aff(\mathcal{A}) | \alpha(P_0) = P_0\} \leq Aff(\mathcal{A}) \\ &\cong GL(V) \end{aligned}$$

$Aff_{P_0}(\mathcal{A}) \cap T(\mathcal{A}) = \{id\}$
$T(\mathcal{A}) \cdot Aff_{P_0}(\mathcal{A}) = Aff(\mathcal{A})$, d.h. jedes $\alpha \in Aff(\mathcal{A})$ kann man schreiben als $\alpha = \tau \circ \alpha_0$ mit $\alpha_0 \in Aff_{P_0}(\mathcal{A})$ und $\tau \in T(\mathcal{A})$.

e) Ist $S = (P_0, \ldots, P_n)$ affines Koordinatensystem, so ist

$$M : \begin{array}{ccc} \alpha & \mapsto & M_S^S(\alpha) \\ Aff(\mathcal{A}) & \rightarrow & AGL_n(K) := \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a & & A & \end{bmatrix} | A \in GL_n(K), a \in K^{n\times 1}\} \end{array}$$

Dabei ist $M(T(\mathcal{A})) = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & E_n \end{bmatrix} | a \in K^{n\times 1}\}$

$M(Aff_{P_0}(\mathcal{A})) = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} | A \in GL_n(K)\} \cong GL_n(K)$

Beweis:

(a)

...

Rest: einfache Übung

4.3 Affine Klassifikation der Quadriken

Es sei $(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum über K und es sei $char(K) \neq 2$, d.h. $2 = 1 + 1 \neq 0$ in K. Es sei $S = (P_0, \ldots, P_n)$ affines Koordinatensystem von $\mathcal{A}$.

Definition 4.3.1 *(Quadrik, affin äquivalente Quadriken)*

$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$ heißt **Quadrik**, wenn $\mathcal{Q} = \{P | \kappa_S(P) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x$ und $\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0\}}_{\text{quadr. Gleichung } \circledast}$

$a_{ij}, a_i \in K$

Beispiel: $a_{ij} = \delta_{ij}, a_0 = -1$ (1-Sphäre im n-dim.)

Zwei Quadriken $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ heißen **affin äquivalent**, wenn es eine Affinität $\alpha \in Aff(\mathcal{A})$ gibt mit $\mathcal{Q}' = \alpha(\mathcal{Q})$.

Zwei Betrachtungsmöglichkeiten (die äquivalent sind)

a) Suche zu $\mathcal{Q}$ und S wie in der Definition ein Koordinatensystem S' bzgl. der die Gleichung besonders einfach wird.

b) Suche zu $\mathcal{Q}$ und S eine affin äquivalente Quadrik mit einfacherer Gleichung.

Bemerkung 4.3.1

Da $char(K) \neq 2$, kann man oBdA annehmen, dass $a_{ij} = a_{ji}$. Ist $a_{ij} \neq a_{ji}$, so ersetze a_{ij} und a_{ji} durch $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$.

Bemerkung 4.3.2

$$\circledast \Leftrightarrow [x_1, \ldots, x_n][a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + 2[a_1, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow [1, x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0, A = [a_{ij}]$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} = 0 \text{ mit } \tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$\tilde{A}^T = \tilde{A}$, da A symmetrisch.

Nebenrechnung:

$$\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} = \tilde{x}^T \begin{bmatrix} a_0 + a^T x \\ a + Ax \end{bmatrix} = a_0 + \underbrace{a^T x + x^T a}_{2a^T x = 2 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i} + x^T A x$$

Seien S, S' affine Koordinatensysteme.

$\tilde{x} = \tilde{\kappa}_S(P) = M_S^{S'}(id_{\mathcal{A}}) \cdot \tilde{\kappa}_{S'}(P)$

$M_S^S(id_{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c & & C & \end{bmatrix} = \tilde{C}, C \in GL_n(K), c \in K^{n \times 1}$

$\tilde{x} = \tilde{C}\tilde{y}, \tilde{y} = \tilde{\kappa}_{S'}(P)$

$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{A} | \tilde{\kappa}_S(P) = \tilde{x}, \tilde{y}^T(\tilde{C}^T \tilde{A} \tilde{C})\tilde{y} = 0\}$

$\kappa_{S'}(P) = \tilde{y}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}^T\tilde{A}\tilde{C} &= \begin{bmatrix} 1 & c^T \\ 0 & C^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & c^T \\ 0 & C^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 + a^T c & a^T C \\ a + Ac & AC \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_0' & a'^T \\ a' & C^T AC \end{bmatrix} \\
&\text{mit } a_0' = a_0 + a^T c + c^T a + c^T Ac = a_0 + c^T(2a + Ac), a' = C^T a + C^T Ac = C^T(a + Ac)
\end{aligned}
$$

Nach Kapitel II §4 existiert (da $char(K) \neq 2$) $C_1 \in GL_n(K)$ mit
$C_1^T AC_1 = diag(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0), d_i \neq 0 \in K, r \leq n.$
$\tilde{C}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}$

$$
\tilde{A}_1 = \tilde{C}_1^T \tilde{A}\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & & \ldots & & b_n \\ b_1 & d_1 & & & & \\ & & \ddots & & 0 & \\ \vdots & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & 0 & & & \ddots \\ b_n & & & & & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = C_1^T a
$$

$$
\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{b_1}{d_1} & & & \\ \vdots & & E_n & \\ -\frac{b_r}{d_r} & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{A}_2 = \tilde{C}_2^T \tilde{A}_1 \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} a_0' & 0 & \ldots & 0 & b_{r+1} & \ldots & b_n \\ 0 & d_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 & & \\ 0 & & & d_r & & & \\ b_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & \\ b_n & & & & & & 0 \end{bmatrix}
$$

<u>1. Fall:</u>

$b_{r+1} = \ldots = b_n = 0$

Dann $\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{A} | \kappa_{S'}(P) = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, d_1 y_1^2 + \ldots + d_r y_r^2 + a_0' = 0\}, a_0' = \{0, 1\}$

<u>2. Fall:</u>

Nicht alle $b_{r+1}, \ldots, b_n = 0$.
Dann $t \in K^{(n-r)\times 1}$.

$$\tilde{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & E_n & \\ 0 & & & \\ t & & & \end{bmatrix} \in K^{(n+1)\times(r+1)} \text{ mit } [0,\dots,0,t_{r+1},\dots,t_n]2 \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + a_0 = 0$$

$$\tilde{A}_3 = \tilde{C}_3^T \tilde{A}_2 \tilde{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} & \dots & b_n \\ 0 & d_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & d_r & & & \\ b_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ b_n & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Da $\begin{bmatrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \neq 0$ in $K^{(n-1)\times 1}$, existiert $F \in GL_{n-r}(K)$ mit $F \begin{bmatrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\tilde{C}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_r & & 0 \\ \vdots & 0 & & F^T \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_4 = \tilde{C}_4^T \tilde{A}_3 \tilde{C}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & d_r & & & & \\ 1 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Dann ist $\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{A} | \kappa_{S'}(P) = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, d_1 y_1^2 + \dots + d_r y_r^2 + 2y_{r+1} = 0\}$.

Satz 4.3.1

Ist $char(K) \neq 2$, so ist jede Quadrik in $(\mathcal{A}, V), dim(\mathcal{A}) = n$, affin äquivalent zu einer Quadrik mit Gleichung

1) $d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2 = 0, r \leq n$

2) $d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2 = 1, r \leq n$

3) $d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2 = x_{r+1}, r < n$

Ist $K = \mathbb{R}$, so kann man $d_i \in \{1, -1\}$ wählen.
Genauer: $d_1 = \dots = d_s = 1, d_{s+1}, \dots, d_r = -1, 1 \leq s \leq r$.

Corrolar 4.3.1

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es bis auf affine Äquivalenz die folgenden nichtleeren Quadriken mit Gleichung:

1)
$x_1^2 = 0$ Gerade ("x_2-Achse")
$x_1^2 + x_2^2 = 0$ Punkt ("Nullpunkt")
$x_1^2 - x_2^2 = 0$ Paar sich schneidender Geraden

2)
$x_1^2 = 1$ Paar paralleler Geraden
$x_1^2 + x_2^2 = 1$ Ellipse
$x_1^2 - x_2^2 = 1$ Hyperbel

3) $x_1^2 = x_2$ Parabel

4.4 Affine euklidische Räume (Euklidische Punkträume)

Hauptachsentransformation

Definition 4.4.1 *(euklidischer affiner Raum)*

$(\mathcal{A}, V, \Phi)$ **euklidischer affiner Raum**, wenn $(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum über $\mathbb{R}$ und $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ positiv symmetrische $Bifo$, (V, Φ) euklidischer Vektorraum.

Bemerkung 4.4.1

Ist $(\mathcal{A}, V, \Phi)$ euklidischer affiner Raum und definiert man für $P, Q \in \mathcal{A}$

$$d(P,Q) := \parallel \overrightarrow{PQ} \parallel =_+ \sqrt{\Phi(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})}, d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

so ist $(\mathcal{A}, d)$ ein "**metrischer Raum**", d.h.

i) $d(P,Q) \geq 0$ und $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

iii) $P, Q, R \in \mathcal{A} \Rightarrow d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$ (Dreiecksungleichung)

Beweis:

...

Definition 4.4.2 *(Isometrie)*

Ist $(\mathcal{A}, d)$ metrischer Raum (z.B. $(\mathcal{A}, V, \Phi)$ affiner euklidischer Raum), so heißt $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ **Isometrie**, wenn

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P,Q) \; \forall P, Q \in \mathcal{A}$$

Satz 4.4.1

Ist $(\mathcal{A}, V, \Phi)$ euklidischer affiner Raum und $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Isometrie, so ist φ affin und injektiv und bijektiv, falls $dim(A) = dim(V) < \infty$ und die zugehörige lineare Abbildung $V \to V$ ist orthogonal.

Beweis:

...

Definition 4.4.3 *(Bewegung, cartesisches Koordinatensystem)*

a) $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt **Bewegung**, falls β Isometrie und bijektiv (dies ist erfüllt, falls $dim(A) < \infty$).

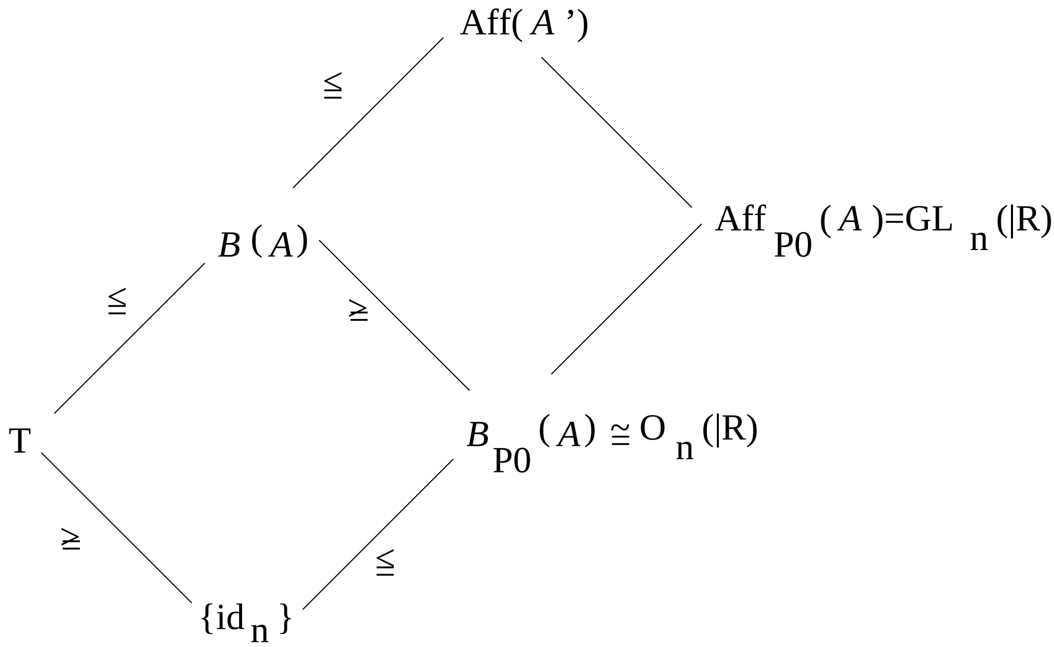
b) $S = (P_0, \ldots, P_n)$ **cartesisches Koordinatensystem**, falls $\mathcal{B} = (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ eine ON-Basis von V ist.

Bemerkung 4.4.2

Ist $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Bewegung, $S = (P_0, \ldots, P_n)$ cartesisches Koordinatensystem, so ist $M_S^S(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix}$ mit $A \in O_n(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.
So sehen auch Basiswechselmatrizen zwischen cartesischen Koordinatensystemen aus.

Bemerkung 4.4.3

$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\}|\beta$ Bewegung$\}$ ist Untergruppe von $Aff(\mathcal{A})$.
$\mathcal{B}_{P_0}(\mathcal{A}) = \{\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{A})|\beta(P_0) = P_0\} \leq Aff_{P_0}(\mathcal{A})$



Satz 4.4.2

Ist $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{A}$ nicht leere Quadrik im euklidischen affinen Raum, $(\mathcal{A}, V, \Phi)$, so existiert cartesisches Koordinatensystem S von $\mathcal{A}$ mit

$\mathcal{Q} = \{P \in \mathcal{A} | \kappa_S(P) = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \frac{1}{d_1^2}x_1^2 + \ldots + \frac{1}{d_s^2}x_s^2 - \ldots - \frac{1}{d_r^2}x_r^2 = y$ mit $y \in \{0, 1, x_{r+1}\}\}$, dabei $d_i \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq r \leq n$

4.5 Homogene Koordinaten, Satz von Desargues

Sei $S = (P_0, \ldots, P_n)$ affines Koordinatensystem von $\mathcal{A}$.

$\tilde{\kappa}_S(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$

Definition 4.5.1 *(homogener Koordinatenvektor)*

Ist $0 \neq x \in K^{(n+1)\times 1}$ mit $< x >=< \tilde{\kappa}_S(P) >$, so heißt x **homogener Koordinatenvektor** von P. Er ist durch S und P bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt.

Lemma 4.5.1

Seien $x, y, z \in K^{(n+1)\times 1}$ homogene Koordinatenvektoren von $P \neq Q, R$. Dann gilt $R \in < P, Q >_{aff} \Leftrightarrow z \in < x, y >$.
Ist $R \in < P, Q >_{aff} \setminus \{P, Q\}$, so kann man homogene Koordinatenvektoren x', y' so wählen, dass $z = x' + y'$.

Beweis:

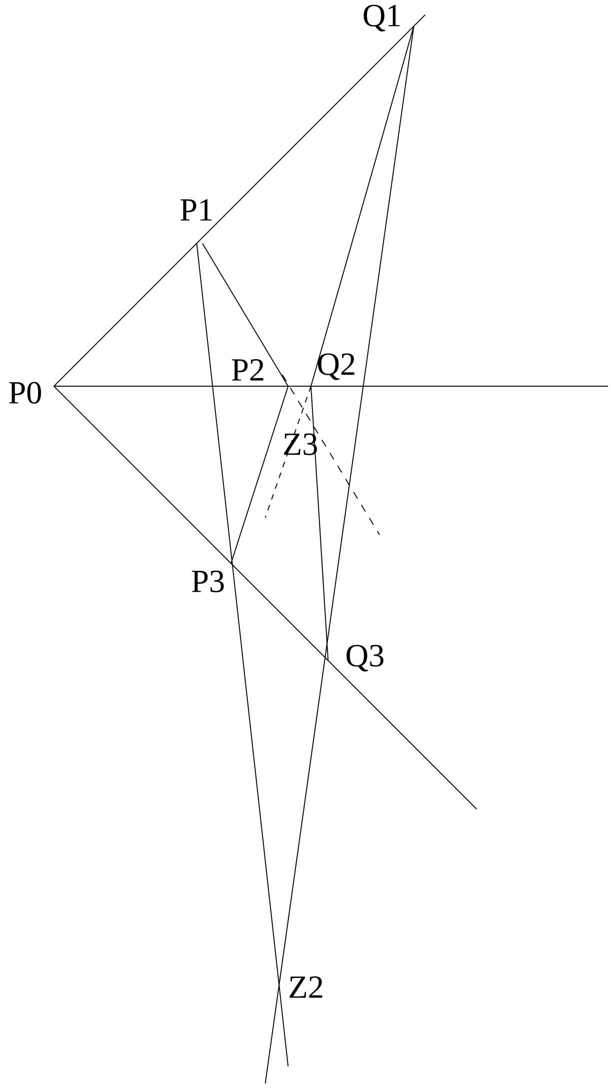
...

Lemma 4.5.2

Ist $\mathcal{A}$ ein 2-dimensionaler affiner Raum über K,
$g =< P, Q >_{aff} \neq g' =< P', Q' >_{aff}$ affine Geraden $\Rightarrow P \neq Q$.
Dann ist $g \cap g' = \{P_0\}$ oder $g \cap g' = \emptyset$.
Seien x, y, x', y' homogene Koordinatenvektoren von P, Q, P', Q'.
$< x, y > \cap < x', y' >=< z > \leq K^{3\times 1}$ mit $z \neq 0$
$< x, y > + < x', y' >= K^{3\times 1}$, weil $g \neq g'$.
Ist $z_0 \neq 0$, so ist z_0 homogener Koordinatenvektor von P_0.
Ist $z_0 = 0$, so ist $g \cap g' = \emptyset$.

Satz 4.5.1 *(Desargues)*

Es sei $\mathcal{A}$ 2-dimensionaler affiner Raum über K.



Es sei $P_0 =< P_1, Q_1 >_{aff} \cap < P_2, Q_2 >_{aff} \cap < P_3, Q_3 >_{aff}, P_i \neq Q_i$.

a) Sei $Z_i \in < P_j, P_k >_{aff} \cap < Q_j, Q_k >_{aff}, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Dann sind Z_1, Z_2, Z_3 kollinear.

b) Ist $< P_1, P_2 >_{aff} \cap < Q_1, Q_3 >_{aff} = \emptyset$ und $< P_2, P_3 >_{aff} \cap < Q_2, Q_3 >_{aff} = \emptyset$, so ist auch $< P_1, P_3 >_{aff} \cap < Q_1, Q_3 >_{aff} = \emptyset$.

Beweis:

...

Corrolar 4.5.1 *(Kleiner Satz von Desargues)*

Sind in Satz 4.5.1 die "Trägergeraden" $< P_1, Q_1 >_{aff}, < P_2, Q_2 >_{aff}, < P_3, Q_3 >_{aff}$ parallel, so gelten die Behauptungen ebenfalls.

Definition 4.5.2 *(affine Ebene)*

Eine Menge $\mathcal{P}$ (von "Punkten") zusammen mit einer Menge $\mathcal{G}$ (von "Geraden") von Teilmengen von $\mathcal{P}$ heißt **affine Ebene**, wenn

i) Zu $P \neq Q$ existiert genau ein $g \in \mathcal{G}$ mit $P, Q \in g$.

ii) Zu $g \in \mathcal{G}$ und $P \in \mathcal{P}$ mit $P \notin g$ gibt es genau ein $g' \in \mathcal{G}$ mit $P \in g'$ und $g \cap g' = \emptyset$.

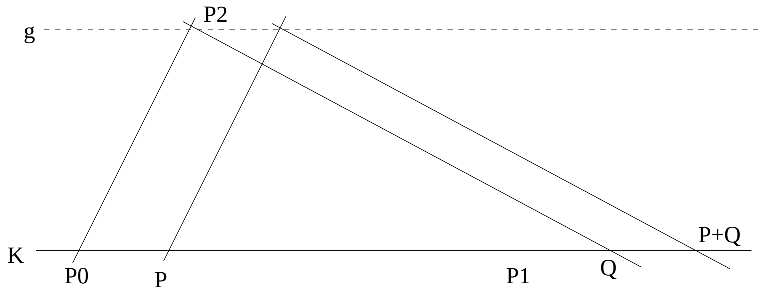
iii) Jedes $g \in \mathcal{G}$ enthält mindestens zwei verschiedene Punkte und es gibt drei (verschiedene) Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Bemerkung 4.5.1

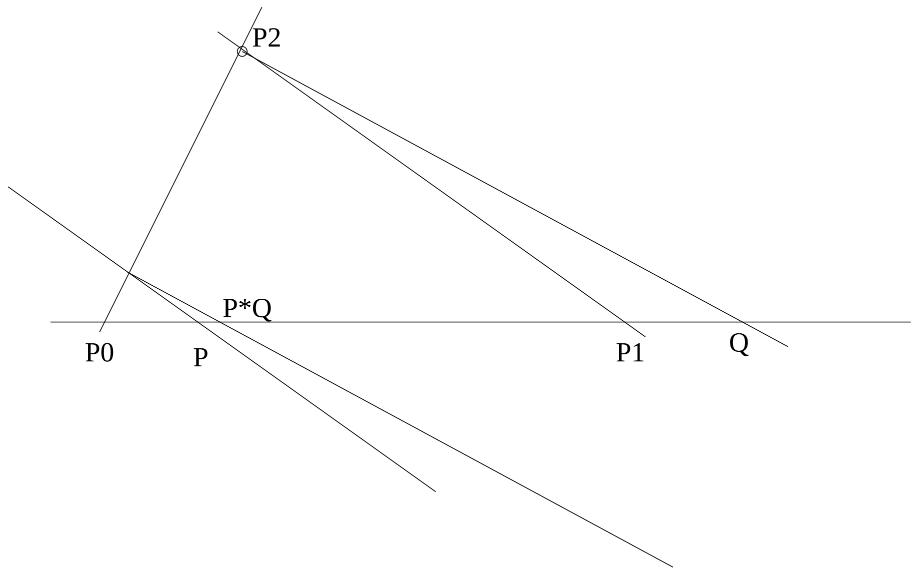
Jeder 2-dimensionale affine Raum ist (mit der Menge der 1-dimensionalen affinen Teilräume als Geraden "und der Menge der 0-dimensionalen affinen Teilräume als Punkte") eine affine Ebene. Aber es gibt auch affine Ebenen, die nicht 2-dimensional affine Räume über Körpern sind.

Bemerkung 4.5.2

Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ affine Ebene und P_0, P_1, P_2 gemäß (iii), die nicht auf einer Geraden liegen.
$K =$ Gerade (existiert nach (i)) durch P_0, P_1
Definiere $+ : K \times K \to K, g$ sei Parallele zu K durch P_2



$\cdot : K \times K \to K$



Bemerkung 4.5.3

Gilt der (kleine) Satz von Desargues, so gelten alle Körperaxiome in $(K, +, \cdot)$ mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation. Gilt diese auch (dazu braucht man "Satz von Pappos"), so erhält man 2-dimensionalen affinen Raum über K.

4.6 Projektive Räume

Definition 4.6.1 *(projektiver Raum, projektiver Unterraum)*

Ist W ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum, so heißt
$\mathbb{P}(W) = \{< w > | w \in W\}$ **projektiver Raum**. Ist $U \leq W$ mit
$dim(U) = m+1, \{< u > | 0 \neq u \in U\}$ heißt m-dimensionaler **projektiver Unterraum**.
$m = 1$: **projektive Gerade**
$m = 0$: **projektiver Punkt**
$\mathbb{P}_n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$

Beispiel 4.6.1

$K = \mathbb{R}, \mathbb{P}_1(\mathbb{R}), W = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{A} = w_0 + V = \{\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} | x \in \mathbb{R}\}, V = < e_1 >$

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \\ w & \mapsto & < w > \end{array}$$

$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \varepsilon(\mathcal{A}) \cup \{< e_1 >\}$
$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \leftrightarrow \mathbb{S}^1 = $ 1-Sphäre

Bemerkung 4.6.1

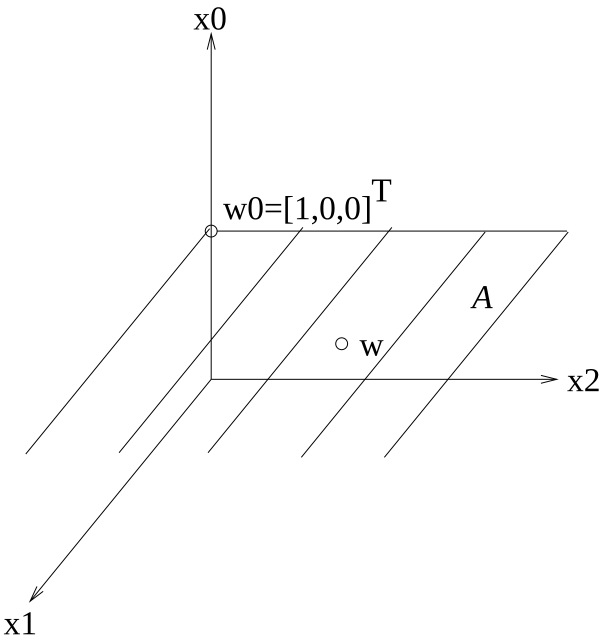
Ist $dim_K(W) = n+1, V \leq W, dim(V) = n$
$\mathcal{A} = w_0 + V$ (n-dimensionaler affiner Raum), $w_0 \in W \backslash V$

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{P}(W) \\ w & \mapsto & < w > \end{array} \text{ Einbettung ("injektiv, nicht surjektiv")}$$
("$w \neq 0$, da $0 \notin \mathcal{A}$")

$\mathbb{P}(W) = \varepsilon(\mathcal{A}) \dot\cup H$ mit $H = \{< v > |0 \neq v \in V\}$, H $(n-1)$-dimensionaler projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(W)$ ("uneigentlicher Raum von $\mathbb{P}(W)$ bzgl. $\mathcal{A}$ (oder $\varepsilon(\mathcal{A})$)")
Die projektiven Punkte $< v > \in H$ heißen **uneigentliche Punkte** bzgl. $\mathcal{A}$.

Beispiel 4.6.2

$n = 2, \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$



$$\mathcal{A} = w_0 + V, V =< e_1, e_2 >, e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ w & \mapsto & < w > \end{array} \text{ injektiv}$$

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \varepsilon(\mathcal{A}) \dot\cup H$ mit $H = \{< v > |v \in V\}$
H uneigentliche Gerade von $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ bzgl. $\mathcal{A}$

Satz 4.6.1

Ist K Körper, so gilt in $\mathbb{P}_2(K) = \mathbb{P}(K^3)$:

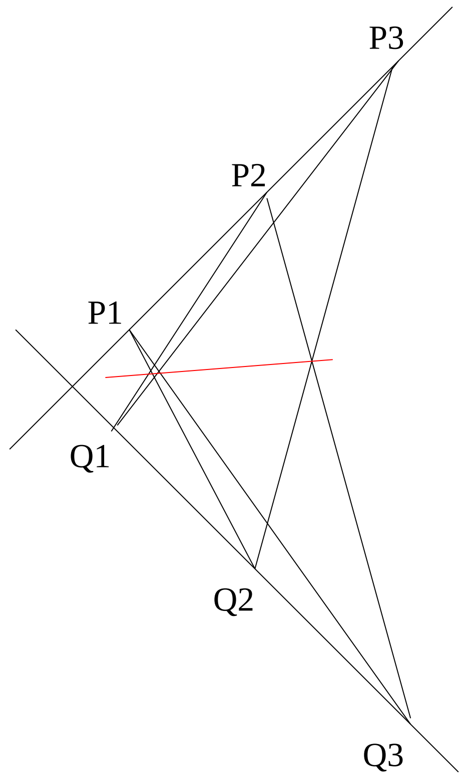
i) Zu $P \neq Q \in \mathbb{P}_2(K)$ gibt es genau eine (projektive) Gerade g mit $P, Q \in g$.

ii) Sind $g \neq g'$ (projektive) Geraden, so gibt es genau ein $P \in \mathbb{P}_2(K)$ mit $P \in g \cap g'$.

iii) Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte und es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

(D) Es gilt der Satz von Desargues (s. § 4).

(P) Es gilt der Satz von Pappos, d.h.



Definition 4.6.2 *(projektive Ebene)*

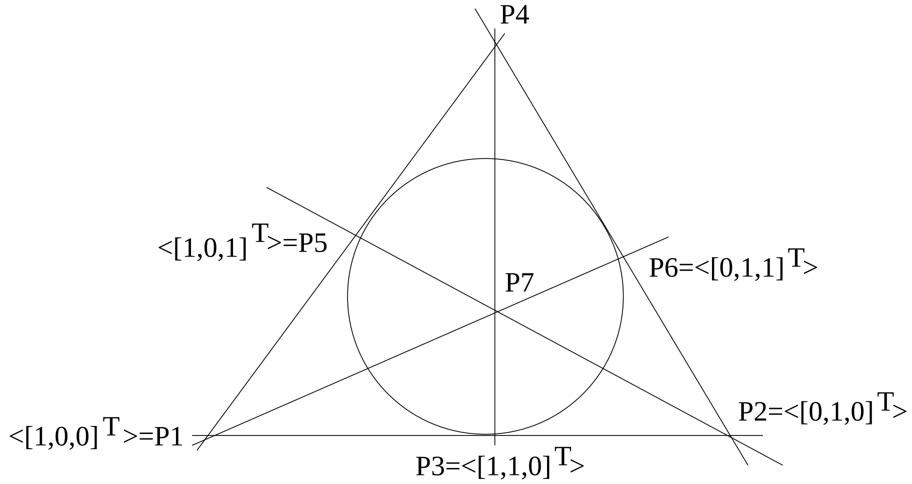
Eine Menge $\mathcal{P}$ (von Punkten) zusammen mit einer Menge $\mathcal{G}$ ("von Geraden") von Teilmengen von $\mathcal{P}$ heißt **projektive Ebene**, wenn (i), (ii), (iii) gelten.

Beispiel 4.6.3

$\mathcal{P} = \mathbb{P}_2(K), \mathcal{G} = \{$1-dimensionale projektive Teilräume$\}$ ist projektive Ebene (K Körper).

Beispiel 4.6.4

Fano-Ebene



$i = x_0 + 2 \cdot x_1 + 2^2 \cdot x_2, x_i \in \{0, 1\}$

$P_i =< \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} >\in \mathbb{P}_3(\mathbb{Z}_2)$

Satz 4.6.2

Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ projektive Ebene mit $|\mathcal{P}| < \infty$. Dann gilt für alle $g \in \mathcal{G}, |g| = m+1$ und $|\mathcal{P}| = m^2 + m + 1 = \frac{m^3-1}{m-1}$.
m heißt **Ordnung** der projektiven Ebene.

Beweis:

...

Bemerkung 4.6.2

Ist K Körper, $\mathbb{P}_2(K) = \frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$
$|K| = q$
$\mathbb{P}_2(K)$ hat (als projektive Ebene) "Ordnung q".
$|K| = q$ ist Primzahlpotenz (s. Algebra I).
Zu jeder Primzahlpotenz q gibt es projektive Ebene der Ordnung q.

Fragen 4.6.1

Gibt es projektive Ebene der Ordnung m mit $m \neq$ Primzahl?
$m = 6$ Nein, gibt es nicht.
$m = 10$ Nein ,gibt es nicht (1993, mit Computer-Rechnung).
$m = 12$