Lineare Algebra II – Prof. Dr. Pahlings – SS 1995

Torsten Bronger
bronger@axpmgr.physik.rwth-aachen.de

Robert Drese
drese@axp02.physik.rwth-aachen.de

Markus Duda
duda@axp03.physik.rwth-aachen.de

Frank Gutheim
gutheim@axp04.physik.rwth-aachen.de

Gehrt Hartjen
hartjen@axp05.physik.rwth-aachen.de

Christoph Koehler
ckoehler@axp06.physik.rwth-aachen.de

Stefan Ziegler
ziegler@axpmgr.physik.rwth-aachen.de

So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig; man muß sie für fertig erklären,
wenn man nach Zeit und Umständen das mögliche getan hat.
(Johann Wolfgang Goethe, 1787)

Wir, die Autoren, danken dem Lehrstuhl D für Mathematik für die gute Unterstützung. Insbesondere danken wir Prof. Dr. H. Pahlings für die hervorragende Vorlesung, die es wert war geTEXt zu werden.
Desweiteren danken wir Dr. V. Felsch für die zur Verfügung gestellten Aufgaben in Anhang A und B.
Trotzdem ist dies kein Skript, das offiziell von Prof. Dr. H. Pahlings herausgegeben wird. Es erhebt keinerlei Ansprüche auf Fehlerfreiheit und Vollständigkeit, und die Autoren übernehmen diesbezüglich keine Haftung.

Dennoch sind wird an Hinweisen der Leserschaft auf Fehler und Ungereimtheiten interessiert, um sie bei nächster Gelegenheit zu korrigieren.
Erata-Listen sind vorzugsweise per E-Mail an `duda@axpmgr.physik.rwth-aachen.de` zu richten.

Desweiteren kann die aktuellste Version des Skripts (in Form eines TEX-Files) per E-Mail bezogen werden, dazu ist nur eine E-Mail an `duda@axpmgr.physik.rwth-aachen.de` mit Subject: Update LA2 und ohne weiteren Message-Inhalt nötig.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Skalarprodukte, Spektralsatz für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Sei V ein K-Vektorraum
Φ: $V \times V \to K$ Bilinearform

z.B. $\quad V = K^{n\times 1} \qquad A \in K^{n\times n} \qquad \Phi(x,y) = x^{\mathrm{tr}}Ay \in K$

$$V = P(\mathbb{R}) \qquad \Phi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Φ symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$
Eine symmetrische Bilinearform heißt **Skalarprodukt**.

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V
$A = [\Phi]_B = [\Phi(v_i, v_j)]$
$B' = (v_1', \ldots, v_n')$
$A' = [\Phi]_{B'} = P^{\mathrm{tr}} \underbrace{[\Phi]_B}_{A} P$
P ist Basiswechselmatrix mit $P = {}_B[\mathrm{Id}]_{B'}$

A und A' heißen dann **kongruent**.

Satz 1 (Dimensionssatz)

Sei $U \leq V$ (U ein Teilraum von V), dann gilt:

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V + \dim(U \cap V^{\perp})$$

Dabei ist $U^{\perp} = \{x \in V | \Phi(x,y) = 0, \ \forall y \in V\}$

Satz 2 (Existenz einer Orthogonalbasis)

Ist Φ symmetrisch und char $K \neq 2, \dim V < \infty$, dann existiert eine Orthogonalbasis B, d.h. eine Basis B mit

$$[\Phi]_B = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad \alpha_i \in K$$

In Kapitel 1 ist K meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

§1 Satz von Sylvester

Vor: $K \leq \mathbb{R}$ (K Unterkörper von $\mathbb{R}$)
(Es wird die Anordnung von $\mathbb{R}$ benutzt)

Definition ((semi-)definit)

Φ: $V \times V \to K$ Bilinearform heißt **positiv (semi-)definit**, wenn

$$\Phi(x,x) > 0 \qquad \bigwedge_{x \in V} x \neq \underline{0}.$$

(**Negativ (semi-)definit** wird entsprechend definiert).

Trägheitssatz von Sylvester

Sei $\dim V < \infty$, Φ ein Skalarprodukt, dann gibt es eine Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit

$$[\Phi]_B = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_q, 0, \ldots, 0)$$

mit $\alpha_i > 0$ und $\alpha'_j < 0$, und p, q sind durch Φ eindeutig bestimmt.

$p + q$ heißt **Rang** von Φ

$p - q$ heißt **Signatur** von Φ

p ist die maximale Dimension eines positiv definiten Teilraums, d.h. eines Teilraums U mit $\Phi_{U \times U}$ positiv definit.
q ist die maximale Dimension eines negativ definiten Teilraums.

Beweis:

Da $1+1 \neq 0$ existiert also nach Satz 2 (s.o.) eine Basis wie angenommen.

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$
$U_1 = \langle v_1, \ldots, v_p \rangle$

Sei nun $u = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i v_i \in U_1$, dann gilt:

$$\Phi(u,u) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \cdot \Phi(v_i, v_i) > 0 \qquad \text{falls } x \neq \underline{0}$$

Also ist U_1 positiv definit.

Zeige ebenso:
$U_2 = \langle v_{p+1}, \ldots, v_{p+q} \rangle$ ist negativ definit.

Der Fall U_3 ist trivial.

Sei nun $U \leq V$ positiv definit. Zeige dann: $\dim U \leq p$.

$u \in U \cap (U_2 + U_3)$, also

$$u = \sum_{i=p+1}^{n} \underbrace{x_i^2 \cdot}_{\leq 0} \underbrace{\Phi(v_i, v_i)}_{\text{(wegen } i \geq p+1)} \leq 0.$$

Andererseits gilt $u \in U \Rightarrow \Phi(u,u) \geq 0$ für $u \neq \underline{0}$.

Also $u = \underline{0}$, d.h. $U \cap (U_2 + U_3) = \{\underline{0}\}$, also gilt:

$$\begin{aligned} & \dim U + \dim(U_2 + U_3) \\ = \; & \dim(U + U_2 + U_3) \\ = \; & \dim(U_1 + U_2 + U_3) \\ = \; & \dim U_1 + \dim(U_2 + U_3) \\ \Rightarrow \; & \dim U \leq \dim U_1 = p \end{aligned}$$

entsprechend für q.

□

Folgerung (Kongruenz symmetrischer Matrizen)

Sei $K = \mathbb{R}$. Es gibt dann stets B mit

$$[\Phi]_B = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, 0, \ldots, 0).$$

Zwei symmetrische Matrizen A, A' sind **kongruent**, genau dann wenn gilt: A und A' haben gleichen Rang und gleiche Signatur.

Beispiel

Sei $n = 2$ und $K = \mathbb{R}$. Dann sind dies alle möglichen Matrizen von Mat(2,$\mathbb{R}$) bis auf kongruente Matrizen.

	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Rang	2	2	1	0
Signatur	$\pm$ 2	0	$\pm$ 1	0

Ist Φ positiv definit, dann ist $\det[\Phi]_B > 0$ (klar, wenn $[\Phi]_B = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$)
Es ist:

$$\begin{aligned} \det[\Phi]_{B'} &= \det(P^{\mathrm{tr}}[\Phi]_B P) \\ &= (\det P)^2 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n > 0 \end{aligned}$$

Satz 2 (Entscheidungsverfahren für positive Definitheit)

$[\Phi]_B = [a_{ij}] \in K^{n\times n}, B = (v_1, \dots, v_n)$

$$\Phi \textbf{ positiv definit} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \qquad \text{für } k = 1, \dots, n$$

Beweis:

$\Rightarrow$): Sei $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$
Φ positiv definit $\Rightarrow \Phi|_{U_K \times U_K}$ positiv definit[1]

$\Leftarrow$): Induktion nach n

$n=1$: trival

$n \to n+1$: $U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$
$\Phi|_{U\times U}$ ist nach Induktionsannahme positiv definit

$$\underbrace{\dim U}_{n-1} + \underbrace{\dim U^\perp}_{1} = \dim V + \underbrace{\dim(U \cap V^\perp)}_{=0\text{, da } V^\perp = \{\underline{0}\}\text{ , weil } \det[a_{ij}]\neq 0}$$

also $\dim U^\perp = 1$, $U^\perp = \langle u \rangle$.

Wähle Orthogonalbasis $B' = (u_1, \dots, u_{n-1})$ von U (bezüglich $\Phi|_{U\times U}$)
$[\Phi|_{U\times U}]_{B'} = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_{n-1})$ mit $d_i > 0 \qquad i = 1, \dots, n$

$V = U + U^\perp$, weil $U \cap U^\perp = \{\underline{0}\}$
$B'' = (u_1, \dots, u_{n-1}, u)$ Basis von V

---

[1] $\det([\Phi]_{U_K \times U_K}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$

$[\Phi]_{B''} = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_{n-1}, d)$
$d = \Phi(u, u)$

$$\begin{aligned} \det[\Phi]_{B''} &= \underbrace{\det[a_{ij}]}_{>0} \cdot x > 0 \\ &= \underbrace{d_1 \cdot \ldots \cdot d_{n-1}}_{>0} \cdot \underbrace{d}_{>0} \end{aligned}$$

Nach Satz von Sylvester ist Φ positiv definit.

$\square$

Bemerkung

Das ist kein praktisches Kriterium.

Definition (euklidischer Vektorraum)

Euklidischer Vektorraum $= (V, \Phi)$

(i) V $\mathbb{R}$-Vektorraum

(ii) Φ: $V \times V \to \mathbb{R}$ positiv-definit

Das Analogon für $K = \mathbb{C}$ sind ...

§2 Unitäre Räume

Beispiel

$V = \mathbb{C}^{n \times 1}$ $\quad \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^{\mathrm{tr}} y$ ist nicht positiv, $\notin \mathbb{R}$ allgemein.

Z.B. $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) = 0$

Definition (komplexe Zahlen)

Für $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, sei $\overline{z} = x - iy$ **konjugiert komplexes Element** zu z.

$$\overline{} : \begin{array}{ccc} z & \mapsto & \overline{z} \\ \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \end{array}$$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
mit $\overline{\overline{z}} = z$ und $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Definition (Betrag einer komplexen Zahl)

$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
$A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n} \qquad \overline{A} = [\overline{a_{ij}}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$

Rechenregel

Für alle $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times p}$

$$\begin{aligned} \overline{A+B} &= \overline{A} + \overline{B} \\ \overline{A \cdot B} &= \overline{A} \cdot \overline{B} \end{aligned}$$

Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\det \overline{A} = \overline{\det A}.$$

$\Psi\colon\ \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$
$\Psi(x,y) = x^{\mathrm{tr}}\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i$
dann $\Psi(x,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{x}_i > 0 \in \mathbb{R}, \text{falls}\, x \neq 0$
Ψ ist nicht bilinear:

$$\begin{aligned} \Psi(x,sy) &= x^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{s} \cdot \overline{y} \qquad (s \in \mathbb{R}) \\ &= \overline{s} \cdot x^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{y} \\ &= \overline{s} \cdot \Psi(x,y) \end{aligned}$$

Definition (Sesquilinearform)

Eine Abbildung $\Psi\colon\ V \times V \to \mathbb{C}$ (V $\mathbb{C}$-Vektorraum) heißt **Sesquilinearform**, wenn

$$\begin{aligned} \Psi(sv_1 + v_2, w) &= s\Psi(v_1,w) + \Psi(v_2,w) \\ \Psi(v, sw_1 + w_2) &= \overline{s}\Psi(v,w_1) + \Psi(v,w_2) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$; $v_1, v_2, v, w_1, w_2, w \in V$

Ψ heißt **hermitesch**, wenn außerdem

$$\Psi(v,w) = \overline{\Psi(w,v)}$$

Eine hermitesche Form heißt positiv definit, wenn $\Psi(v,v) > 0$ für alle $v \in V,\ v \neq \underline{0}$

Definition (unitärer Raum)

(V,Ψ) **unitärer Raum** $:\Leftrightarrow$

(i) V $\mathbb{C}$-Vektorraum

(ii) Ψ ist positiv definite hermitesche Form

Beispiel

$(\mathbb{C}^{n\times 1}, \Psi)$ unitärer Raum
$\Psi(x,y) = x^{\mathrm{tr}}\overline{y}$

Bemerkung

$B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V ($\mathbb{C}$-Vektorraum)
Ψ: $V \times V \to \mathbb{C}$ Sesquilinearform
$[\Psi]_B = [\Psi(v_i, v_i)] \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$B' = (v_1', \dots, v_n')$ Basis $\qquad P = {}_B[\mathrm{Id}]_{B'} = [p_{ij}] \qquad v_j' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$

$$\begin{aligned} \Psi(v_i', v_j') &= \Psi\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} \cdot v_k\ ,\ \sum_{l=1}^{n} p_{lj} \cdot v_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ki} \cdot \overline{p}_{lj} \cdot \Psi(v_k, v_l) \end{aligned}$$

$[\Psi]_{B'} = P^{\mathrm{tr}} \cdot [\Psi]_B \cdot \overline{P}$
z.B. $\det[\Psi]_{B'} = \det[\Psi]_B \cdot \underbrace{|\det P|}_{>0}{}^2$

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, Ψ Sesquilinearform und $[\Psi(v_i, v_j)] = [\Psi]_B$. Ferner

$$v = \sum_i x_i\, v_i \quad w = \sum_j y_i\, v_j \quad c_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Psi(v,w) &= \sum_{i,j} x_i\, \Psi(v_i, v_j)\overline{y_j} \\ &= (x_1, \dots, x_n)\, [\Psi]_B \overline{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} \\ &= c_B(v)^{\mathrm{tr}}\, \underbrace{[\Psi]_B}_{A}\, \overline{c_B(w)} \end{aligned}$$

Bemerkung 1

Ψ hermitesch $\Leftrightarrow [\Psi]_B = A$ hermitesch $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} A^{\mathrm{tr}} = \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A}^{\mathrm{tr}} = A$.

Z.B. ist $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ eine hermitesche Matrix.

Bemerkung 2

Ist Ψ eine hermitesche Form, so folgt

(i) $\Psi(v,w) = 0 \Leftrightarrow \Psi(w,v) = 0$

(ii) $\Psi(v,v) \in \mathbb{R}$

Definition (nicht ausgeartet)

$U^\perp = \{v \in V | \forall u \in U \Psi(u,v) = 0\}$ für $U \leq V$.
Bei festgewählter Sesquilinearform Ψ ist

$$V^\perp = \mathrm{Rad}\Psi.$$

Ψ ist **nicht ausgeartet** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} V^\perp = \{\underline{0}\}$.

Satz 1 (Eigenschaften der Sesquilinearform)

Ist $\dim V < \infty$, Ψ Sesquilinearform auf V, B Basis von V; dann gilt

a) $\dim V^\perp = \dim V - \mathrm{Rg}[\Psi]_B$,

b) $\dim U^\perp + \dim U = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$,

und wenn Ψ hermitesch

c) Es gibt Basis B' von V mit

$$[\Psi]_{B'} = \mathrm{Diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}, 0,\ldots,0),$$

wobei p, q eindeutig bestimmt sind.

Beweis:
Praktisch genau wie bei den Bilinearformen.

$\square$

§3 Adjungierte Abbildungen

Vor.: V K-Vektorraum und

(i) Φ: $V \times V \to K$ nichtausgeartete Bilinearform

oder

(ii) Φ: $V \times V \to \mathbb{C}$ nichtausgeartete Sesquilinearform

Im Fall (i) sei $\overline{s} = s$ für alle $s \in K$.

Definition (Adjungierte)

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ gegeben (d.h. $\varphi\colon V \to V$ ist linear). Gilt für ein $\varphi^* \in \mathrm{End}(V)$

$$\bigwedge_{v,w\in V} \Phi(\varphi(v), w) = \Phi(v, \varphi^*(w))$$

so heißt φ^* **adjungiert** zu φ, bzw. φ^* ist die **Adjungierte** zu φ.

Bemerkung

Gibt es zu $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ eine Adjungierte φ^*, so ist φ^* eindeutig bestimmt, denn angenommen, φ^* und φ° seien Adjungierte, dann:

$$\bigwedge_{v,w\in V} \Phi(\varphi(v), w) = \Phi(v, \varphi^*(w)) = \Phi(v, \varphi^\circ(w)) \Rightarrow 0 = \Phi(v, \underbrace{\varphi^*(w) - \varphi^\circ(w)}_{=0,\ \text{da } \Phi \text{ nicht ausgeartet}})$$

Satz 1 (Existenz der Adjungierten)

Ist $\dim V = n < \infty$, so hat jedes $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ eine Adjungierte φ^*. Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V, $[\Phi]_B = A$, ${}_B[\varphi]_B = F$, dann gilt

$${}_B[\varphi^*]_B = \overline{A^{-1}\ {}_B[\varphi]_B^{\mathrm{tr}}\ A}.$$

Insbesondere, falls B eine Orthonormalbasis ist, d.h. $A = E_n$, gilt

$${}_B[\varphi^*]_B = \overline{{}_B[\varphi]_B^{\mathrm{tr}}}.$$

Beweis:
Da Φ nicht ausgeartet ist, ist $A = [\Phi]_B$ invertierbar.

$$\Phi(v, w) = \Phi\left(\sum_i x_i\, v_i, \sum_j y_j\, v_j\right) = x^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot \overline{y} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_B(v)$$

$\varphi(v) = \sum_i x_i \cdot \varphi(v_i)$ hat den Koordinatenvektor $F \cdot x$, $F = {}_B[\varphi]_B$.

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi(v), w) &= (F \cdot x)^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot \overline{y} \\
&= x^{\mathrm{tr}} \cdot F^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot \overline{y} \\
&= x^{\mathrm{tr}} \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{E} \cdot F^{\mathrm{tr}} A \cdot \overline{y} \\
&= x^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot (A^{-1} \cdot F^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot \overline{y}) \\
&= x^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot \underbrace{\overline{\overline{A^{-1}} \cdot \overline{F}^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{A} \cdot y}}_{c_B(\varphi^*(w))},
\end{aligned}$$

wobei $[\varphi^*]_B = \overline{A^{-1}} \cdot \overline{F}^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{A} = \overline{A^{-1} \cdot F^{\mathrm{tr}} \cdot A}$ ist.

□

Bemerkung (Nichtexistenz der Adjungierten)

Ist $\dim V = \infty$, so existiert nicht immer eine Adjungierte zu $\varphi \in \operatorname{End}(V)$.

Beispiel

Sei $V = P(\mathbb{R}) = \{\text{reelle Polynomfunktionen}\}$.

$$\Phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & V & \to & V \\ & f & \mapsto & f' \qquad \text{(Ableitung)} \end{array}$$

Beh.: φ^* existiert nicht.

Beweis:
Angenommen, φ^* existiert doch!

$$\varphi^*(f) = f^+ \in V \qquad f, g \in V,$$

$$\Phi\big(\varphi(f), g\big) = \int_{-1}^{1} f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(x)\, g'(x)\, dx,$$

$$\Phi\big(f, \varphi^*(g)\big) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g^+(x)\, dx.$$

Also gilt für beliebige $f, g \in V$

$$f(1)\, g(1) - f(-1)\, g(-1) = \int_{-1}^{1} f(x)\Big(g'(x) + g^+(x)\Big) dx.$$

Wähle zu $g \in V$

$$f\colon x \mapsto (x^2-1)^2 \Big(g'(x) + g^+(x)\Big)^2,$$

$$0 = \int_{-1}^{1} \underbrace{(x^2-1)^2 \Big(g'(x) + g^+(x)\Big)^2}_{\geq 0} dx,$$

also muß

$$\begin{array}{rl} g'(x) + g^+(x) = 0 & \forall\, x \in (-1,1) \\ g^+(x) = -g'(x) & \forall\, g \in V \end{array}$$

Also $\forall f, g \in V$:

$$\begin{aligned} \Phi(f', g) &= \Phi(f, -g') \\ \int_{-1}^{1} f'(x)\, g(x)\, dx &= -\int_{-1}^{1} f(x)\, g'(x)\, dx \end{aligned}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{llll} f\colon x & \mapsto 1, & \text{linke Seite} & = 0 \\ g\colon x & \mapsto x, & \text{rechte Seite} & = -2 \end{array}$$

Widerspruch!

□

Satz 2 (Rechenregeln für Adjungierte)

Seien $\varphi, \psi \in \operatorname{End}(V)$ und $\dim V < \infty$. Dann gilt

a) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$.

b) $(c\,\varphi)^* = \overline{c}\,\varphi^*$.

c) $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

d) $(\varphi^*)^* = \varphi$, falls Φ symmetrisch bzw. hermitesch.

Beweis:

a) Übung

b) Übung

c) $\Phi(\varphi \circ \psi(v), w) = \Phi(\varphi(\psi(v)), w) = \Phi(\psi(v), \varphi^*(w)) = \Phi(v, \psi^* \circ \psi^*, w)$
Also $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \psi^*$

d) $\Phi(\varphi(v), w) = \Phi(v, \varphi^*(w)) \overset{\text{Vor}}{=} \overline{\Phi(\varphi^*(w), v))} = \overline{\Phi(w, \varphi^{**}(v))} \overset{\text{Vor}}{=} \Phi(\varphi^{**}(v), w))$
φ nicht ausgeartet $\Rightarrow \varphi(v) = \varphi^{**}(v)$

□

§4 Selbstadjungierte und normale Endomorphismen

Vor.: V K-Vektorraum und

(i) $\Phi\colon V \times V \to K$ nichtausgeartete Bilinearform

oder

(ii) $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ nichtausgeartete Sesquilinearform

Im Fall (i) sei $\overline{s} = s$ für alle $s \in K$.

Frage: Sei $\varphi \in \operatorname{End}(V)$, wann exisitiert eine Orthogonalbasis B bezüglich Φ aus Eigenvektoren von φ, d.h. $[\Phi]_B = \operatorname{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ und ${}_B[\varphi]_B = \operatorname{Diag}(t_1, \ldots, t_n)$?

Bemerkung

Angenommen, es existiert eine solche Basis, sogar mit $d_1 = \ldots = d_n = 1$, d.h. B ON-Basis, und ${}_B[\varphi^*]_B = \overline{{}_B[\varphi]_B^{\mathrm{tr}}} = \mathrm{Diag}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ (t_i Eigenwerte), also falls Φ Bilinearform $(t = \bar{t}) \Rightarrow \varphi^* = \varphi$
Ist $K = \mathbb{C}, \Phi$ hermitesch, so muß zumindest $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ sein (weil Diagonalmatrizen vertauschbar sind)

Definition (selbstadjungiert und normal)

φ **selbstadjungiert** $:\Leftrightarrow \varphi = \varphi^*$
φ **normal** $:\Leftrightarrow \varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$

Satz 1 (Kriterium für Selbstadjungierte und Normale)

Vor.: $\dim V < \infty, \varphi \in \mathrm{End}(V)$, gibt es ON-Basis aus Eigenvektoren von φ, so ist

Beh.: (i) φ selbstadjugiert, falls Φ Bilinearform, bzw.

(ii) φ normal, falls Φ hermintesch (K= $\mathbb{C}$)

Bemerkung

φ selbstadjungiert $\Rightarrow \varphi$ normal

Lemma 1 (Invarianz orthogonaler Räume)

Ist $U \subseteq V, \varphi$-invariant $\Rightarrow U^\perp$ ist φ^*-invariant

Beweis:

U ist φ-invariant $\Leftrightarrow (w \in U \Rightarrow \varphi(w) \in U)$. Sei $w \in U^\perp$.
Z.z.: $\varphi^*(w) \in U^\perp$ Sei $u \in U$ beliebig $\Phi(u, \varphi^*(w)) = \Phi(\varphi(u), w) = 0$ (Das Skalarprodukt Φ von $u \in U$ und $\varphi^*(w) \in U^\perp$ ist Null.)

□

Lemma 2 (Orthogonalität von Eigenvektoren)

Vor.: $\Phi(v, v) = 0 \Rightarrow v = \underline{0}$ und φ sei normal.

Beh.: a) Jeder Eigenvektor von φ (mit Eigenwert t) ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert $\bar{t}$

b) Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis:

a) Z.z.: $\varphi(v) = t \cdot v \Rightarrow \varphi^*(v) = \bar{t} \cdot v$
   Z.z.: $(\varphi - t \cdot \mathrm{Id})(v) = 0 \Rightarrow (\varphi^* - t \cdot \mathrm{Id})(v) = 0$
   Setze $\psi := \varphi - t \cdot \mathrm{Id}$, dann ist $\psi^* = \varphi^* - \bar{t} \cdot \mathrm{Id}$
   Mit φ ist auch ψ normal.

$$\psi \circ \psi^* = \varphi \circ \varphi^* - t\varphi^* - \bar{t}\varphi + t\,\bar{t}\mathrm{Id} = \psi^* \circ \psi$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Z.z.: } \psi(v) = 0 & \Leftrightarrow & \psi^*(v) = 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \Phi(\psi(v), \psi(v)) = 0 & & \Phi(\psi^*(v), \psi^*(v)) = 0 \ \ (\S 3 \text{ Satz } 2) \end{array}$$

$\Phi(\psi(v), \psi(v)) = \Phi(v, \psi^* \circ \psi(v)) = \Phi(v, \psi \circ \psi^*(v)) = \Phi(v, \psi^{**}(\psi^*(v))) = \Phi(\psi^*(v), \psi^*(v))$
$\Rightarrow$ a) $\surd$

b) Sei $t_1 \neq t_2 \in K$ und $\varphi(w_1) = t_1 w_1$, $\varphi(w_2) = t_2 w_2$
   zu zeigen: $\Phi(w_1, w_2) = 0$

$$\begin{array}{rclclcl} t_1\Phi(w_1, w_2) & = & \Phi(t_1 w_1, w_2) & = & \Phi(\varphi(w_1), w_2) & = & \Phi(w_1, \varphi^*(w_2)) \\ & \overset{a)}{=} & \Phi(w_1, \bar{t}_2 w_2) & = & \bar{\bar{t}}_2\Phi(w_1, w_2) & = & t_2\Phi(w_1, w_2) \end{array}$$

   Das ist äquivalent zu:

$$\begin{array}{rrcl} & \underbrace{(t_1 - t_2)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{nach Vor.}}} \Phi(w_1, w_2) & = & 0 \\ \Rightarrow & \Phi(w_1, w_2) & = & 0 \end{array}$$

□

Folgerung

Ist $\Phi(v, v) \neq 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ und ist φ selbstadjungiert und t Eigenwert von φ, so ist $t = \bar{t}$.

Satz 2 (Existenz reeller Eigenwerte)

a) Sei (V, Φ) n-dimensionaler euklidischer Raum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, dann hat φ einen reellen Eigenwert.

b) Jede reelle symmetrische Matrix hat einen reellen Eigenwert.

Beweis:
Sei B ON-Basis von V (in einem euklidischen Raum gibt es das). Nun gilt:

$$\varphi \,\text{selbstadjungiert} \Leftrightarrow A = {}_B[\varphi]_B = \overline{A}^{\text{tr}} = A^{\text{tr}}$$

beachte Fall i), d.h. $K = \mathbb{R}$
Eigenwerte von φ sind Eigenwerte von A
Sei nun $W = \mathbb{C}^{n\times 1}$ mit Standardbasis B'
definiere dann:

$$\begin{aligned} \psi\colon W &\rightarrow W \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

und

$$\Psi(x,y) = x^{\text{tr}} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$$

Dann ist $(\mathbb{C}^{n\times 1}, \Psi)$ unitärer Raum und ${}_B[\psi]_{B'} = A$. Weiterhin ist ψ selbstadjungiert bezüglich Ψ, denn

$$\begin{aligned} \Psi(\psi(x),y) &= \Psi(Ax,y) = (Ax)^{\text{tr}} \cdot \overline{y} \\ &\underset{\text{nach Vor.}}{=} x^{\text{tr}} \cdot \overline{Ay} = \Psi(x,\psi(y)) \end{aligned}$$

Sei $t \in \mathbb{C}$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A. t existiert nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Beweis: siehe Analysis II). Dann ist t Eigenwert von ψ selbstadjungiert. Nach der Folgerung gilt: $t = \overline{t} \Rightarrow t \in \mathbb{R}$. Also hat φ reellen Eigenwert.

□

Bemerkung

Für $n = 2$ kann man das direkt nachrechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

Es ist nun:

$$\chi_A = \det(XE_2 - A) = X^2 - \underbrace{(a+b)}_{\text{Spur A}} X + \underbrace{(ab - c^2)}_{\det A}$$

Nullstellen sind nun (vergleiche Mittelstufe):

$$\begin{aligned} t_1, t_2 &= \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - 4(ab - c^2)} \\ &= \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(a-b)^2 + 4c^2)}_{\geq 0}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

§5 Der Spektralsatz

Satz 1 (Spektralsatz)

Ist (V, Φ) n-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, dann gibt es eine ON-Basis aus Eigenvektoren von φ, wenn

a) (im Fall (V, Φ) euklidisch) φ selbstadjungiert

b) (im Fall (V, Φ) unitär) φ normal

ist.

Beweis:

1. Richtung siehe §4 Satz 1 zu zeigen also noch die 2. Richtung.
Sei also φ selbstadjungiert bzw. normal. Führe nun Induktion nach $n = \dim V$ durch.
$n = 1$: trivial
Sei also $n > 1$
Sei w_1 ein Eigenvektor von φ. Ist (V, Φ) euklidisch, dann existiert w_1 nach §4 Satz 2, ist (V, Φ) unitär, existiert w_1 nach dem Fundamentalsatz der Algebra.
Setze:

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{\Phi(w_1, w_1)}} \cdot w_1$$

dann ist v_1 normiert und es gilt $\varphi(v_1) = t_1 v_1$ mit $t_1 \in K$
Also ist $U = \langle v_1 \rangle$ φ-invariant. Nach Lemma 1 ist $U^\perp$ φ^*-invariant.

Im Fall a) ist $\varphi = \varphi^*$, also U auch φ-invariant.
Im Fall b) ist v_1 auch Eigenvektor von φ^* (§4 Lemma 2) zum Eigenwert $\bar{t}_1$. $U = \langle v_1 \rangle$ ist also φ^*-invariant, also $U^\perp$ φ^{**}-invariant, da φ normal ist. D.h. $U^\perp$ ist φ-invariant.
In jedem Fall ist $U^\perp$ φ-invariant.

Wir wissen:

$$\underbrace{\dim U}_{1} + \underbrace{\dim U^\perp}_{n-1} = \underbrace{\dim V}_{n} + \underbrace{\dim(V^\perp \cap U)}_{0}.$$

Also ist $U \cap U^\perp = \emptyset$, d.h. $V = U \oplus U^\perp$
Dann ist $(U^\perp, \Phi|_{U^\perp \times U^\perp})$ $(n-1)$-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Raum.
$\varphi|_{U^\perp} \colon U^\perp \to U^\perp$ ist ein Endomorphismus von $U^\perp$, da $U^\perp$ φ-invariant ist.
Also ist $\varphi|_{U^\perp}$ wie φ selbstadjungiert bzw. normal.

Nach Induktionsannahme hat $U^\perp$ eine ON-Basis aus Eigenvektoren $(v_2, \ldots, v_n)$ von $\varphi|_{U^\perp}$. Dann besteht $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von φ.

$\square$

Bemerkung

Für Matrizen bedeutet der Spektralsatz:
Sei B ON-Basis von V, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $A =_B [\varphi]_B$
φ selbstadjungiert bzw. normal bedeutet:

Fall (i) $A = A^{\mathrm{tr}}$

Fall (ii) $A \cdot \overline{A}^{\mathrm{tr}} = \overline{A}^{\mathrm{tr}} \cdot A$

Nach dem Spektralsatz existiert eine ON-Basis B' aus Eigenvektoren:

$$_{B'}[\varphi]_{B'} = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n) = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

mit $P = {}_{B'}[\mathrm{Id}]_{B'} \in \mathrm{GL}(n, K)$ und es gilt:

$$E_n = [\Phi]_{B'} = P^{\mathrm{tr}}[\Phi]_B \overline{P} = P^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{P}.$$

Folgerung

Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert wegen $A^{\mathrm{tr}} = A$
$P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $P^{\mathrm{tr}} \cdot P = E_n$ und $P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$
Falls $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert wegen $A \cdot \overline{A}^{\mathrm{tr}} = \overline{A}^{\mathrm{tr}} \cdot A$
$P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $P^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{P} = E_n$ und $P^{-1} \cdot A \cdot \overline{P} = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$

Definition (Orthogonalität und Unitärität)

$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **orthogonal**, wenn $P^{\mathrm{tr}} \cdot P = E_n$
$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **unitär**, wenn $\overline{P}^{\mathrm{tr}} \cdot P = E_n$

(d.h. $P^{-1} = P^{\mathrm{tr}}$ bzw. $P^{-1} = \overline{P}^{\mathrm{tr}}$)
$P = [p_1, \ldots, p_n]$
$P^{\mathrm{tr}} \cdot P = [p_i^{\mathrm{tr}} p_j] = [\delta_{ij}]$

beachte P orthogonal	$\Leftrightarrow$	die Spalten von P bilden ON-Basis von $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezüglich Standardskalarprodukt
beachte P unitär	$\Leftrightarrow$	die Spalten von P bilden ON-Basis von $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezüglich Standardskalarprodukt

Beachte P orthogonal oder unitär $\Rightarrow$ P normal.

Folgerung (Spektralsatz für Matrizen)

Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch (oder $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal) so gibt es $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal (bzw. $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär) mit

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n) = \overline{P}^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot P$$

Folgerung (Spektralsatz für symmetrische Bilinearformen bzw. hermitesche Formen)

Vor.: Sei (V, Φ) n-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Raum
Sei Ψ: $V \times V \to K$ zusätzliche symmetrische Bilinearform mit $K = \mathbb{R}$ (bzw. hermitesche Form mit $K = \mathbb{C}$)

Beh.: Dann gibt es eine ON-Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ (bezüglich Φ), d.h. $\Phi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ mit $[\Psi]_B = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n)$ und $\Psi(v_i, v_j) = \delta_{ij} t_i$

Beweis:

Sei $B' = (v_1', \ldots, v_n')$ beliebig ON-Basis (bezüglich Φ)
$[\Psi]_{B'} = A \in K^{n \times n}$ symmetrisch bzw. hermitesch $\overline{A} = A^{\mathrm{tr}}$
(A hermitesch $A = \overline{A}^{\mathrm{tr}} \Rightarrow A$ normal)
Nach Folgerung 1 (Spektralsatz für Matrizen) existiert $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ orthogonal bzw. unitär mit

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n) = \overline{P}^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot P = [\Psi]_B$$

wobei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ definiert ist durch

$$\overline{P} = {}_{B'}[\mathrm{Id}]_B \cdot P = [p_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n} \ (v_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{p}_{ij} v_i')$$

□

Definition (quadratische Form)

q: $V \to K$ heißt **quadratische Form** (V K-Vektorraum, $\dim V < \infty$), wenn es eine Bilinearform Φ: $V \times V \to K$ gibt mit $q(v) = \Phi(v, v)$.

Bemerkung

1) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ K-Basis von V und q: $V \to K$ quadratische Form, so ist

$$q\left(\sum x_i v_i\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j,$$

wenn $[a_{ij}] = [\Phi]_B$
Φ zugehörige Bilinearform, $\Phi(v_i, v_j) = a_{ij}$

2) Char $K \neq 2$ und q: $V \to K$ quadratische Form , dann existiert auch symmetrische Bilinearform Ψ mit $q(v) = \Psi(v, v)$, denn ist Φ nicht symmetrisch, dann definiere

$$\Psi(v, w) = \frac{1}{2} \cdot (\Phi(v, w) + \Phi(w, v)) \qquad \Psi(v, v) = \Phi(v, v) = q(v)$$

Beispiel

$q\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 \qquad \text{quadratische Form} \quad V \to \mathbb{R}$$

$\Psi\colon \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot y = 3x_1y_1 - 1x_1y_2 - 1x_2y_1$$

$$q(x) = x^{\mathrm{tr}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = x^{\mathrm{tr}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$$

Folgerung (Spektralsatz für quadratische Formen)

Ist (V,Φ) n-dimensionaler euklidischer Raum, $q\colon V \to \mathbb{R}$ quadratische Form, dann existiert ON-Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i^2$$

Beispiel: Hauptachsentransformation homogener Fall

q wie oben, Ψ ebenso

$$[\Psi]_S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S = (e_1, e_2, e_3)$$

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, q(x) = 4 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 = 4 \right\}.$$

Es gibt ON-Basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$[\Psi]_B = \operatorname{Diag}(t_1, t_2, t_3) = P^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \text{mit } P = {}_S[\mathrm{Id}]_B$$

$$Q = \left\{ \sum y_i v_i \,\middle|\, t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_3^2 = y \right\} \qquad t_i \text{ sind die Eigenwerte von } A$$

$$\chi_A = \det(XE_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X-3 & 1 & 0 \\ 1 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix} = (X-2)^2 \cdot (X-4)$$

$$t_1 = t_2 = 2 \quad t_3 = 4$$

$$Q = \left\{ \sum y_i v_i \,\middle|\, 2y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 = 4 \right\} = \left\{ \sum y_i v_i \,\middle|\, \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} + y_3^2 = 1 \right\}.$$

Dies ist ein Rotationsellipsoid mit Achsen $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1$.
v_1, v_2, v_3 können als normierte Eigenvektoren von A gewählt werden.

§6 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Vor: $\Phi\colon V \times V \to K$ symmetrische Bilinearform oder hermitesche Form

Definition (Isometrie)

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt **Isometrie** von (V, Φ), wenn

(i) φ bijektiv

(ii) $\Phi(\varphi(v), \varphi(w)) = \Phi(v, w) \ \forall\, v, w \in V$

$\mathcal{O}(V, \Phi) = \{\varphi\colon V \to V \,|\, \varphi \,\text{Isometrie}\}$
Ist (V, Φ) euklidischer Raum, so heißt $\varphi \in \mathcal{O}(V, \Phi)$ **orthogonale Abbildung**.
Ist (V, Φ) unitärer Raum, so heißt $\varphi \in \mathcal{O}(V, \Phi)$ **unitäre Abbildung**.
$[\Phi]_B = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1)$, $K = \mathbb{R}$, so heißt $\varphi \in \mathcal{O}(V, \Phi)$ **Lorentz-Abbildung**.

Bemerkung

a) $\mathcal{O}(V, \Phi)$ ist stets eine Gruppe.

b) Ist Φ nicht ausgeartet, so braucht man nicht zu fordern, daß φ bijektiv ist. Beides folgt aus (ii).

c) Φ sei nicht ausgeartet, $\dim V < \infty$, dann ist $\varphi \in \mathcal{O}(V, \Phi) \Leftrightarrow \varphi^* = \varphi^{-1}$, denn

$$\Phi(\varphi(v), \varphi(w)) = \Phi(v, \varphi^* \circ \varphi(w)) = \Phi(v, w) \qquad \forall\, v, w \in V$$

$\Rightarrow \varphi^* \circ \varphi(w) = w \Rightarrow \varphi^* = \varphi^{-1}$

d) Sei Φ nicht ausgeartet.
$[\Phi]_B = F \in K^{n \times n}, B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i, \qquad {}_B[\varphi]_B = A$$

$$\begin{aligned} \Phi(v, w) &= x^{\mathrm{tr}} F \overline{y} \\ \Phi(\varphi(v), \varphi(w)) &= (Ax)^{\mathrm{tr}} F \overline{Ay} \\ &= x^{\mathrm{tr}} \cdot (A^{\mathrm{tr}} F\, \overline{A}) \cdot \overline{y} \end{aligned}$$

$$\varphi \in \mathcal{O}(v, \Phi) \Leftrightarrow F = A^{\mathrm{tr}} \cdot F \cdot \overline{A}$$

Spezialfall: $F = E_n, B$ ON-Basis

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{O}(V, \Phi) \ \Leftrightarrow \ A^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{A} &= E_n \\ \Leftrightarrow \ \overline{A^{-1}} &= A^{\mathrm{tr}} \end{aligned}$$

Folgerung

Φ nicht ausgeartet, $\dim V < \infty$, $\varphi \in \mathcal{O}(V, \Phi) \Rightarrow \varphi$ normal (weil $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi$)
Nach Spektralsatz gilt:
(V, Φ) unitärer Raum, $\dim V < \infty$, so: φ unitär $\Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ A \cdot A^{\mathrm{tr}} = E_n\}$ **orthogonale Gruppe**
$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} |\ A \cdot \overline{A^{\mathrm{tr}}} = E_n\}$ **unitäre Gruppe**

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ist isomorph zu $\mathcal{O}(V, \Phi)$, falls (V, Φ) n-dimensionaler euklidischer Raum.

$\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ ist isomorph zu $\mathcal{O}(V, \Phi)$, falls (V, Φ) n-dimensionaler unitärer Raum.

Der Isomorphismus lautet $\varphi \mapsto {}_B[\varphi]_B$, falls B ON-Basis von V

Satz 1 (Eigenschaften unitärer Abbildungen)

Sei (V, Φ) n-dimensionaler unitärer Raum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$

a) φ unitär $\Rightarrow V$ hat ON-Basis aus Eigenvektoren von φ und alle Eigenvektoren von φ haben Betrag 1

b) $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ mit $P^{-1}A\,P = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n)$ mit $t_i \cdot \overline{t_i} = |t_i|^2 = 1$

c) φ unitär $\Leftrightarrow \varphi$ normal und alle Eigenwerte t_i von φ erfüllen $|t_i| = 1$

Beweis:

a) Nach Bemerkung c) ist $\varphi^* = \varphi^{-1}$, also φ normal; wende Spektralsatz an. Sei t Eigenwert von φ ($\varphi(v) = t \cdot v$ mit $v \neq \underline{0}$)
$\underbrace{\Phi(v, v)}_{\neq 0} = \Phi(\varphi(v), \varphi(v)) = \varphi(t \cdot v, t \cdot v) = t \cdot \overline{t} \cdot \underbrace{\Phi(v, v)}_{\neq 0} \Rightarrow t \cdot \overline{t} = 1$

b) folgt aus a) (bzw. Spektralsatz für Matrizen)

c) $\Rightarrow$): siehe a)

$\Leftarrow$): φ sei normal und alle Eigenwerte haben Betrag 1.
Nach Spektralsatz existiert eine ON-Basis B mit ${}_B[\varphi]_B = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n); t_i \cdot \overline{t_i} = 1$
${}_B[\varphi^*]_B = \overline{{}_B[\varphi]_B}^{tr} = \mathrm{Diag}(\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_n) = \mathrm{Diag}(t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) = {}_B[\varphi^{-1}]_B$
Also: $\varphi^* = \varphi^{-1} \quad \Rightarrow \quad$ Beh.

□

Satz 2 (Eigenschaften orthogonaler Abbildungen)

Sei (V, Φ) n-dimensionaler euklidischer Raum. $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ sei orthogonal.
Dann gilt:

a) Ist $t \in \mathbb{R}$ Eigenwert von φ, so ist $t = \pm 1$.

b) Es gibt eine ON-Basis B von V mit

$$_B[\varphi]_B = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, D(\theta_1), \dots, D(\theta_r))$$

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Beweis:

a) $\varphi(v) = t \cdot v$ und $v \neq \underline{0}, t \in K = \mathbb{R}$
$\underbrace{\Phi(v,v)}_{\neq 0} = \Phi(\varphi(v), \varphi(v)) = \Phi(tv, tv) = t^2 \cdot \underbrace{\Phi(v,v)}_{\neq 0} \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow$ Beh.

b) Induktion nach n

$n = 1$: trivial

$n > 1$: 2 Fälle

1. Fall: φ habe Eigenwert in $\mathbb{R}$.
Sei nun v_1 ein normierter Eigenvektor, $U = \langle v_1 \rangle$
$U^\perp$ ist φ^* -invariant, also auch φ^{-1}-invariant
$\Rightarrow$[2] $U^\perp$ φ-invariant.
Wende nun Induktionsannahme auf $(U^\perp, \Phi|_{U^\perp \times U^\perp})$ und $\varphi|_{U^\perp}$ an:
es gibt Basis $B' = (v_2, \dots, v_n)$ mit $[\varphi|_{U^\perp}] = \mathrm{Diag}(1, \dots, -1, D(\theta_1), \dots, D(\theta_r))$
Setze $B = (v_1, \dots, v_n)$

2. Fall: φ habe keinen reellen Eigenwert. Sei $B' = (v_1', \dots, v_n')$ beliebige ON-Basis.
$_{B'}[\varphi]_{B'} = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonale Matrix ($A^{-1} = A^{\mathrm{tr}}$)
Fasse A auf als Matrix in $\mathbb{C}$:
A ist unitär $\Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ hat A also Eigenwerte und zwar nach Satz 1 solche vom Betrag 1.
$t = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$ sei einer.
$z \in \mathbb{C}$ sei normiert mit $|z|^2 = 2$
$z = x + i \cdot y \quad x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
$A\overline{z} = \overline{t \cdot z}$ also auch $\overline{t}$ ist Eigenwert mit Eigenvektor $\overline{z}$.
Nach Vor. ist $t \neq \overline{t}; z$ und $\overline{z}$ sind als Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal (A normal)
$0 = z^{\mathrm{tr}} \cdot \overline{\overline{z}} = z^{\mathrm{tr}} \cdot z \;\; (z = x + i \cdot y)$
$0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j + i \cdot y_j)(x_j + i \cdot y_j) = \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 - y_j^2) + 2i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j.$
Also: $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \wedge \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 0$
$2 = |z \cdot \overline{z}|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 + y_j^2) = 2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

[2]Lemma: $\dim(U) < \infty, U$ φ^{-1}-invariant $\Rightarrow U$ φ-invariant

also: $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $\quad \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 1$
Setze: $v_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j v'_j \quad v_2 = \sum_{j=1}^{n} y_j v'_j$
Dann: $\Phi(v_1, v_2) = 0 \quad \Phi(v_i, v_i) = 1$ mit $i = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
A(x+iy) &= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))(x+iy)\\
Ax &= \cos(\theta)x - \sin(\theta)y\\
Ay &= \sin(\theta)x + \cos(\theta)y\\
\varphi(v_1) &= \cos(\theta)v_1 - \sin(\theta)v_2\\
\varphi(v_2) &= \sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2
\end{aligned}
$$

Setze $U = \langle v_1, v_2 \rangle$. Wende Induktion an auf $U^\perp$ ON-Basis $B' = (v_3, \ldots, v_n)$ mit $[\varphi|_{U^\perp}] = \mathrm{Diag}(D(\theta_2), \ldots, D(\theta_r))$
Setze $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ und $\theta_1 = -\theta$.

$\square$

§7 Polardarstellung

(V, Φ) n-dimensionaler unitärer Raum

$n = 1$ ($V = \mathbb{C}$)		allgemein
$z \in \mathbb{C}$	$(\leftrightarrow)$	$\mathbb{C}^{n\times n} \leftarrow \varphi \in \mathrm{End}(V)$
$\overline{z}$		$A^* = \overline{A^{\mathrm{tr}}} \leftarrow \varphi^*$ (ON-Basis nötig)
$z = \overline{z} \in \mathbb{R}$	$(\leftrightarrow)$	φ selbstadjungiert
Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form $z = x + iy$		**Satz 1** Jedes $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ mit $\varphi_1^* = \varphi_1, \varphi_2^* = \varphi_2$
$\lvert z \rvert = 1, z \in \mathbb{C}$	$(\leftrightarrow)$	$\varphi \cdot \varphi^* = \mathrm{Id} \Leftrightarrow \varphi$ unitär

Satz 1 (additive Selbstadjungierten-Zerlegung)

Jedes $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ mit $\varphi_1^* = \varphi_1, \varphi_2^* = \varphi_2$.

Beweis:

a) Eindeutigkeit:
angenommen $\varphi = \varphi_1 + i \cdot \varphi_2 \varphi_j^* = \varphi_j, j = 1, 2$ dann
$\varphi^* = \varphi_1 + \overline{i} \cdot \varphi_2$
$\Leftrightarrow \varphi^* = \varphi_1 - i \cdot \varphi_2$
addiere die Gleichungen: $\Rightarrow \varphi + \varphi^* = 2\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1 = (\frac{\varphi+\varphi^*}{2})$

Es folgt $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \\ \varphi_2 = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*) \end{array} \right\}$, also φ eindeutig bestimmt.

b) Existenz:
Definiere zu φ ein $\varphi_1 := \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*)$ und $\varphi_2 := \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*)$, dann folgt $\varphi_1^* = \varphi_1$, $\varphi_2^* = \varphi_2$ und $\varphi = \varphi_1 + i \cdot \varphi_2$.

□

Definition (positiv (Semi-)Definitheit von Endomorphismen)

$\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt **positiv definit**, wenn $\varphi^* = \varphi$ und $\Phi(\varphi(v), v) > 0$ für alle $v \neq 0$.
$\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt **positiv semidefinit**, wenn $\varphi^* = \varphi$ und $\Phi(\varphi(v), v) \geq 0$ für alle $v \neq 0$.

Bemerkung

$\varphi \in \mathrm{End}(V), \varphi \geq 0$ d.h. positiv definit
$\Leftrightarrow \Phi_\varphi(v, w)(= \Phi(\varphi(v), w))$ bilinear und Φ positiv definit

Beachte

Φ_φ ist (mit Φ) hermitesche Form, da $\varphi^* = \varphi$ und
$\Phi_\varphi(v, w) = \Phi(\varphi(v), w) = \Phi(v, \varphi^*(w)) = \overline{\Phi(\varphi(w), v)} = \overline{\Phi_\varphi(w, v)}$

Lemma 1

Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, dann gilt:
$\varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi$ normal und alle Eigenwerte von φ sind > 0.
$\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi$ normal und alle Eigenwerte von φ sind ≥ 0.
φ unitär $\Leftrightarrow \varphi$ normal und alle Eigenwerte haben Betrag 1 (siehe §6).

Beweis:

$\Rightarrow$): Wegen $\varphi^* = \varphi$ ist φ normal, also existiert ON-Basis $B = (v_1, ldots, v_n)$ (Spektralsatz) mit

$${}_B[\varphi]_B = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n) =_B [\varphi]_B = \mathrm{Diag}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \quad \text{also } t_i \in \mathbb{R}$$

$$t_i = \Phi(t_i v_i, v_i) = \Phi(\varphi(v_i), v_i) > (\text{bzw. } \geq) \, 0, \text{beachte } v_i \neq 0$$

$\Leftarrow$): Nach Spektralsatz existiert $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ON-Basis mit

$${}_B[\varphi]_B = \mathrm{Diag}(t_1, \ldots, t_n) \qquad t_i > (\text{bzw. } \geq) \, 0.$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V.$$

$$\Phi(\varphi(v), v) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} x_i t_i v_i, \sum_{i=1}^{n} x_j v_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \underbrace{x_i x_j}_{\geq 0} \geq 0, v \neq 0$$

□

Lemma 2

Ist $\eta \geq 0, \eta \in \text{End}(V)$ und $k \in \mathbb{N}$,
so existiert eindeutig $\xi \in \text{End}(V), \xi \geq 0$ mit $\xi^k = \eta$

Beweis:

Es existiert ON-Basis $B = (v_1, ...v_n)$ mit ${}_B[\varphi]_B =$ diag $(t_1, ...t_n)$ und $t_i \geq 0$.
Definiere nun ξ durch ${}_B[\xi]_B =$ diag $(\sqrt[k]{t_1}, ... \sqrt[k]{t_n})$, so gilt: $\xi^k = \eta$

□

Satz 2 (Polardarstellung)

Jedes $\varphi \in \text{End}(V)$ hat Darstellung in der Form $\varphi = \varepsilon \circ \eta$ mit ε und $\eta \geq 0$ (d.h. η positiv semidefinit), dabei ist es eindeutig bestimmt und ε eindeutig, wenn φ invertierbar. (**Polardarstellung** von φ / **Polarzerlegung** von φ)

Beweis:

Eindeutigkeit: Angenommen $\varphi = \varepsilon \circ \eta$ mit $\varepsilon^* = \varepsilon^{-1}$ und $\eta \geq 0, \varphi^* = \eta^* \circ \varepsilon^* = \eta \circ \varepsilon^{-1}$.
Also $\varphi^* \circ \varphi = \eta \circ \varepsilon^{-1} \circ \varepsilon \circ \eta = \eta^2$.
Allgemein ist $\varphi^*\varphi \geq 0$, denn $\Phi(\varphi^*\varphi(v), v) = \Phi(\varphi(v), \varphi^{**}(v) \geq 0$ und $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi$, also $\varphi^*\varphi \geq 0$.
Nach Lemma 2 existiert $\eta \geq 0$ mit $\varphi^*\varphi = \eta^2$.
$\Phi(\varphi(v), \varphi(v)) = \Phi(v, \varphi^*\varphi(v)) = \Phi(v, \eta^2(v) = \Phi(\eta(v), \eta(v))$, also $\varphi = 0 \Leftrightarrow \eta(v) = 0$,
also $\text{Kern}\varphi = \text{Kern}\eta$
φ bijektiv $\Leftrightarrow \eta$ bijektiv.

Existenz: Sei φ bijektiv, also auch η (gesucht ε mit $\varphi = \varepsilon \circ \eta$) setze einfach $\varepsilon := \varphi \circ \eta^{-1}$,
dann ist ε unitär.

Beweis hiervon: $\varepsilon^* = \eta^{-1*} \circ \varphi^* = \eta^{-1} \cdot \varphi^*$, da $\eta^* = \eta$ $\varepsilon^*\varepsilon = \eta^{-1} \underbrace{\varphi^*\varphi}_{=\eta^2} \eta^{-1} = \text{id}$, also ε unitär.

Für den Fall φ nicht bijektiv: siehe Übung

□

Kapitel 2

Normalformen von Matrizen und Elementarteiler

§1 Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen

R kommutativer Ring (mit Eins)
$\mathrm{GL}(n, R) = \{A \in R^{n\times n} | \exists A^{-1} \in R^{n\times n}\} \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$

Beispiel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}), \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$$

Definition (Äquivalenz und Ähnlichkeit)

$A, A' \in R^{m\times n}$ **äquivalent** $:\Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}(m, R)$ und $Q \in \mathrm{GL}(n, R)$ mit $P \cdot A \cdot Q = A'$
$A, A' \in R^{n\times n}$ **ähnlich** $:\Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}(n, R)$ mit $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$
Offensichtlich A, A' ähnlich $\Rightarrow A, A'$ äquivalent.

Bemerkung 1

φ: $V \to W$ linear; V, W K-Vektorräume endlicher Dimension
B, B' Basen von V; C, C' Basen von W
${}_{C'}[\varphi]_{B'} = P \cdot {}_C[\varphi]_B \cdot Q$, also ${}_{C'}[\varphi]_{B'}$ und ${}_C[\varphi]_B$ äquivalent
$P = {}_{C'}[\mathrm{Id}]_C, Q = {}_B[\mathrm{Id}]_{B'}$
für $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ gilt: ${}_{B'}[\varphi]_{B'}$ und ${}_B[\varphi]_B$ sind ähnlich.

Bemerkung 2

$A, A' \in K^{m\times n}$; K Körper A, A' äquivalent $\Leftrightarrow A'$ entsteht aus A durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen (Jede Zeilen- bzw. Spaltenoperation kann man durch Multiplikation von Elementarmatrizen ersetzen).

Klassifikationsprobleme

a) Entscheide, ob $A, A' \in R^{m\times n}$ äquivalent (bzw. ähnlich) sind. (z.B. möglich über Normalform)

b) Gebe eine Menge $M \subseteq R^{m\times n}$ von **Normalformen** an, so daß jedes $A \in R^{m\times n}$ zu genau einer der Matrizen aus M äquivalent (bzw. ähnlich $m = n$) ist. Dazu Algorithmus $\rightarrow$ Normalform $(A) \in M$.

Satz 1 (Äquivalenz von Matrizen über einem Körper)

Ist K Körper, so gilt $A, A' \in K^{m\times n}$ äquivalent $\Leftrightarrow$ Rg $A =$ Rg A'.

Jedes $A \in K^{m\times n}$ ist äquivalent zu genau einer Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow r \Rightarrow \operatorname{Rg} A = r$$

Beweis:

siehe LA I

$\square$

Bemerkung

$$A, A' \in K^{n\times n} \text{ ähnlich} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Rg } A = \text{ Rg } A' \\ \det A = \det A' \\ \text{Spur } A = \text{ Spur } A' \text{ (Multiplikation der Diagonalen)} \\ \chi_A = \chi_{A'} \text{ (charakteristisches Polynom)} \end{array}$$

Die Umkehrung hiervon gilt nicht!

Definition (charakteristische Matrix)

$A \in K^{n\times n}$ Körper
$XE_n - A \in K[X]^{n\times n} = R^{n\times n}$ heißt **charakteristische Matrix** von A.
($\chi_A = \det(XE_n - A)$ ist das **charakteristische Polynom** = Determinante der charakteristischen Matrix.)

Lemma 1

Sei $H \in K[X]$. Dann kann man H eindeutig schreiben als

$$H = X^r \cdot H_r + X^{r-1} \cdot H_{r-1} + \ldots + X \cdot H_1 + H_0$$

(X Matrix) mit $H_i \in K^{n\times n}$; für $A \in K^{n\times n}$ setze

$$(H \cdot H')(A) = (H(A) \cdot H')(A)$$

Beweis:

$$H = X^r A_r + \ldots + X A_1 + A_0$$

$$H' = X^s B_s + \ldots + X B_1 + B_0$$

dabei sind $A_i, B_j \in K^{n\times n}$

$$H \cdot H' = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} X^i \cdot A_i \cdot X^j \cdot B_j = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} X^{i+j} \cdot A_i \cdot B_j$$

setze A ein:

$$(H \cdot H')(A) = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} A^{i+j} \cdot A_i \cdot B_j$$

dagegen:

$$H(A) \cdot H' = \sum_{i=0}^{r} A^i \cdot A_i \sum_{j=0}^{s} X^j \cdot B_j = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} X^j \cdot A^i \cdot A_i \cdot B_i$$

A einsetzen:

$$(H(A) \cdot H')(A) = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} \underbrace{A^j \cdot A^i}_{=A^{i+j}} \cdot A_j \cdot B_j$$

$\square$

Warnung

Es gilt i.a. nicht $(H \cdot H')(A) = H(A) \cdot H'(A)$ (gilt z.B. über Körpern schon), d.h. $K[X]^{n\times n} \to K^{n\times n}$ mit $H \mapsto H(A)$ ist kein Ringhomomorphismus.

Beispiel

$$H = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} = X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{H_0}$$

$$H^2 = H \cdot H = \begin{pmatrix} X^2 & 0 \\ 0 & X^2 \end{pmatrix} = X^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + X \cdot 0 + 0$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist

$$H(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^2(A) = A^2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq H(A)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$H(A) \cdot H = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & X \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $((H(A)) \cdot H)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Satz 2 (Satz von Frobenius)

K Körper; $A, A' \in K^{n\times n}$ ähnlich $\Leftrightarrow$ $XE_n - A$, $XE_n - A' \in K[X]^{n\times n}$ äquivalent.

Beweis:

$\Rightarrow$): Sind $A, A' \in K^{n\times n}$ ähnlich, d.h. $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ mit $P \in \mathrm{GL}(n, K)$, so folgt

$$XE_n - A' = XE_n - P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1}(XE_n - A)P$$

mit $P \in \mathrm{GL}(n, K[X])$, d.h. $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind auch ähnlich, insbesondere äquivalent.

$\Leftarrow$): $XE_n - A' = F^{-1}(XE_n - A)G, \quad F, G \in \mathrm{GL}(n, K[X])$
$\Rightarrow F(XE_n - A') = (XE_n - A)G$
setze A ein (Lemma 1: $H \cdot H')(A) = (H(A) \cdot H')(A))$
$(F(A)(XE_n - A'))(A) = ((\underbrace{AE_n - A}_{=0})G)(A)$
$\Rightarrow 0 = (X \cdot F(A) - F(A) \cdot A')(A) = A \cdot F(A) - F(A) \cdot A' \quad$ also $A \cdot F(A) = F(A) \cdot A'$
zeige noch: $F(A) \in \mathrm{GL}(n, K)$, dann ist $A' = F(A)^{-1} \cdot A \cdot F(A)$
Nach Vor. ist $F \in \mathrm{GL}(n, K[X])$, d.h. es existiert $F' = \sum_{i=0}^{r} X^i \cdot F_i' \in \mathrm{GL}(n, K[X])$ mit $F \cdot F' = E_n$.
Dann:

$$\begin{aligned} E_n &= (F \cdot F')(A) = (F(A) \cdot \sum_{i=0}^{r} X^i \cdot F_i')(A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{r} X^i \cdot F(A) \cdot F_i' \right)(A) \\ &= \sum_{i=0}^{r} A^i \cdot F(A) \cdot F_i' \qquad A^i \cdot F(A) = F(A) \cdot A'^i \\ &= \sum_{i=0}^{r} F(A) \cdot A'^i \cdot F' = \underbrace{F(A)}_{\in K^{n\times n}} \cdot \underbrace{F'(A)}_{\in K^{n\times n}} \end{aligned}$$

Also $F(A) \in \mathrm{GL}(n, K) \Rightarrow A, A'$ ähnlich

□

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A, A'$ ähnlich, da gleiche Eigenwerte.

$XE_2 - A = \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$ äquivalent zu $\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ x-2 & x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (XE_2 - A)$

$\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ x-2 & x-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} = XE_2 - A'$

also sind $XE_2 - A$ und $XE_2 - A'$ äquivalent, also (nach Frobenius) müssen A, A' ähnlich sein.

Corollar

Ist $F(XE_n - A) \cdot G = XE_n - A' \quad A, A' \in K^{n \times n}$, so ist $F(A)^{-1} \cdot A \cdot F(A) = A'$.
(insbesondere: $F(A) \in \mathrm{GL}(n, K)$)

Fragen

1) Wann sind $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ äquivalent?

2) Ist jede Matrix $H \in K[X]$ äquivalent zu einer diagonalen Matrix und inwieweit sind die Diagonaleinträge eindeutig?

Bemerkung

Die gleichen Fragen sind für Matrizen über $\mathbb{Z}$ interessant. Deshalb verallgemeinern wir:

§2 Euklidische Ringe

Definition (Integritätsbereich)

Ein kommutativer Ring R mit Eins heißt **Integritätsring** oder **Integritätsbereich**, wenn gilt:

$$a, b \in R \text{ und } a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0.$$

Beispiele

- ganze Zahlen
- $K[X]$
- Körper

Gegenbeispiel

$\mathbb{Z}_6$ ist keiner $(2 \cdot 3 = 0)$.

Voraussetzung

Im Folgenden sei R ein Integritätsring.

Definition (Einheit und Irreduzibilität)

$$
\begin{aligned}
a|b \ \text{(in } R) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists a' \in R \ \text{mit} \ b = a \cdot a'. \\[1em]
a \sim b \ (\textbf{assoziiert}) \quad &\Leftrightarrow \quad a|b \wedge b|a. \\[1em]
a \ \text{heißt } \textbf{Einheit} \quad &\Leftrightarrow \quad a \sim 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists a' \in R \ \text{mit} \ a \cdot a' = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad a \ \text{ist invertierbar}\,. \\[1em]
a \,\text{a heißt } \textbf{irreduzibel} \quad &\Leftrightarrow \quad (a = p \cdot q \wedge \\
&\quad\ \ p, q \in R \Rightarrow p \text{ oder } q \text{ Einheit und } a \text{ ist keine Einheit}).
\end{aligned}
$$

Beispiele

$\mathbb{Z}$: Einheiten sind $+1, -1$
p irreduzibel $\Leftrightarrow p$ Primzahl $\vee -p$ Primzahl

$K[X]$: K Körper
Einheiten: f Einheit $\Leftrightarrow f$ hat Grad $0 \Leftrightarrow f = c \in K \setminus \{0\}$
$a_1 X + a_2$ ist (für $a_1 \neq 0$) irreduzibel.
Ebenso: $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
$X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ ist reduzibel.

Definition (ggT)

$d \in R$ heißt ein ggT (**größter gemeinsamer Teiler**) von $a_1, \ldots, a_n$

(in Zeichen: $d \in \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$), wenn:

(i) $d|a_i$ für $i = 1, \ldots, n$

(ii) $x|a_i$ für $i = 1, \ldots, n \Rightarrow x|d$

Beispiele

In $\mathbb{Z}$: ggT$(4,6)=\{-2,2\}$

In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]=\{a+bi\sqrt{5}|a,b\in\mathbb{Z}\}$ (Zahlengitter):

$$6=2\cdot 3=(1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})$$

ggT$(6,2(1+i\sqrt{5}))$ existiert nicht, da gilt:

$$2\nmid 1+i\sqrt{5} \text{ und } 1+i\sqrt{5}\nmid 2.$$

(Es gibt gemeinsame Teiler, aber keinen größten.)

Bemerkung 1 (Lemma von Ernst E. Kummer)

Es gibt nicht in jedem Integritätsring ggT (Pahlings: „... welch ein Kummer“).

Bemerkung 2

Ein ggT ist, wenn er existiert, bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.
$d,d'\in$ ggT$(a_1,\dots a_n)\Leftrightarrow d=d'\cdot n\quad$ (n Einheit).

Definition (euklidischer Ring)

Ein **euklidischer Ring** ist ein Integritätsring R zusammen mit einer Abbildung

$$\nu\colon R\backslash\{0\}\to\mathbb{N}_0$$

(**Grad- oder Normfunktion**) mit folgender Eigenschaft:
Zu $a,b\in R$ mit $b\neq 0$ existiert stets $q,r\in R$ mit $a=q\cdot b+r$ mit $\nu(r)<\nu(b)$ oder $r=0$.

Beispiele

a) $(\mathbb{Z},|\,|)$ ist euklidischer Ring ($\nu(a)=|a|$)

b) $(K[X],\operatorname{Grad} f)\quad f\in R\backslash\{0\}$ ist euklidischer Ring

c) Jeder Körper ist euklidischer Ring ($\nu(a)=1\ \forall a\neq 0$)

Euklidischer Algorithmus

Sei (R,ν) euklidischer Ring, $a,b \in R$, $a \neq 0$. Dann gibt es:

$$\begin{array}{rcllrcl}
b &=& q_0 a + r_1 & \text{mit} & \nu(r_1) &<& \nu(a) \\
a &=& q_1 r_1 + r_2 & \text{mit} & \nu(r_2) &<& \nu(r_1) \\
r_1 &=& q_2 r_2 + r_3 & \text{mit} & \nu(r_3) &<& \nu(r_2) \\
 & & & \vdots & & & \\
r_{n-2} &=& q_{n-1} r_{n-1} + r_n & & & & \\
r_{n-1} &=& q_n r_n & & & &
\end{array}$$

beachte: $\nu(a) > \nu(r_1) > \ldots > \nu(r_n) \in \mathbb{N}_0$

Beh: Dann ist $r_n \in \operatorname{ggT}(a,b)$.

Beweis:
Es gilt nach der Algorithmus-Vorschrift:

$$\begin{array}{lll}
r_n | r_{n-1} & & \\
r_n | r_{n-2} & \text{und} & r_n = x_n r_{n-1} + y_n r_{n-2} \\
r_n | r_{n-3} & & r_n = x_{n-1} r_{n-2} + y_{n-1} r_{n-3} \\
\vdots & & \vdots \\
r_n | a & & r_n = x' r_1 + y' a \\
r_n | b & & r_n = xa + yb
\end{array}$$

Dies erkennt man, wenn man den rekursiven Aufbau des Algorithmus beachtet. Insbesondere ist dann r_n ein gemeinsamer Teiler von a,b. Durch Rückwärtsauflösen erhält man: $r_n = x_i r_{i-1} + y_i r_{i-2} \quad \forall i$
$\Rightarrow r_n = xa + yb \quad x,y \in R$
Es folgt: Jeder Teiler von a,b teilt auch r_n. Also ist $r_n \in \operatorname{ggT}(a,b)$

□

§3 Invarianteilер

Vor: (R,ν) sei ein euklidischer Ring
z.B. $R = K[X], R = \mathbb{Z}, R = K$ (K Körper)

Definition (R-elementare Zeilen- (Spalten-) Operationen)

Eine R-elementare Zeilen- (Spalten-) Operation einer Matrix $A \in R^{m \times n}$ ist:

(i) Vertauschung von Zeilen (Spalten)

(ii) Addition eines r-fachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen ($r \in R$)

(iii) Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einer Einheit $u \in R$ (d.h. $u^{-1} \in R$)

Satz 1 (Invariantenteilersatz)

Jedes $A \in R^{m\times n}$ läßt sich durch R-elementare Zeilen- und Spaltenoperationen auf die Form

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r & \\ \vdots & \dots & & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } d_i | d_{i+1} \text{ für alle } \ i = 1, \dots, r-1$$

bringen.

Beweis:

Induktion nach m. Ist $A = 0$ setze $r = 0$ und fertig.

Sonst führe folgenden Algorithmus durch:

1) Vertausche Zeilen (Spalten) solange bis $a_{11} \neq 0$ und $\nu(a_{11}) \leq \nu(a_{ij}) \quad \forall i, j \quad a_{ij} \neq 0$

2) Teile mit Rest $a_{1i} = q_i a_{11} + a'_{1i}$ mit $a'_{1i} = 0$ oder $\nu(a'_{1i}) \leq \nu(a_{11})$
   ebenso: $a_{j1} = q_j a_{11} + a'_{j1}$ mit $a'_{j1} = 0$ oder $\nu(a'_{j1}) \leq \nu(a_{11})$
   Addiere $-(q_i)$-fache der 1. Spalte zur i-ten für $i = 2, \dots, n$
   Addiere $-(q_j)$-fache der ersten Zeile zur j-ten für $j = 2, \dots, n$

   Sind nicht alle a'_{1i} und a'_{j1} gleich null, so gehe zu 1). Man erhält neue Matrix $[a'_{ij}]$ mit $0 \leq \nu(a'_{11}) < \nu(a_{11})$. Man kann nur endlich oft $\nu(a_{11})$ verkleinern, so daß man nach endlich vielen Schritten eine Matrix der folgenden Form erhält: (mit $c \in R$)

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   Für $m = 1$ (Induktionsanfang) ist man fertig, sonst ist $* \in R^{(m-1)\times(n-1)}$.
   Nach Induktionsannahme kann man $*$ auf die Form

$$\begin{pmatrix} d_2 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & & d_r & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } d_i | d_{i+1} \ \text{ für } \ i \geq 2$$

   bringen. Ist $c | d_2$ setze $d_1 := c$ fertig. Sonst

3) $c' \in \mathrm{ggT}(c, d_2)$ mit $c' := xc + yd_2$ und $\nu(c') < \nu(c)$, da $c \not| d_2$.

   Führe dann folgende R-elementare Operationen durch:

$$\xrightarrow{A'_{12}(x)} \begin{pmatrix} c & xc & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{21}(y)} \begin{pmatrix} c & \overbrace{xc + d_2 y}^{c'} & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{V'_{12}} \begin{pmatrix} c' & c & & \\ d_2 & 0 & & \\ & & d_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{12}(-\frac{d_2}{c'})} \begin{pmatrix} c' & c & & \\ 0 & -\frac{d_2}{c'} \cdot c & & \\ & & d_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{21}(\frac{c'}{d_2})} \begin{pmatrix} c' & c & & \\ 0 & \frac{d_2}{c'} \cdot c & & \\ & & d_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Induktion}} \begin{pmatrix} c' & & & \\ 0 & d'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d'_3 \end{pmatrix}$$

Beachte: $\nu(c') < \nu(c)$ und es gilt weiterhin: $d'_i | d'_{i+1}$. Wenn $c'|d'_2$ fertig, sonst gehe wieder zu 3) mit $c'' \in \mathrm{ggT}(c', d'_2)$ und $\nu(c'') < \nu(c')$

Da man $\nu(c)$ nur endlich oft verkleinern kann, terminiert das Verfahren und man erhält schließlich eine Matrix der gesuchten Form.

(Beachte, daß bei der Niederschrift fast alle Nullzeilen weggelassen wurden, da diese sonst das Bild empfindlich gestört hätten. Man muß sich also am Ende jeder Matrix gegebenenfalls eine bestimmte Anzahl von Nullzeilen dazudenken.)

□

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 7 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Beachte $6 \nmid 16$, deswegen noch nicht fertig:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18-16 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

Beachte: $2 \in \mathrm{ggT}(6, 16)$. Damit ist nun die gewünschte Form erreicht.

Folgerungen

a) Ist $C \in R^{n\times n}$, so ist $\det C = u \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ mit α_i Invariantenteiler und u Einheit in R.

b) Ist $C \in \mathrm{GL}(n, R)$, so ist C ein Produkt von R-elementaren Matrizen, d.h. von Matrizen, die aus E_n durch eine R-elementare Zeilen- bzw. Spaltenoperation entstehen.

c) $C, C' \in R^{n\times n}$ sind äquivalent genau dann, wenn C' aus C durch eine Folge von R-elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen entsteht.

Beweis:

a) Bei jeder R-elementaren Zeilen- oder Spaltenoperation wird die Determinante nur mit -1 oder einer Einheit aus R multipliziert, und es gilt weiterhin: $\det(\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)) = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r$.

b) Ist $C \cdot C' = E_n$ mit $C, C' \in R^{n\times n}$, so ist $\det C \cdot \det C' = 1$. Dann ist $\det C$ eine Einheit in R. Also sind auch für alle $i \in \{1 \ldots r\}$ die α_i (die Invariantenteiler von C) Einheiten in R, wegen $\det C = u \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r \cdot x = 1$ (mit x, y Einheiten in R).
Multipliziert man die i-te Zeile von $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ mit $\alpha_i^{-1} \in R$, so erhält man die Einheitsmatrix:

$$Z_m \cdot \ldots \cdot Z_1 \cdot C \cdot S_1 \cdot \ldots \cdot S_{m'} = E_n \quad \text{mit } S_i, Z_i \ R\text{-elementare Matrizen.}$$

Dann folgt:

$$C = Z_1^{-1} \cdot \ldots \cdot Z_m^{-1} \cdot E_n \cdot S_{m'}^{-1} \cdot \ldots \cdot S_1^{-1}.$$

Also ist C ein Produkt R-elementarer Matrizen.

c) C, C' äquivalent $\Leftrightarrow C' = P \cdot C \cdot Q$ mit $P, Q \in \mathrm{GL}(n, R)$. Schreibe nun gemäß b):

$$P = N_1 \cdot \ldots \cdot N_s \quad Q = M_1 \cdot \ldots \cdot M_r,$$

mit N_i, M_j R-elementare Matrizen. Also gilt:

$$\begin{aligned} C, C' \text{ äquivalent} \quad &\Leftrightarrow \quad C' = N_1 \cdot \ldots \cdot N_s \cdot C \cdot M_1 \cdot \ldots \cdot M_r \\ &\Leftrightarrow \quad C' \text{ entsteht aus } C \text{ durch } R\text{-elementare Zeilen-} \\ &\qquad \text{und Spaltenoperationen} \end{aligned}$$

□

§4 Eindeutigkeit der Invariantenteiler

Sein nun (R,ν) ein euklidischer Ring und $C \in R^{m\times n}$.
Ist $k \leq \min\{m,n\}$, so ist ein k-**Minor** von C die Determinante einer $k\times k$-Untermatrix:

$$C^{(i)}_{(j)} := \begin{pmatrix} c_{i_1j_1} & \cdots & c_{i_1j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_kj_1} & \cdots & c_{i_kj_k} \end{pmatrix}$$

mit $(i) \in J_k(m) = \{(i_1,\ldots,i_k)|1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m\}$ und $(j) \in J_k(n)$
Definiere dann:

$$\Delta_k(C) := \{\det C^{(i)}_{(j)}|(i) \in J_k(m),(j) \in J_k(n)\}$$

Setze dann:

$$d_k(C) := \mathrm{ggT}(\Delta_k(C))$$

Beispiel

$$C := \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} d_1(C) &= \mathrm{ggT}(7,6,6,0,0,16) = \{1,-1\}. \\ d_2(C) &= \mathrm{ggT}\left(\det\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \ldots, \det\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{ggT}(6,6,\ldots,0,7\cdot 16) = \{2,-2\}. \\ d_3(C) &= \mathrm{ggT}(\det(C)) = \{96,-96\}. \end{aligned}$$

Satz 1 (Invarianz von $d_k(C)$)

$d_k(C)$ ändert sich nicht bei R-elementaren Zeilen- oder Spaltenoperationen.

Beweis:

a) Sei φ Vertauschung von Zeile x mit Zeile y $(1 \leq x < y \leq m)$
   (i) $\varphi(C)^{(i)}_{(j)} = C^{(i)}_{(j)}$ falls $x,y \notin \{i_1,\ldots,i_k\}$
   d.h. $\det\varphi(C)^{(i)}_{(j)} = \det C^{(i)}_{(j)}$
   (ii) $\det\varphi(C)^{(i)}_{(j)} = -\det C^{(i)}_{(j)}$ falls $x,y \in \{i_1,\ldots,i_k\}$
   (iii) $\det\varphi(C)^{(i)}_{(j)} = \pm\det C^{(i)\setminus x\cup y}_{(j)}$ falls $x \in \{i_1,\ldots,i_k\}$, $y \notin \{i_1,\ldots,i_k\}$
   dabei entsteht $(i)\setminus x\cup y$ aus (i) durch Weglassen von x und Einfügen von y.

   Also $\Delta_k(\varphi(C)) = \Delta_k(C)$ bis auf Vorzeichen.
   Also folgt: $d_k(\varphi(C)) = d_k(C)$

b) Sei φ Multiplikation der x-ten Zeile mit m (u Einheit in R)
Dabei werden die k-Minoren mit 1 oder u multipliziert. Also: $d_k(\varphi(C)) = d_k(C)$

c) Sei φ Addition der x-ten Zeile zur y-ten.

(i) $\det \varphi(C)^{(i)}_{(j)} = \det C^{(i)}_{(j)}$ falls $x, y \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ oder $x, y \in \{i_1, \ldots, i_k\}$

(ii) Ist dagegen $x \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ und $y \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, dann gilt:
$\det \varphi(C)^{(i)}_{(j)} = \det C^{(i)}_{(j)} \pm \det C^{(i)\setminus x \cup y}_{(j)}$
Es ist aber:
$\mathrm{ggT}(a, b, d_3, \ldots, d_n) = \mathrm{ggT}(a, b + sa, d_3, \ldots, d_n)$, denn sei
$d \in \mathrm{ggT}\ (a, b, d_3, \ldots, d_n)$ und $d' \in \mathrm{ggT}\ (a, b + sa, d_3, \ldots, d_n)$, dann gilt:
$(d|a \wedge d|b) \Rightarrow d|b + sa \Rightarrow d|d'$
Umgekehrt gilt:
$(d'|a \wedge d'|b + sa) \Rightarrow d'|(b + sa) - sa = b \Rightarrow d'|d$

Also ist $d_k(\varphi(C)) = d_k(C)$.

Für Spaltenoperationen zeige man dies entsprechend.

□

Satz 2 (Eindeutigkeit der Invariantenteiler)

Die Invariantenteiler einer Matrix sind bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.

Beweis:

Nach §3 kann man $C \in R^{m \times n}$ auf folgende Form bringen:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_r \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha_i | \alpha_{i+1}$$

Nach Satz 1 gilt wegen $d_k(C) = d_k(D)$:

$$\begin{aligned} d_1(C) &= d_1(D) = \mathrm{ggT}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \ni \alpha_1 \\ d_2(C) &= d_2(D) = \mathrm{ggT}\big(\{\alpha_i \cdot \alpha_j | i < j\}\big) \ni \alpha_1 \cdot \alpha_2 \\ &\vdots \\ d_k(C) &= \mathrm{ggT}(\ldots) \ni \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \end{aligned}$$

Also ist α_1 bis auf Einheiten eindeutig bestimmt. Dann ist auch $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ bis auf Einheiten eindeutig bestimmt und damit auch α_2 usw.

□

§5 Die rationale kanonische Form

Vor.: K Körper, $A, A' \in K^{n\times n}$

A, A' ähnlich, d.h. es gibt $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $A' = P^{-1}AP$

$\overset{\S 1}{\Leftrightarrow}$ $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind äquivalent in $K[X]^{n\times n}$.

$\overset{\S 3,4}{\Leftrightarrow}$ Die Invariantenteiler von $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind assoziert, d.h. bis auf Einheiten gleich.

$\Leftrightarrow$ Die normierten Invariantenteiler von $XE_n - A$ und $XE_n - A'$ sind gleich. $f \in K[X]$ normiert bedeutet, daß der höchste Koeffizient gleich 1 sein muß.

$$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0.$$

In §3 hatten wir gesehen, daß man $XE_n - A$ durch Anwendung von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form

$$\mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n) = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, g_1, \ldots, g_s)$$

bringen kann, wobei $d_i \mid d_{i+1}$ und $g_i \in K[X]$ normiert mit $\mathrm{grad}(g_i) = m_i \geq 0$. Beachte

$$\chi_A = \det(XE_n - A) = \prod_{i=1}^{s} g_i\,,$$

da linke Seite und rechte Seite normiert.

$$n = \mathrm{grad}(\chi_A) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{grad}(g_i) = \sum_{i=1}^{s} m_i$$

Die Anzahl der Einsen als Invariantenteiler ist

$$n - s = \sum_{i=1}^{s}(m_i - 1)$$

$(XE_n - A)$ ist äquivalent zu

$$\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1, g_1}_{m_1}, \underbrace{1, \ldots, 1, g_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1, g_s}_{m_s}).$$

Definition (Begleitmatrix)

Ist

$$g = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \quad \in K[X]$$

ein normiertes Polynom, so heißt

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Begleitmatrix zu g.

Lemma 1 (Eigenschaften der Begleitmatrix)

a) A_g hat g als charakteristisches Polynom und als Minimal-Polynom.

b) $XE_n - A_g$ ist äquivalent zu $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, g)$

Beweis:

Übungsaufgabe Nr. 18

□

Sind also wie oben $g_1, \ldots, g_s$ die von 1 verschiedenen Invariantenteiler von $A \in K^{n\times n}$, so ist $XE_n - A$ wegen Lemma 1 b) äquivalent zu

$$\mathrm{Diag}(XE_{n_1} - A_{g_1}, \ldots, XE_{n_s} - A_{g_s}) = XE_n - \mathrm{Diag}(A_{g_1}, \ldots, A_{g_s})$$

also §1 (Satz von Frobenius).

Satz 1 (Frobenius'sche Normalform)

Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist ähnlich zu genau einer Matrix der Form

$$A_{g_1,\dots,g_s} := \mathrm{Diag}(A_{g_1},\dots,A_{g_s})$$

mit $g_i \mid g_{i+1}$, g_i normiertes Polynom vom grad ≥ 1. Dabei sind $g_1,\dots,g_s$ die normierten Invariantenteiler von $XE_n - A$, es gilt $\chi_A = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ und für das Minimalpolynom $\mu_A = g_s$.

$A_{g_1,\dots,g_s}$ heißt die **rationale kanonische Form** von A oder **Frobenius'sche Normalform**.

Beweis:

Es bleibt zu zeigen, daß $\mu_a = g_s$. Es gilt:

$$A^i_{g_1,\dots,g_s} := \mathrm{Diag}(A^i_{g_1},\dots,A^i_{g_s})$$

Ist also $f \in K[X]$, so ist

$$\begin{aligned}
& f(A_{g_1,\dots,g_s}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & f(A_{g_i}) = 0 \quad \text{für alle } i = 1,\dots,s \\
\Leftrightarrow\ & g_i \overset{\text{Lemma 1}}{=} \mu_{A_{g_i}} \mid f \quad \text{für alle } i = 1,\dots,s \\
\Leftrightarrow\ & g_s \mid h \ \text{ weil } \ g_1 \mid g_2 \mid \ldots \mid g_s
\end{aligned}$$

Also ist $g_s = \mu_{A_{g_1},\dots,A_{g_s}}$.

□

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

$$XE_4 - A = \begin{pmatrix} X-3 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & X+3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & X-3 & -2 & 0 \\ X+3 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ X+3 & 5+\frac{X^2-9}{2} & -X & -1 \\ 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{X^2+1}{2} & -X & -1 \\ 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{X^2+1}{2} \\ 0 & X & -1-X^2 & \frac{X^2+1}{2}X \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{X^2+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{X^2+1}{2}X & X^2+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^2+1 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = X^2+1 \qquad g_2 = X^2+1$$

Das heißt A ähnlich zu

$$A_{g_1,g_2} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\chi_A = (X^2+1)^2 \quad \mu_A = (X^2+1)$

Es gibt $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ mit $PAP^{-1} = A_{g_1,g_2}$. Man erhält aus §1 $F, G \in \mathbb{Q}[X]^{4\times 4}$ mit

$$F(XE_4 - A_{g_1,g_2}) = (XE_4 - A)\cdot G, \qquad P^{-1} = F(A).$$

Eine Anwendung ist

Satz 2 (Ähnlichkeit transponierter Matrixen)

Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist ähnlich zu ihrer transponierten Matrix A^{tr}.

Beweis:
Es gilt $XE_n - A^{\mathrm{tr}} = (XE_n - A)^{\mathrm{tr}}$. Ist ferner

$$F\cdot(XE_n - A)\cdot G = \mathrm{Diag}(d_1,\dots,d_n) \quad F, G \in \mathrm{GL}(n, K[X])\,,$$

so ist

$$G^{\mathrm{tr}}\cdot(XE_n - A)^{\mathrm{tr}}\cdot F^{\mathrm{tr}} = \mathrm{Diag}(d_1,\dots,d_n) = G^{\mathrm{tr}}\cdot(XE_n - A^{\mathrm{tr}})\cdot F^{\mathrm{tr}}\,,$$

also haben $XE_n - A$ und $XE_n - A^{\mathrm{tr}}$ gleiche Invariantenteiler, sind also äquivalent, d.h. A, A^{tr} sind ähnlich.

□

Vorteile der rationalen kanonischen Form

(i) Sie ist absolut eindeutig und leicht zu berechnen.

(ii) Sie ist unabhängig vom Körper K und somit möglich in jedem Körper. Sei K ein Unterkörper von L und $A \in K^{n\times n}$, dann ist die rationale kanonische Form von A als K-Matrix gleich der rationalen kanonischen Form als L-Matrix.

(iii) Sie macht das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom sichtbar.

Nachteil der rationalen kanonischen Form

Sei $A \in K^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

so ist $\chi_A = (X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2 = g$ und die rationale kanonische Form von A folglich mit

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

komplizierter als die Ausgangsmatrix.

Satz 3 (Darstellung als Produkt von Irreduziblen)

Ist R ein euklidischer Ring, so hat jedes Element $0 \neq c \in R$, welches keine Einheit ist, eine Darstellung der Form:

$$c = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \quad \text{mit } q_i \text{ irreduzibel.}$$

Ist auch $c = q_1' \cdot \ldots \cdot q_s'$ mit q_i irreduzibel, so ist $r = s$ und es gibt eine Permutation $\pi \in S_r$ mit $q_i' = q_{\pi(i)} \cdot u_i$ mit u_i Einheit.

Beweis:

Siehe Algebra, für $R = \mathbb{Z}$ Mittelstufe.

□

Definition (Elementarteiler)

Ist $C \in R^{n\times n}$ (R euklidischer Ring) und sind $d_1, \ldots, d_r$ die von 0 und Einheiten verschiedenen Invariantenteiler, und

$$d_j = p_1^{n_{j_1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_{j_k}} \quad p_i \text{ irreduzibel, } n_{i_j} \in \mathbb{N}_0,$$

so heißen die $p_i^{n_{i_j}}$ **Elementarteiler** von C. Sie sind nach Hilfssatz und §4 bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.

§6 Weierstraßsche und Jordansche Normalform

R sei euklidischer Ring (zum Beispiel $R = K[X], \mathbb{Z}$)

$C \in R^{m\times n}$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & d_r & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $d_i | d_{i+1}$ Invariantenteiler.

Ist $d_i \neq 0$ und keine Einheit, so ist

$$d_i = p_1^{n_{i_1}} \dots p_r^{n_{i_r}},$$

$n_{i_j} \in \mathbb{N}_0$, p_i ist irreduzibel und $(p_1, \dots, p_r)$ seien paarweise nichtassoziiert. (Zum Beispiel Primzahlen in $\mathbb{Z}$.)

Die von 1 verschiedenen $p_j^{n_{i_j}}$ heißen **Elementarteiler** von C.

Beispiel

a) $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 48, R = \mathbb{Z}$

Elementarteiler: $2, 2^4, 3$

b) Invariantenteiler: $1, 2, 6, 12, 60, 0$

Elementarteiler: $2, 2, 3, 2^2, 3, 2^2, 3, 5$

c) Hat C Elementarteiler: $2, 2^2, 3, 3, 5$,

so hat C Invariantenteiler: $2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, dazu noch eventuelle Nullen und Einsen.

Lemma 1

a) Ist 1 ein ggT(f, g) $f, g \in R$, so ist

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f\cdot g \end{pmatrix}$ äquivalent zu $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$

b) Ist $A, A' \in K^{n\times n}$, so ist $A_{f,g}$ ähnlich zu $A_{f\cdot g}$

dabei ist:

$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ (normiertes Polynom)

$A_{f,g} = \mathrm{Diag}(A_f, A_g)$

Beweis:

a) siehe Übung

b) Benutze Satz von Frobenius
$A, A' \in K$ ähnlich $\Leftrightarrow XE_n - A, XE_n - A' \in K^{n\times n}$ äquivalent.
$XE_n - A_{f,g} = \left(\begin{array}{c|c} XE_k - A_f & 0 \\ \hline 0 & XE_{n-k} - A_g \end{array}\right)$

äquivalent zu $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & f & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & & g \end{array}\right)$

äquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & f & \\ 0 & & & & g \end{pmatrix}$

nach a) äquivalent zu $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & f\cdot g \end{pmatrix}$ äquivalent zu $XE_n - A_{f\cdot g}$.

$\square$

Beachtet man $1 \in \mathrm{ggT}(p_1^{n_{i_1}}, p_2^{n_{i_2}}, \ldots, p_r^{n_{i_r}})$, so erhält man aus §5:

Satz 1 (Weierstraßsche Normalform)

Jede Matrix $A \in K^{n\times n}$(K Körper) ist ähnlich zu einer Matrix

$$A_{q_1,\ldots,q_s} = \mathrm{Diag}(A_{q_1}, \ldots, A_{q_s})$$

wobei $q_1, \ldots, q_s$ normierte Polynome, die Potenzen von irreduziblen Polynomen sind (es sind die Elementarteiler von $XE_n - A$). $A_{q_1,\ldots,q_s}$ ist bis auf die Reihenfolge der $q_1, \ldots, q_s$ eindeutig bestimmt (**Weierstraßsche Normalform**).

$$\chi_A = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \\
xE_3 - A &= \begin{pmatrix} x-4 & \boxed{-2} & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(-2 ist hier der „kleinste" Wert, da $X \cdot E_3 - A \in \mathbb{Q}[X]$, hat man also Polynome in der Matrix stehen.)

$$
\to \begin{pmatrix} -2 & x-4 & 0 \\ x+1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} \qquad \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ x+1 & 3+\dfrac{x-4}{2}(x+1) & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-3x+2 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & x-1 \end{pmatrix} \qquad \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \\ 0 & x^2-3x+2 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x^2-3x+2 & (x-1)^2(x-2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^2(x-2) \end{pmatrix}
$$

rationale kanonische Form ist Begleitmatrix

$$
A_{(x-1)^2(x-2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

Elementarteiler von $xE_3 - A$ sind $(x-1)^2$ und $x-2$

Weierstraßsche Form:

$$
\begin{pmatrix} A_{(x-1)^2} & 0 \\ 0 & A_{(x-2)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)
$$

Satz 2 (Jordansche Normalform)

Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren, so sind die Elementarteiler von $XE_n - A$ von der Form $(X - a_i)^{r_i}, 1 \leq i \leq s$ und A ist ähnlich zu

$$J(A) = \operatorname{Diag}(J_{r_1}(a_1), \dots J_{r_s}(a_s))$$

Jordansche Normalform (dabei braucht a_i nicht notwendig paarweise verschieden zu sein).

Beweis:

$$XE_r - J_r(a) = \begin{pmatrix} x-a & & & 0 \\ \boxed{-1} & x-a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & x-a \end{pmatrix} \text{ äquivalent zu } \begin{pmatrix} 0 & (x-a)^2 & & 0 \\ -1 & x-a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & x-a \end{pmatrix}$$

$$\text{äquivalent zu } \begin{pmatrix} 0 & \boxed{(x-a)^2} & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ & \boxed{-1} & x-a & \\ & & & \ddots \\ 0 & & -1 & \end{pmatrix} \text{ äquivalent zu } \begin{pmatrix} 0 & 0 & (x-a)^3 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ & -1 & x-a & & \\ & & -1 & \ddots & \\ 0 & & & -1 & x-a \end{pmatrix}$$

$$\dots \text{ äquivalent zu } \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & (x-a)^r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ äquivalent zu } \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (x-a)^r \end{pmatrix}$$

äquivalent zu $XE_r - A_{(x-a)^r}$

$J_r(a)$ ist ähnlich zu $A_{(x-a)^r}$ Nach Satz 1 ist A ähnlich zu $\operatorname{Diag}(J_{r_1}(a_1), \dots J_{r_s}(a_s))$

□

Beispiel von oben

Elementarteiler von $XE_3 - A$ waren $(x-1)^2$ und $(x-2)$

$$J(A) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad J_r(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & & 0 \\ 1 & a & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

§7 Moduln über Ringen

R sei Ring mit Eins.

Definition (R-Modul)

Ein R-**Modul** (genauer ein R-Links-Modul) ist eine Menge $M \neq 0$ mit

Addition:	$M \times M \to M$	$(v,w) \longmapsto v+w$
Multiplikation:	$R \times M \to M$	$(s,v) \longmapsto s \cdot v \quad (s \in R; v, w \in M)$

wobei die Regeln (V1)–(V8) aus LA I gelten (siehe Vektorraum).

(V1)–(V4) $(M,+)$ ist kommutative Gruppe

(V5) $s_1(s_2v) = (s_1s_2)v$ $s_i \in R, v \in M$

(V6) $1 \cdot v = v$

(V7) $(s_1 + s_2)v = s_1v + s_2v$

(V8) $s(v+w) = sv + sw$

R Körper, dann ist R-Modul = R-Vektorraum.

$R = \mathbb{Z}$, dann ist R-Modul = abelsche Gruppe.

R sei Ring mit 1.

M sei R-Modul.

Definition (Untermodul)

Ist $S = \{v_i | i \in I\} \subseteq M$, so heißt

$$\langle S \rangle_R = \left\{ \sum a_i v_i \middle| \, a_i \in R, a_i \neq 0 \text{ für nur endlich viele } i \in I \right\}$$

Erzeugnis von S, oder der von S erzeugte **Untermodul**.

($N \subseteq M$ heißt **Untermodul** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $N \neq \emptyset$ und $u, v \in N, a \in R \Rightarrow au + v \in N$, dann ist N auch ein R-Modul.)

$\langle S \rangle_R$ ist R-Untermodul von M.
$\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

$S \subseteq M$ heißt **Basis**, wenn $\langle S \rangle_R = M$ und $\sum\limits_{\substack{\text{endlich} \\ a_i \in R, v_i \in S, \\ v_i \text{ paarweise verschieden}}} a_i v_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$

M heißt **freier** R-Modul, wenn M eine Basis hat.
M heißt **endlich erzeugt** (e.e.), wenn M ein endliches Erzeugendensystem hat.

Beispiele

a) $R = K$. Jeder K-Vektorraum ist ein freier R-Modul.

b) $R = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist $\mathbb{Z}$-Modul mit $+_n$.

$$\begin{array}{l} x \in M, \quad n \cdot x = x +_n x +_n \ldots +_n x = 0 \\ M \neq \langle \emptyset \rangle; M \text{ hat keine Basis} \\ \text{wäre } x \text{ in einer Basis } \{v_1, \ldots, v_m\},\ x = v_i \\ \underbrace{n}_{\neq 0} \cdot x + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_m = 0 \end{array}$$

$\mathbb{Z}_n$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

Definition (R-Modul-Homomorphismus)

M, M' seien R-Moduln. φ: $M \to M'$ Abbildung heißt **R-Modul-Homomorphismus**, wenn

$$\varphi(av + w) = a\varphi(v) + \varphi(w) \qquad \text{für } a \in R;\ v, w \in M$$

Ist zusätzlich φ bijektiv, so heißt φ **Isomorphismus** (dann $M \cong M'$)
Kern $\varphi = \{v \in M | \varphi(v) = 0\}$ Untermodul von M
Bild $\varphi = \{\varphi(v) | v \in M\}$ Untermodul von M'

Homomorphiesatz

Ist $U \subseteq M$ Untermodul, $v \in M$, so sei

$$\begin{array}{l} v + U = \{v + u | u \in U\} \text{ Restklasse} \\ v + U = v' + U \Leftrightarrow v' - v \in U \\ M/U := \{v + U | v \in M\} \end{array}$$

U ist ein R-Modul mit

$$\begin{array}{l} (v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U \\ a \cdot (v + U) = a \cdot v + U \end{array}$$

mit $a \in R,\ v, v_1, v_2 \in M$

$$\text{und} \quad \pi\colon \begin{array}{rcl} M & \to & M/U \\ v & \mapsto & v + U \end{array}$$

ist R-Modul-Homomorphismus, surjektiv mit Kern $\pi = U$
Ist φ: $M \to M'$ irgendein R-Modul-Homomorphismus, so ist

$$\begin{array}{l} \text{Bild}\,\varphi \cong M/\,\text{Kern}\,\varphi \\ (\varphi(v) \mapsto v + \text{Kern}\,\varphi) \end{array}$$

(Beweis: siehe Lineare Algebra I)

Beispiele

a) $M = \mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}$

$$U = 3\mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$$

Restklassen:

$$\begin{aligned} &0 + 3\mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\} \\ &1 + 3\mathbb{Z} = \{1, -2, 4, -5, 7, \ldots\} \\ &2 + 3\mathbb{Z} = \{2, -1, 5, -4, \ldots\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3 \\ &x + 3\mathbb{Z} \leftarrow x \end{aligned}$$

b) $M = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ R = \mathbb{Z}$

$$U = \left\langle \binom{3}{0}, \binom{0}{2} \right\rangle$$

$$M/U = \left\{ \binom{0}{0} + U, \binom{1}{0} + U, \binom{2}{0} + U, \binom{1}{1} + U, \binom{0}{1} + U, \binom{2}{1} + U \right\}$$

Behauptung: $M/U \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$

Definition (direkte Summe von R-Moduln)

Sind $M_1, \ldots, M_m$ R-Moduln, so sei

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_m = \{(x_1, \ldots, x_m) | x_i \in M_i\}$$

Dies ist ein R-Modul mit

$$\begin{aligned} &(x_1, \ldots, x_m) + (x_1', \ldots, x_m') := (x_1 + x_1', \ldots, x_m + x_m') \\ &a(x_1, \ldots, x_m) := (ax_1, \ldots, ax_m) \end{aligned}$$

Beispiel

$R^m = R \oplus \ldots \oplus R = R^{m \times 1}$

Satz 2 (Zerlegung von R-Moduln)

Sei $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \in R^{m\times 1}$ und $U = \langle d_1 e_1, \ldots, d_r e_r \rangle$ mit $d_i \in R$
Dann ist

$$R^{m\times 1}/U \cong R/d_1 R \oplus \ldots \oplus R/d_r R \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{m-r}$$

Beweis:

$$\begin{array}{llll} \varphi\colon & R^{m\times 1} & \rightarrow & R/d_1R \oplus \ldots \oplus R/d_rR \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{m-r} \\ & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} & \mapsto & (a_1 + d_1R, \ldots, a_r + d_rR, a_{r+1}, \ldots, a_m) \end{array}$$

ist ein R-Modul-Homomorphismus, surjektiv

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}\varphi &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in R^{m\times 1} \,\middle|\, \begin{array}{rcl} a_1 + d_1R &=& 0 + d_1R \\ &\vdots& \\ a_r + d_rR &=& 0 + d_rR \\ a_{r+1} &=& 0 \\ &\vdots& \\ a_m &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in R^{m\times 1} \,\middle|\, a_1 \in d_1R, \ldots, a_r \in d_rR, a_{r+1} = \ldots = a_m = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} x_i d_i e_i \,\middle|\, x_i \in R, a_{r+1} = \ldots = a_m = 0 \right\} \\ &= \langle d_1e_1, \ldots, d_re_r \rangle = U \end{aligned}$$

Homomorphiesatz: $\qquad M/U \cong \text{Bild}\ \varphi$

$\square$

Frage: Ist für $U = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \leq R^{m\times 1}$, $v_i \in R^{m\times 1}$

$$R^{m\times 1}/U = \mathbb{Z}^{2\times 1} / \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad ?$$

Satz 3 (homomorphes Bild)

Jeder endlich erzeugte R-Modul M (d.h. mit einem Erzeugendensystem $(v_1, \ldots, v_n)$) ist ein **homomorphes Bild von** R^n, also nach dem Homomorphiesatz isomorph zu einem Modul der Form R^n/U für einen Untermodul U von R^n.
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von M (ist M also insbesondere ein freier Modul), so ist $M \cong R^n$.

Beweis:

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & R^n & \to & M \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in M,\ a_i \in R \end{array}$$

Dies ist ein R-Modul-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\left(a(a_1, \ldots, a_n) + (a'_1, \ldots, a'_n)\right) &= \varphi(a \cdot a_1 + a'_1, \ldots, a \cdot a_n + a'_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a \cdot a_i + a'_i) \cdot v_i \\ &= a \sum a_i v_i + \sum a'_i v'_i \\ &= a \cdot \varphi(a_1, \ldots, a_n) + \varphi(a'_1, \ldots, a'_n) \end{aligned}$$

Da $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_R = M$, ist φ surjektiv.
Homomorphiesatz:

$$M = \varphi(R^n) = \operatorname{Bild} \varphi \cong R^n / \operatorname{Kern} \varphi$$

Setze $U := \operatorname{Kern}\ \varphi$.
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis, so ist Kern $\varphi = \{0\}$, d.h. φ ist Isomorphismus.
Um alle endlich erzeugten R-Moduln zu finden, muß man alle Untermoduln U von allen R^n finden.

$$M = R^n/U$$

Dies ist einfach, falls R ein Körper oder euklidischer Ring ist (z.B. $R = \mathbb{Z}$).

$\square$

§8 Moduln über euklidische Ringe

Sei R Ring mit Eins. Ist M ein von m Elementen erzeugter R-Modul, so ist

$$M \cong R^{m \times 1}/U$$

wobei $U \subseteq R^{m \times 1}$. Wird U von n Elementen erzeugt $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$,
so sei $U = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_R =: \mathrm{SM}(A)$ mit $A = [a_{ij}] \in R^{m \times n}$

Lemma 1 (Eigenschaften des Spaltenmodul SM)

a) Entsteht A' aus A durch R-elementare Spaltenoperationen, so ist $\mathrm{SM}(A') = \mathrm{SM}(A)$.

b) Ist R euklidischer Ring und entsteht A' aus A durch R-elementare Zeilenoperationen, so ist $R^{m\times 1}/\ \mathrm{SM}(A) \cong R^{m\times 1}/\ \mathrm{SM}(A')$.

Beweis:

a) siehe LA I

b) Nach §3 Folgerungen ist $A' = Q \cdot A$ mit $Q \in \mathrm{GL}(n, R)$.
Wir definieren:

$$\varphi\colon R^{m\times 1} \to R^{m\times 1}/\mathrm{SM}(A')$$

$$v \mapsto Q \cdot v + \mathrm{SM}(A')$$

ist ein surjektiver R-Modul-Homomorphismus, weil Q invertierbar $(v' + \mathrm{SM}(A') = \varphi(Q^{-1} \cdot v'))$.

$$\mathrm{Kern}\varphi = \{v \in R^{m\times 1} | Q \cdot v \in \mathrm{SM}(A')\} = \{v \in R^{m\times 1} | Q \cdot v \in \underbrace{\mathrm{SM}(Q \cdot A)}_{\langle Q\cdot v_1, \ldots, Q\cdot v_n\rangle}\} = \mathrm{SM}(A)$$

mit Homomorphiesatz folgt:

$$R^{m\times 1}/\mathrm{SM}(A) \cong R^{m\times 1}/\mathrm{SM}(A')$$

□

Folgerung

Ist R euklidischer Ring, $A \in R^{m\times n}$, so kann man A durch R-elementare Zeilen- und Spaltenoperationen nach §3 auf die Form

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{mit } d_1 | d_2 | \ldots | d_r \neq 0 \quad r \leq m, n$$

bringen.

Dann ist $R^{m\times 1}/\ \mathrm{SM}(A) \cong R/d_1R \oplus \ldots \oplus R/d_rR \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{m-r}$

Satz 1 (Form der Untermoduln)

Ist R euklidischer Ring so wird jeder Untermodul U von R^m von höchstens $n \leq m$ Elementen erzeugt, genauer hat Basis aus n Elementen mit $n \leq m$ (insbesondere ist jeder Untermodul U von $R^{m\times 1}$ von der Form $U = \mathrm{SM}(A)$; $A \in R^{m\times n}$)

Beweis:

Induktion nach m:

a) $m = 1$:
$U \leq R \quad k = \min\{v(u) | 0 \neq u \in U\}$
O.B.d.A. sei $U \neq \{0\}$, wähle $u_0 \in U \quad v(a_0) = k$
Ist $u \in U$ beliebig, so existiert $q, r \in R$ mit

$$u = q \cdot u_0 + r \qquad \nu(r) < \nu(u_0) \,\text{oder}\, r = 0 \quad U \ni u - q \cdot u_0 = r$$

wegen Minimalität von $\nu(a_0)$ muß $r = 0$ sein
also $u = q \cdot u_0 \in R\, u_0 = \langle u_0 \rangle_R$
also $U \leq \langle u_0 \rangle_R \leq U \Rightarrow (u_o)$ ist Basis von U.

b) $m > 1$:
$U \leq \langle v_1, \dots, v_m \rangle = R^m; v_1, \dots, v_m$ Basis von R^m
Ist $U \leq \langle v_2, \dots, v_m \rangle$, so folgt Behauptung per Induktion.
Also sei $U \not\leq \langle v_2, \dots, v_m \rangle$.

$$k = \min \left\{ \nu(a_1) \left| \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \nu_i \in U, a_1 \neq 0 \right. \right\}$$

$w_1 \in U$ mit $\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i = w_1 \quad \nu(a_1) = k$
$U' = U \cap \langle v_2, \dots, v_m \rangle$ hat nach Induktionsannahme Basis $(w_1, \dots, w_n)$ mit $n \leq m$

Beh: $(w_1, \dots, w_n)$ ist Basis von U

Bew: $U \ni u = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot v_i \qquad b_i \in R$
Es existiert $q, r \in R$ mit $b_1 = q \cdot a_1 + r$ mit $\nu(r) < \nu(a_1)$ oder $r = 0$.
$U \ni u - q \cdot w_1 = \sum_{i=1}^{m} (b_i - q \cdot a_i)\nu_i \quad$ Koeffizient von ν_1 ist $b_1 - q \cdot a_1 = r$
Wegen Minimalität von k ist $r = 0$

$$u_q \cdot w_1 \in \langle v_2, \dots, v_m \rangle \cap U = U'$$

Also $u - q_0 \cdot w_1 \in \langle w_2, \dots, w_n \rangle$ also $u \in \langle w_1, \dots, w_n \rangle = U$
Ferner: $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot w_i = 0$. Nach Induktion folgt: $c_i = 0$

□

Hauptsatz über endlich erzeugte R-Moduln

Ist R euklidischer Ring, so ist jeder endlich erzeugte R-Modul M von der Form

$$M \cong R/d_1 R \oplus \ldots \oplus R/d_r R \oplus \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{s}$$

Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe $M \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$

Beispiel

Alle endlich erzeugten abelschen Gruppen sind von der Form:

$$G \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{d_r} \text{ wobei } d_i | d_{i+1} \qquad \prod d_i = |G|$$

Ordnung	mit Addition als Verknüpfung	Anzahl
$\|G\| = 4$	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	2
5	$\mathbb{Z}_5$	1
6	$\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$	1
10	$\mathbb{Z}_{10}$	1
12	$\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$	2
16	$\mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4,$	5
	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	

Kapitel 3

Tensorprodukte

§1 Kontra- und kovariante Vektor- und Tensorgrößen

Definition (kontravariante Tensoren 1. Stufe)

Sei V K-Vektorraum, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Dann läßt sich $v \in V$ eindeutig darstellen in der Form $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i v_i$ mit $x^i \in K$ (oberer Index, keine Potenz !!!). Sei $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ auch Basis mit Basiswechselmatrix $[a^i_j] = {}_{B'}[\mathrm{Id}]_B$, dann folgt:
$v'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i_j v_i$ (oberer Index entspricht dem Zeilenindex).
Dann gilt:

$$v = \sum_{j=1}^{n} x'^j v'_j = \sum_{j=1}^{n} x'^j \sum_{i=1}^{n} a^i_j v_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^i_j x'^j v_i$$

Daraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x'^j$$

Sei nun $[\tilde{a}^j_i] = [a^i_j]^{-1}$, dann folgt:

$$x'^j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}^j_i x^i$$

Dies nennt man ein **kontravariantes Transformationsverhalten**. Die Vektoren $v \in V$ heißen dann kontravariante Vektoren (kontravariante Tensoren 1. Stufe)

Definition (kovariante Tensoren 1. Stufe)

Sei nun $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ (Dualraum) und $B^* = (v^1, \dots, v^n)$ die zu $B = (v_1, \dots, v_n)$ duale Basis von V^* definiert durch: $v^i(v_j) = \delta_{ij}$

Wie ändern sich die Koordinaten eines $\lambda \in V^*$ bei Übergang von B^* zu B'^* ? Es gilt: $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j v^j$ mit $\lambda(v_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j v^j v_i = y_i$.

Sei dann $B'^* = (v'^1, \dots, v'^n)$ die zu B' duale Basis von V^*, dann gilt mit $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{n} y'_j v^j$:

$$y'_j = \lambda(v'^j) = \lambda(\sum_{i=1}^{n} a^i_j v_i) = \sum_{i=1}^{n} a^i_j \lambda(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a^i_j y_i \Rightarrow y'_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j y_i$$

Dies heißt **kovariantes Transformationsverhalten** $\lambda \in V^*$ heißen kovariante Vektoren (kovariante Tensoren 1. Stufe)

Definition (kontra- und kovariante Tensorgrößen)

Sei V n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen von V.

Eine **kovariante Tensorgröße** ist eine Abbildung g: $\mathcal{B} \to K^{\underline{n}} := \mathrm{Abb}(\underline{n}, K)$ mit $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$ mit folgender Eigenschaft:

Sind $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ Basen von V, und gelte: $v'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i_j v_i$ und $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}^j_i v'_j$, so gilt:

$$g(B')(j) =: g(B')_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j g(B)_i$$

Eine **kontravariante Tensorgröße**Tensorgrößen!kontravariante ist eine Abbildung g: $\mathcal{B} \to K^{\underline{n}}$ mit der Eigenschaft:

$$g(B')(i) =: g(B')^i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}^i_j g(B)^j$$

Beispiele

a) v sei ein fester Vektor aus V. Definiere für $B \in \mathcal{B}$: $\quad g_v(B)^i = x^i$ (die i-te Koordinate), dann ist nach den Regeln aus Lineare Algebra I $\quad g_v$ eine kontravariante Tensorgröße.

b) Sei $\lambda \in V^*$. Definiere dann $g_\lambda(B)_j := y_j$ (die j-te Koordinate), dann ist g_λ nach den Regeln für den Basiswechsel also eine kovariante Tensorgröße.

Definition (Tensorgrößen 2. Stufe)

a) Eine 2-fach kovariante Tensorgröße der Stufe 2 ist eine Abbildung

$$g\colon \mathcal{B} \to K^{\underline{n}\times\underline{n}} = \mathrm{Abb}(\underline{n}\times\underline{n}, K) \text{ mit } g(B')(i,j) = g(B')_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_i^k a_j^l g(B)_{kl}$$

b) Eine kontra-kovariante Tensorgröße der Stufe 2 ist eine Abbildung

$$g\colon \mathcal{B} \to K^{\underline{n}\times\underline{n}} \text{ mit } g(B')(i,j) = g(B')_j^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_k^i a_j^l g(B)_l^k$$

Beispiele

a) Sei $\Phi \in \mathrm{Bifo}(V)$. Definiere $g_\Phi(B')_{ij} = c_{ij}$ mit $[\Phi]_B = [c_{ij}]$. Dann ist $[\Phi]_{B'} = A^{\mathrm{tr}}[\Phi]_B A = A^{\mathrm{tr}}[c_{ij}]A$ mit $A = [a_{ij}]$. Dann ist $g_\Phi(B')_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_i^k c_{ij} a_j^l$ eine zweifach kovariante Tensorgröße.

b) Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Definiere $g_\varphi(B) = c_j^i$, wenn $[\varphi] = [c_j^i]$. Dann ist ${}_{B'}[\varphi]_B = A^{-1}[c_j^i]A$ und somit nach Rechenregeln g_φ eine kontra-kovariante Tensorgröße.

Definition (Tensorgrößen höherer Stufe)

Eine r-fach kontravariante, s-fach kovariante Tensorgröße ist eine Abbildung

$$g\colon \mathcal{B} \longrightarrow K^{\overbrace{\underline{n}\times\ldots\times\underline{n}}^{r+s}}$$

mit

$$g(B')_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} = \sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_r=1}^{n}\sum_{l_1=1}^{n}\cdots\sum_{l_s=1}^{n} \tilde{a}_{k_1}^{i_1}\ldots\tilde{a}_{k_r}^{i_r} a_{j_1}^{l_1}\ldots a_{j_s}^{l_s} g(B)_{l_1\ldots l_s}^{k_1\ldots k_r}$$

§2 Das Tensorprodukt

Definition (multilineare Abbildung)

Es seien $V_1,\ldots,V_m,T$ seien K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\Phi\colon V_1\times\ldots\times V_m \to T$$

heißt **multilinear**, wenn

$$\Phi(v_1,\ldots,av_i+v_i',\ldots,v_m) = a\cdot\Phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_m) + \Phi(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_m)$$

für $a \in K, i = 1,\ldots,m$ und $v_i, v_i' \in V$ gilt.

Beispiele

a) Linearform, $m = 1$, $T = K$.
Bilinearform, $m = 2$, $T = K$.

b) $T = K$, $V_1 = \ldots = V_m = K^{m\times 1}$. Determinante $D : K^{m\times 1} \times \ldots \times K^{m\times 1} \to K$.

c) $\mathrm{Hom}(V', V'') \times \mathrm{Hom}(V, V') \to \mathrm{Hom}(V, V'')$ mit $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi$.

d) $K^{m\times n} \times K^{n\times p} \to K^{m\times p}$ mit $(A, B) \mapsto A \cdot B$.

e) A sei K-Algebra, $A \times A \to A$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$.

Bemerkung 1

Ist τ: $V_1 \times \ldots \times V_m \to T$ multilinear und φ: $T \to W$ linear, so ist

$$\varphi \circ \tau : V_1 \times \ldots \times V_m \to W$$

auch multilinear.

Frage

Gibt es zu beliebigen K-Vektorräumen $V_1, \ldots V_m$ einen K-Vektorraum T und eine multilineare Abbildung

$$\tau: V_1 \times \ldots \times V_m \to T,$$

so daß jede multilineare Abbildung

$$\Phi: V_1 \times \ldots \times V_m \to W$$

von der Form $\Phi = \varphi \circ \tau$ ist für eine jeweils eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathrm{Hom}(T, W)$?
Der folgende Satz bejaht diese Frage:

Satz 1 (universelle Eigenschaft des Tensorprodukts)

Zu K-Vektorräumen $V_1, \ldots, V_m$ gibt es einen K-Vektorraum T und eine multilineare Abbildung

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_m \to T$$

mit folgender Eigenschaft: Zu jeder multilinearen Abbildung

$$\Phi: V_1 \times \ldots \times V_m \to W$$

gibt es genau ein $\varphi \in \mathrm{Hom}(T, W)$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_m \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\Phi"'] & T \arrow[d, "\varphi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Zusatz

Ist $B_i = (v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)})$ Basis von V_i, so ist

$$\tau(B_1 \times \ldots \times B_m) := \left\{ \tau(v_{i_1}^{(1)}, \ldots v_{i_m}^{(m)}) \;\middle|\; 1 \le i_j \le n_j, 1 \le j \le m \right\}$$

Basis von T.

Beweis:
(Version nur für endlich dimenionale K-Vektorräume)
Sei B_i wie im Zusatz. Sei T ein K-Vektorraum der Dimension $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ mit Basis

$$B = \{t_{i_1,\ldots,i_m} \big| 1 \le i_j \le n_j, 1 \le j \le m\}.$$

Definiere nun τ: $V_1 \times \ldots \times V_m \to T$ durch

$$\tau\left(\underbrace{\sum_{i_1=1}^{n_1} x_1^{i_1} v_{i_1}^{(i)}}_{v_1 \in V_1}, \ldots, \underbrace{\sum_{i_m=1}^{n_m} x_m^{i_m} v_{i_m}^{(m)}}_{v_m \in V_m} \right) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m} \cdot t_{i_1,\ldots,i_m}.$$

Offenbar ist τ multilinear.
Sei Φ: $V_1 \times \ldots \times V_m \to W$ multilinear und definiere eine lineare Abbildung φ: $T \to W$ durch

$$\varphi(t_{i_1,\ldots,i_m}) = \Phi(v_{i_1}^{(1)}, \ldots, v_{i_m}^{(m)}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi(v_1, \ldots, v_m) &= \Phi\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_1^{i_1} v_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_m=1}^{n_m} x_m^{i_m} v_{i_m}^{(m)} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m} \underbrace{\Phi(v_{i_1}^{(1)}, \ldots, v_{i_m}^{(m)})}_{\varphi(t_{i_1,\ldots,i_m})} \\ &= \varphi\big(\tau(v_1, \ldots, v_m)\big). \end{aligned}$$

Also ist $\Phi = \varphi \circ \tau$.
Noch zu zeigen: φ ist eindeutig bestimmt. Ist $\varphi' \in \mathrm{Hom}(T, W)$ mit $\Phi = \varphi' \circ \tau$, so ist

$$\varphi(t_{i_1,\ldots,i_m}) = \Phi(v_{i_1}^{(1)}, \ldots, v_{i_m}^{(m)}) = \varphi'(t_{i_1,\ldots,i_m}).$$

φ und φ' stimmen auf einer Basis von T überein $\Rightarrow \varphi' = \varphi$.

(Und nun die Version für beliebige K-Vektorräume (K-Moduln, falls K ein kommutativer Ring ist).)
Es sei

$$\begin{aligned} F &:= K^{(V_1 \times \ldots \times V_m)} \\ &= \left\{ f\colon V_1 \times \ldots \times V_m \to K \;\middle|\; f(v_1, \ldots, v_m) \ne 0 \text{ nur für endl. viele } m\text{-Tupel } (v_1, \ldots, v_m) \right\}. \end{aligned}$$

F ist ein K-Vektorraum (bzw. K-Modul). Sei $(v_1, \ldots, v_m) \in V_1 \times \ldots \times V_m$ und definiere

$$(v_1, \ldots, v_m)^\circ \in K^{V_1 \times \ldots \times V_m}$$

durch

$$(v_1, \ldots, v_m)^\circ\big((w_1, \ldots, w_m)\big) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } w_i = v_i \text{ für } 1 \le i \le m, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Ferner ist

$$B := \{(v_1,\dots,v_m)^\circ \mid v_i \in V_i, 1 \le i \le m\}$$

die Standardbasis von F.
Setze nun

$$\begin{aligned} U \quad := \quad \Big\langle & \quad (v_1,\dots,av_i+v_i',\dots,v_m)^\circ - a\cdot(v_1,\dots,v_i,\dots,v_m)^\circ \\ & - \quad (v_1,\dots,v_i',\dots,v_m)^\circ \;\Big|\; 1\le i\le m, \quad a\in K, \quad v_i,v_i'\in V_i \Big\rangle_K \end{aligned}$$

und

$$T \quad := \quad F/U.$$

Außerdem sei τ: $V_1 \times \ldots \times V_m \to T$ definiert durch

$$\tau(v_1,\dots,v_m) = (v_1,\dots,v_m)^\circ + U.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \tau(\dots,av_i+v_i',\dots) - a\cdot\tau(\dots,v_i,\dots) - \tau(\dots,v_i',\dots) \\ = \; & \big((\dots,av_i+v_i',\dots)^\circ + U\big) - a\cdot\big((\dots,v_i,\dots)^\circ + U\big) - \big((\dots,v_i',\dots)^\circ + U\big) \\ = \; & \underbrace{(\dots,av_i+v_i',\dots)^\circ - a\cdot(\dots,v_i,\dots)^\circ - (\dots,v_i',\dots)^\circ}_{\in U} + U \\ = \; & \underline{0} + U = \underline{0} \in T. \end{aligned}$$

Sei nun Φ: $V_1 \times \ldots \times V_m \to W$ multilinear. Definiere eine lineare Abbildung Ψ: $F \to W$ durch

$$\Psi\big((v_1,\dots,v_m)^\circ\big) = \Phi(v_1,\dots,v_m)$$

(Bilder der Basisvektoren aus B). Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \Psi\big((v_1,\dots,av_i+v_i',\dots,v_m)^\circ - a\cdot(v_1,\dots,v_i,\dots,v_m)^\circ - (v_1,\dots,v_i',\dots,v_m)^\circ\big) \\ = \; & \Phi\big((v_1,\dots,av_i+v_i',\dots,v_m)^\circ - a\cdot(v_1,\dots,v_i,\dots,v_m)^\circ - (v_1,\dots,v_i',\dots,v_m)^\circ\big) \\ = \; & \underline{0}, \end{aligned}$$

weil Φ multilinear ist. Also ist $U \le \mathrm{Kern}\Psi$. Definiere eine Abbildung φ: $T \to W$ durch

$$f + U \mapsto \Psi(f)$$

für $f \in F = K^{(V_1\times\ldots\times V_m)}$. φ ist wohldefiniert:

$$f + U = g + U \Longrightarrow f - g \in U \le \mathrm{Kern}\Psi,$$

also $\Psi(f-g) = \underline{0}$, also $\Psi(f) = \Psi(g)$. Offenbar ist φ linear, und es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi\circ\tau(v_1,\dots,v_m) \quad &= \quad \varphi\big((v_1,\dots,v_m)^\circ + U\big) \\ &= \quad \Psi\big((v_1,\dots,v_m)^\circ\big) \\ &= \quad \Phi(v_1,\dots,v_m) \end{aligned}$$

für $v_i \in V_i$, $1 \le i \le m$, also ist

$$\Phi = \varphi\circ\tau.$$

Noch zu zeigen: φ ist eindeutig bestimmt. Ist $\varphi' \in \mathrm{Hom}(T,W)$ mit $\Phi = \varphi'\circ\tau$, so folgt

$$\varphi'\big((v_1,\dots,v_m)^\circ + U\big) = \Phi\big((v_1,\dots,v_m)\big) = \varphi\big((v_1,\dots,v_m)^\circ + U\big)$$

für $(v_1,\dots,v_m) \in (V_1\times\ldots\times V_m)$ und $(v_1,\dots,v_m)^\circ + U \in T$.

$$\{(v_1,\dots,v_m)^\circ + U \mid v_i \in V_i, \quad 1 \le i \le m\}$$

ist ein Erzeugendensystem von T. Also: φ und φ' stimmen auf einem Erzeugendensystem von T überein $\Rightarrow \varphi = \varphi'$.

$\square$

Schreibweise fürs Tensorprodukt

$$\begin{aligned}(v_1,\dots,v_m)^\circ + U &= \tau\big((v_1,\dots,v_m)\big)\\ &=: v_1\otimes\ldots\otimes v_m\\ T = K^{(V_1\times\ldots\times V_m)}/U &=: V_1\otimes\ldots\otimes V_m\end{aligned}$$

Definition (Tensorprodukt)

Erfüllen auch T' und τ': $V_1\times\ldots\times V_m \to T'$ die universelle Eigenschaft von Satz 1, so gibt es genau einen Isomorphismus φ: $T\to T'$ mit $\tau' = \varphi\circ\tau$.

(T,τ) heißt **Tensorprodukt**.

$$T = V_1\otimes\ldots\otimes V_m$$

$$\tau(v_1,\dots,v_m) = v_1\otimes\ldots\otimes v_m \qquad v_i\in V_i$$

Beweis:

$\Phi = \tau'$ ist multilinear. Aus der universellen Eigenschaft für (T,τ) folgt:

$$\varphi\colon T\to T' \text{ ist linear und } \tau' = \varphi\circ\tau$$

$\Phi = \tau$ ist multilinear. Aus der universellen Eigenschaft für (T',τ') folgt:

$$\psi\colon T'\to T \text{ ist linear und } \tau = \psi\circ\tau'$$

$\tau = \psi\circ\tau' = (\psi\circ\varphi)\circ\tau = \mathrm{Id}_T\circ\tau$ Aus der Eindeutigkeit in Satz 1 folgt

$$\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_T$$

genauso

$$\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_{T'}$$

d.h. φ und ψ sind inverse Isomorphismen

□

Bemerkung

a) Ein Tensorprodukt ist nicht nur ein Vektorraum, sondern ein Vektorraum (T, τ) zusammen mit einer multilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} &T = V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \\ &v_1, \ldots, v_m \to v_1 \otimes \ldots \otimes v_m \end{aligned}$$

b) Vorsicht:

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \neq \{v_1 \otimes \ldots \otimes v_m | v_i \in V_i\}$$

richtig:

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_m = \langle v_1 \otimes \ldots \otimes v_m | v_i \in V_i \rangle_K$$

d.h.

Jeder **Tensor**, also jedes Element aus $V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$, ist eine endliche Linearkombination von **zerlegbaren Tensoren**, d.h. Elementen der Form $v_1 \otimes \ldots \otimes v_m$, $v_i \in V_i$.

Rechenregeln für Tensoren

V, W K-Vektorräume oder K-Moduln

$V \otimes W$ ist K-Vektorraum bzw. K-Modul, der erzeugt wird von $\{v \otimes w | v \in V, w \in W\}$

Sei $v, v' \in V; w, w' \in W; a \in K$

(i) $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$

(ii) $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$

(iii) $a(v \otimes w) = av \otimes w = v \otimes aw$

Bemerkung

Ist $V = \langle B \rangle$, $W = \langle C \rangle$, so ist $B \otimes' C = \{v \otimes w | v \in B, w \in C\}$ Erzeugendensystem für $V \otimes W$.

Sind B und C Basen (von V bzw. W) so ist $B \otimes' C$ eine Basis von $V \otimes W$

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle B\rangle &= V \quad v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{m} s_i v_i \\ \langle C\rangle &= W \quad w \in W \Rightarrow w = \sum_{j=1}^{n} t_j w_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&v_i \in B, w_j \in C \\ v \otimes w &= \left(\sum_{i=1}^{m} s_i v_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{n} t_j w_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_i t_j \underbrace{(v_i \otimes w_j)}_{\in B \otimes' C}\end{aligned}$$

also $\langle B \otimes' C\rangle = V \otimes W$

Seien nun B und C Basen von V bzw. W

Angenommen

$$\sum_{\substack{\text{endlich} \\ i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij} v_i \otimes w_j = 0 \qquad a_{ij} \in K, v_i \in B, w_j \in C$$

zu zeigen: alle $a_{ij} = 0$

Wir definieren

$$\Phi\left(\sum_{v_i \in B} x_i v_i, \sum_{w_j \in C} y_j w_j\right) := [x_i y_j]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in K^{m \times n}$$

Φ: $V \times W \to K^{m \times n}$ ist multilinear

Also existiert nach Satz 1 φ: $V \otimes W \to K^{m \times n}$ linear mit

$$\Phi(v, w) = \varphi(v \otimes w)$$

insbesondere

$$0 = \varphi\left(\sum a_{ij} v_i \otimes w_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\varphi(v_i \otimes w_j)}_{E_{ij}}$$

also: alle a_{ij} sind 0 und damit $v_i \otimes w_j$ l.u.

□

Beispiel

$$\begin{array}{ll} V = K^m = K^{m\times 1} & \dim V = m \\ W = K^n = K^{n\times 1} & \dim W = n \\ & \dim(V \otimes W) = m \cdot n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K^m \times K^n & \xrightarrow{\tau} & K^m \otimes K^n \\ & \Phi \searrow & \downarrow \varphi \\ & & K^{m\times n} \end{array}$$

$\Phi(v,w) := v \cdot w^{\mathrm{tr}}$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\Phi(v,w) = v \cdot w^{\mathrm{tr}} = [x_i y_j]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$
Φ ist multilinear. Also existiert (nach Satz 1)

$$\varphi\colon K^m \otimes K^n \to K^{m\times n}$$

mit

$$\varphi(v \otimes w) = \Phi(v,w) = v \cdot w^{\mathrm{tr}}$$

Umgekehrt definere:

$$\psi\colon K^{m\times n} \to K^m \otimes K^n$$

mit

$$[a_{ij}] \to \sum a_{ij} e_i \otimes e_j$$

dann sind φ und ψ inverse Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} K^m \otimes K^n & \cong & K^{m\times n} \\ v \otimes w & \to & v \cdot w^{\mathrm{tr}} \end{array}$$

beachte es ist $\mathrm{Rg}(v \cdot w^{\mathrm{tr}}) \leq 1$

$$\{v \cdot w^{\mathrm{tr}} | v \in K^m, w \in K^n\} = \{A \in K^{m\times n} | \mathrm{Rg} A \leq 1\} \neq K^{m\times n}, \text{falls}\, m,n > 1$$

also für $m,n > 1$ ist

$$K^m \otimes K^n \neq \{v \otimes w | v \in K^m, w \in K^n\}$$

Beispiele

1) Es sei $K = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 = ?$

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_4 = \langle a \rangle & a = 1 + 4\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_6 = \langle b \rangle & b = 1 + 6\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 = \langle a \otimes b \rangle & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2(a \otimes b) &= (6-4)(a \otimes b) \\ &= 6(a \otimes b) - 4(a \otimes b) \\ &= a \otimes (6b) - (4a) \otimes b \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da $6b = \underline{0} = 0 + 6\mathbb{Z}$ und $4a = \underline{0}$:

$$(\mathbf{??}) = a \otimes \underline{0} - \underline{0} \otimes b = \underline{0} - \underline{0} = \underline{0}.$$

Behauptung: $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2$, also $a \otimes b \neq \underline{0}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \\ & \Phi \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Definiere nun ein Φ durch

$$\Phi(i + 4\mathbb{Z}, j + 6\mathbb{Z}) := ij + 2\mathbb{Z}.$$

Φ ist wohldefiniert und bilinear. $\Phi \neq \underline{0}$, daher ist $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \neq \underline{0}$, also ist $\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2$.

2) K sei ein Körper, V ein n-dimenionaler K-Vektorraum, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der Dualraum.

$$\mathrm{Bifo}(V) = \left\{ \Phi \colon V \times V \to K \;\middle|\; \Phi \text{ bilinear} \right\}.$$

Definiere nun

$$\begin{aligned} \tau' \colon V^* \times V^* &\to \mathrm{Bifo}(V) \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda \cdot \mu \end{aligned}$$

durch

$$(\lambda \cdot \mu) := \lambda(v) \cdot \mu(w) \in K.$$

τ' ist bilinear.

$$\begin{array}{ccc} V^* \times V^* & \xrightarrow{\otimes} & V^* \otimes V^* \\ & \tau' \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \mathrm{Bifo}(V) \end{array}$$

Es gibt also genau eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V^* \otimes V^* \to \mathrm{Bifo}(V)$$

mit $\varphi(\lambda \otimes \mu) = \lambda \cdot \mu$.

Behauptung: φ ist ein Isomorphismus. Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V, $B^* = (v^1, \ldots, v^n)$ dazu die duale Basis von V^*. Dann

$$\begin{aligned} & v^i(v_j) = \delta_{ij} \\ & [v^i \cdot v^j]_B = E_{ij}. \end{aligned}$$

Also ist $(v^i \cdot v^j) = \big(\varphi(v^i \otimes v^j)\big)$ Basis von $\mathrm{Bifo}(V)$, also ist φ surjektiv. Da

$$n^2 = \dim V^* \otimes V^* = \dim \mathrm{Bifo}(V) = n^2,$$

ist φ bijektiv, folglich ein Isomorphismus.

Definition (Tensoren)

V sei K-Vektorraum. Dann heißen die Elemente von

$$T = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s}$$

r-fach kontra-, s-fach kovariante **Tensoren** der Stufe $r + s$.
Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V, $B^* = (v^1, \ldots, v^n)$ die duale Basis von V^*, so ist

$$C := \left\{ v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_s} \;\middle|\; 1 \leq i_k, j_l \leq n \right\}$$

Basis von T, d.h. jedes $t \in T$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form

$$t = \sum_{i_1 \ldots i_r = 1}^{n} \sum_{j_1 \ldots j_s = 1}^{n} \underbrace{t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}}_{\in K} v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_s}. \tag{3.2}$$

Wir wählen eine 2. Basis $B' = (w_1, \ldots, w_n)$ von V, es sei $B'^* = (w^1, \ldots, w^n)$ die zu B' duale Basis von V^*.

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j v_i \qquad v_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}^i_j w_i$$

mit $[a^i_j] = A = {}_B[\mathrm{Id}]_{B'}$, $[\tilde{a}^i_j] = A^{-1}$.

$$w^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j v^j \qquad v^i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}^i_j w^j.$$

Setze dies in die Darstellung (**??**) ein:

$$t = \sum_{i_1\ldots i_r=1}^{n} \sum_{j_1\ldots j_s=1}^{n} t'^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} w_{i_1} \otimes \ldots w_{i_r} \otimes w^{j_1} \otimes \ldots \otimes w^{j_s},$$

wobei

$$t'^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \sum_{k_1\ldots k_r=1}^{n} \sum_{l_1\ldots l_s=1}^{n} t^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s} \tilde{a}^{i_1}_{k_1} \cdots \tilde{a}^{i_r}_{k_r} \tilde{a}^{l_1}_{j_1} \cdots \tilde{a}^{l_s}_{j_s}.$$

Also jedes $t \in T$ definiert eine Tensorgröße g_t im Sinne von §1:

$$g_t(B) \text{ mit } g_t(B)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}.$$

Satz 2 (Kommutativität und Assoziativität des Tensorprodukts)

Es gibt natürliche Isomorphismen (d.h. solche, die nicht von der Wahl von Basen anhängen):

a)
$$\begin{array}{rcl} V \otimes W & \cong & W \otimes V \\ v \otimes w & \leftrightarrow & w \otimes v. \end{array}$$

(Dabei bedeutet „$\leftrightarrow$“, daß eine **bijektive** Zuordnung besteht.)

b)
$$\begin{array}{rcccl} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \cong & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 & \cong & V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \\ (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 & \leftrightarrow & v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 & \leftrightarrow & v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3). \end{array}$$

Beweis:

a) Definiere

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon V \times W & \to & W \otimes V \\ (v, w) & \mapsto & w \otimes v \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ & \Phi \searrow & \\ & & W \otimes V \end{array}$$

(Man kann nicht ohne weiteres definieren $\varphi(v \otimes w) = w \otimes v$, weil nicht jedes Element $t \in V \otimes W$ von dieser Form ist und die $v \otimes w$ auch keine Basis bilden.)

Φ ist bilinear, also existiert

$$\varphi : V \otimes W \to W \otimes V$$

mit

$$w \otimes v = \Phi(v, w) = \varphi(v \otimes w).$$

Genauso:

$$\begin{aligned} \exists \psi \colon W \otimes V &\to V \otimes W \text{ mit} \\ \psi(w \otimes v) &= v \otimes w. \end{aligned}$$

Dann gilt $(\psi \circ \varphi)(v \otimes w) = v \otimes w$. (Beachte, daß $v \otimes w$ ein Erzeugendensystem von $V \otimes W$ ist.) Also $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{W \otimes V}$.

Genauso folgt, daß $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{W \otimes V}$ ist. Also sind φ und ψ inverse Isomorphismen.

b) Übung.

□

§3 Kronecker-Produkt

Satz 1 (Kronecker-Produkt)

Seien V, V', W, W' K-Moduln (bzw. K-Vektorräume). K sei dabei ein kommutativer Ring mit Eins, also z.B. ein Körper. Seien ferner φ: $V \to V'$ und ψ: $W \to W'$ linear. Dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$\varphi \otimes \psi : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

mit

$$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w).$$

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ & \Phi \searrow & \downarrow \varphi \\ & & V' \otimes W' \end{array}$$

Beweis:
Definiere

$$\Psi : V \times W \to V' \otimes W'$$

durch

$$\Phi(v, w) = \varphi(v) \otimes \psi(w).$$

Dann ist Φ bilinear, also existiert genau eine lineare Abbildung

$$\varphi \otimes \psi : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

mit

$$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \Phi(v, w) = \varphi(v) \otimes \psi(w).$$

□

Zusatz zu Satz 1

Seien

$$\begin{array}{lll} B=(v_1,\dots,v_n) & B'=(v'_1,\dots,v'_m) & \text{Basen von } V,V' \\ C=(w_1,\dots,w_s) & C'=(w'_1,\dots,w'_s) & \text{Basen von } W,W' \end{array}$$

Ordnet man die Basen $B\otimes' C$ und $B'\otimes' C'$ lexikographisch, d.h.

$$B\otimes' C=(v_1\otimes w_1,\dots,v_1\otimes w_s,\dots,v_n\otimes w_1,\dots,v_n\otimes w_s)$$

$$B'\otimes' C'=(v'_1\otimes w'_1,\dots,v'_1\otimes w'_r,\dots,v'_m\otimes w'_1,\dots,v'_m\otimes w'_r)$$

so ist, wenn

$$A={}_B[\varphi]_B=[a^i_j]$$

$$D={}_C[\psi]_C=[d^i_j]$$

$${}_{B'\otimes' C'}[\varphi\otimes\psi]_{B\otimes' C}=A\otimes D=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a^1_1D & a^1_2D & \dots & a^1_nD \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a^m_1D & a^m_2D & \dots & a^m_nD \end{array}\right)$$

Dies bezeichnet man als **Kroneckerprodukt von Matrizen**.

Beweis:

$$\varphi\otimes\psi(v_i\otimes w_j)=\varphi(v_i)\otimes\psi(w_j)=\left(\sum_{k=1}^m a^k_i\cdot v'_k\right)\otimes\left(\sum_{l=1}^r b^l_j\cdot w'_l\right)=\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^r a^k_i d^l_j(v'_k\otimes w'_l)$$

d.h. in der zu (i,j) gehörigen Spalte von $[\varphi\otimes\psi]$ stehen

$$\underbrace{a^1_id^1_j,a^1_id^2_j,\dots,a^1_id^r_j}_{j\text{-te Spalte von } a^1_iD},\dots,\underbrace{a^m_id^1_j,a^m_id^2_j,\dots,a^m_id^r_j}_{j\text{-te Spalte von } a^m_iD}$$

□

Bemerkung

Ordnet man $B\otimes' C$ und $B'\otimes' C'$ so

$$(v_1\otimes w_1,\dots,v_n\otimes w_1,\dots,v_1\otimes w_s,\dots,v_n\otimes w_s)$$

so erhält man

$$[\varphi\otimes\psi]=D\otimes A$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 4 & 8 & 5 & 10 & 6 & 12 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Bemerkung

Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(V,V') \otimes \mathrm{Hom}(W,W') & \cong & \mathrm{Hom}(V \otimes W, V' \otimes W') \\ \varphi \otimes \psi & \leftrightarrow & \varphi \otimes \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} K^{m\times n} \otimes K^{r\times s} & \cong & K^{m\cdot r\times n\cdot s} \\ A \otimes D & \leftrightarrow & A \otimes D \end{array}$$

Es wird deshalb indentifiziert.

Satz 2 (Verkettung des Kronecker-Produkts)

Seien V, V', V'', W, W', W'' K-Vektorräume bzw. K-Moduln

$$\begin{array}{ll} \varphi\colon V \to V' & \varphi'\colon V' \to V'' \\ \psi\colon W \to W' & \psi'\colon W' \to W'' \end{array}$$

so ist

$$(\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi)$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) & = & (\varphi' \otimes \psi')(\varphi(v) \otimes \psi(w)) \\ & = & \varphi'(\varphi(v)) \otimes \psi'(\psi(w)) \\ & = & (\varphi' \circ \varphi)(v) \otimes (\psi' \circ \psi)(w) \end{array}$$

□

Folgerung

Für Matrizen $A \in K^{m\times n}, A' \in K^{p\times m}, D \in K^{r\times s}, D' \in K^{q\times r}$ gilt:

$$(A' \otimes D') \cdot (A \otimes D) = (A' \cdot A) \otimes (D' \cdot D)$$

Bemerkung

Es folgt $A \otimes D$ und $D \otimes A$ sind ähliche Matrizen, falls $A \in K^{n\times n}$, $D \in K^{r\times r}$.

Folgerung (Eigenschaften des Kronecker-Produkts)

Sei $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{n\times n}$

a) $\mathrm{Spur}(A \otimes B) = \mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B)$

b) $\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m$

c) A, B invertierbar $\Rightarrow A \otimes B$ invertierbar:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Beweis:

a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}(A \otimes B) &= \mathrm{Spur}\left(\begin{bmatrix} a_1^1 B & \dots & a_m^1 B \\ & \ddots & \\ & & a_m^m B \end{bmatrix}\right) \\
&= a_1^1 \cdot \mathrm{Spur} B + a_2^2 \cdot \mathrm{Spur} B + \ldots + a_m^m \cdot \mathrm{Spur} B \\
&= \mathrm{Spur} A \cdot \mathrm{Spur} B
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\det(A \otimes B) &= \det((E_m \otimes B) \cdot (A \otimes E_n)) \\
&= (\det B)^m \cdot \det(A \otimes E_n) \quad \text{,denn } E_m \otimes B = \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix} \\
&= (\det B)^m \cdot (\det(E_n \otimes A)) \quad \text{,denn } E_n \otimes A \text{ ist zu } A \otimes E_n \text{ ähnlich} \\
&= (\det B)^m \cdot (\det A)^n
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(A \otimes B)^{-1} \cdot (A^{-1} \otimes B^{-1}) &= (A \cdot A^{-1}) \otimes (B \cdot B^{-1}) \\
&= E_m \otimes E_n \\
&= E_{m\cdot n}
\end{aligned}$$

Also ist

$$A^{-1} \otimes B^{-1} = (A \otimes B)^{-1}$$

□

Beispiel

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

§4 Das äußere Produkt

Definition ($\mathrm{Alt}_r(V, W)$)

V, W seien K-Vektorräume

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}_r(V, W) \quad = \quad & \{\Phi\colon \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{r} \to W \mid \Phi \,\text{multilinear} \\
& \text{und}\, \Phi(v_1, \ldots, v_r) = 0, \text{falls}\, |\{v_1, \ldots, v_r\}| < r\}
\end{aligned}$$

Bemerkung

Für $\Phi \in \mathrm{Alt}_r(V, W)$ gilt

$$\Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) = -\Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$$

denn betrachte

$$\begin{aligned}
& \Phi(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_r) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \Phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r) + \Phi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r) = 0
\end{aligned}$$

Satz 1 (Existenz des äußeren Produktes)

Zu $r \in K; V, W$ K-Modulen (K-Vektorräume) existiert genau ein K-Modul (Vektorraum) $\bigwedge^r V$ und $\tau \in \mathrm{Alt}_r(V, \bigwedge^r V)$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem $\Phi \in \mathrm{Alt}_r(V, W)$ gibt es genau eine K-lineare Abbildung φ: $\bigwedge^r V \to W$ mit $\Phi = \varphi \circ \tau$.

Man schreibt $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = \tau(v_1, \ldots, v_r)$ für $v_i \in V$ und $\Phi(v_1, \ldots, v_r) = \varphi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)$

$\bigwedge^r V$ heißt **r-faches äußeres Produkt** von V.

Beweis:

$K^{(V \times \ldots \times V)}$ ist freier K-Modul mit Basis $\{(v_1, \ldots, v_r) | v_i \in V\}$

Sei dann

$$\begin{aligned} U := \quad & \langle (v_1, \ldots, av_i + v_i', \ldots, v_r) - a(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_r) \mid \\ & v_i, v_i' \in V; i \in \{1, \ldots, r\} \rangle + \langle (v_1, \ldots, v_r) | \exists i \neq j \text{ mit } v_i = v_j \rangle \end{aligned}$$

Setze dann $\bigwedge^r V = K^{(V \times \ldots \times V)}/U$

Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \tau\colon & V \times \ldots \times V & \to & \bigwedge^r V \\ & (v_1, \ldots, v_r) & \mapsto & (v_1, \ldots, v_r) + U \end{array}$$

multilinear und alternierend.

Sei auch $\Phi \in \mathrm{Alt}_r(V, W)$, setze dann

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & K^{(V \times \ldots \times V)} & \to & W \\ & (v_1, \ldots, v_r) & \mapsto & \Phi(v_1, \ldots, v_r) \end{array}$$

Da Φ alternierend und multilinear, liegen alle Erzeugendenelemente in Kernψ. Also ist

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \bigwedge^r V & \to & W \\ & f + U & \to & \psi(f) \end{array}$$

wohldefiniert und K-linear.

φ ist auf einem Erzeugendesystem von $\bigwedge^r V$, nämlich auf $\{(v_1, \ldots, v_r) + U | v_i \in V\}$ festgelegt, also eindeutig.

$\square$

Bemerkung

Erfüllen auch V' und τ' die universelle Eigenschaft von Satz 1, so gibt es genau einen Isomorphismus $\bigwedge^r V' \to \bigwedge^r V$ mit $\tau = \varphi \circ \tau'$

Satz 2 (Basis des äußeren Produktes)

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V. Dann ist $\bigwedge^r V = \{0\}$ für $r > n$
Und es ist $\bigwedge^r B := \{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r} | 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ Basis von $\bigwedge^r V$.
Also ist $\dim \bigwedge^r V = \binom{n}{r}$.

Beweis:
Nach Konstruktion wird $\bigwedge^r V$ erzeugt von $\{w_1 \wedge \ldots \wedge w_r | w_i \in V\}$. Sei $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_j^i v_i$ mit $a_j^i \in K$, dann gilt:

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \underbrace{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}}_{=0 \text{ falls } v_{i_k} = v_{i_l} \text{ für } k \neq l}$$

es folgt: ist $r > n$, so ist stets $w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = 0$
Sei also $r \leq n$, dann gilt:

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \underbrace{\sum_{\pi \in S_r} \varepsilon(\pi)\, a_1^{i_{\pi(i)}} \ldots a_r^{i_{\pi(r)}}}_{\det A^{i_1 \cdots i_r}} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$$

mit

$$A^{i_1 \ldots i_r} = \begin{pmatrix} a_1^{i_1} & \cdots & a_r^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{i_r} & \cdots & a_r^{i_r} \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \det A^{i_1 \ldots i_r}\, v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$$

Also ist $\bigwedge^r B$ Erzeugendensystem von $\bigwedge^r V$ und $\dim \bigwedge^r V \leq \binom{n}{r}$
zeige dann noch $\dim \bigwedge^r V \geq \binom{n}{r}$ (dann $\bigwedge^r B$ Basis)
Betrachte dazu

$$\Phi(w_1, \ldots, w_r) = \sum_{\pi \in S_r} \varepsilon_\pi w_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\pi(r)}$$

Φ ist alternierend und multilinear.
Nach Satz 1 existiert ein eindeutiges φ: $\bigwedge^r V \to V \otimes \ldots \otimes V$ mit $\varphi(w_1 \wedge \ldots \wedge w_r) = \Phi(w_1, \ldots, w_r)$, dann ist $\{\Phi(v_{i_1}, \ldots v_{i_r}) | 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ linear unabhängige Menge in $V \otimes \ldots \otimes V$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum a_{i_1} \ldots a_{i_r} \Phi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}) \qquad \text{mit } a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in K \\ &= \underbrace{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r} + \sum_{\substack{\pi \in S_r \\ \pi \neq 1}} \varepsilon_\pi v_{i_{\pi(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\pi(r)}}}_{\text{lauter verschiedene Basiselemente } B \text{ von } B \otimes \ldots \otimes B \text{ in } V \otimes \ldots \otimes V} \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß alle $a_{i_1} = \ldots = a_{i_r} = 0$.
Damit gilt:

$$\bigwedge^r V \geq \dim \operatorname{Bild} \varphi \geq \binom{n}{r}$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Folgerung (Eigenschaften des äußeren Produktes)

a) $\dim V = n$, so ist $\dim \bigwedge^r V = \binom{n}{n} = 1$

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis mit $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_j^i v_i$, dann gilt:

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = \det[a_j^i] \cdot (v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)$$

b) Sei $n = 3$ und $r = 2$, dann ist $\dim V \wedge V = \binom{3}{2} = 3$. Also ist $v \cong V$. Sei $B = (v_1, v_2, v_3)$ Basis, dann definiere:

$$\varphi\colon \begin{array}{l} v_1 \to v_2 \wedge v_3 \\ v_2 \to v_3 \wedge v_1 = -v_1 \wedge v_3 \\ v_3 \to v_1 \wedge v_2 \end{array}$$

Dann heißt $v \times w = \varphi^{-1}(v \wedge w)$ das **Vektorprodukt** von v, w.

Ist $w_j = \sum\limits_{i=1}^{3} a_j^i v_i \quad j = 1, 2$, setze dann:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{pmatrix}$$

dann ist:

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_2 &= \det A^{12}\ v_1 \wedge v_2 + \det A^{23}\ v_2 \wedge v_3 + \det A^{13}\ v_1 \wedge v_3 \\ &= (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)\underbrace{v_1 \wedge v_2}_{v_3} + (a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3)\underbrace{v_2 \wedge v_3}_{v_1} \\ &\quad + (a_1^1 a_2^3 - a_2^1 a_1^3)\underbrace{v_1 \wedge v_3}_{-v_2} \end{aligned}$$

Also ist:

$$w_1 \times w_2 = (a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3)v_1 - (a_1^1 a_2^3 - a_2^1 a_1^3)v_2 + (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)v_3$$

Formal kann man dies auch in eine Determinante schreiben, wobei zu bemerken ist, daß dies dann nur eine Schreibweise ist, mit der man sich dies gut merken kann. Es ist aber nicht genau definiert worden und deswegen mit Vorsicht zu genießen. Es ist dann formal, wenn man die Determinante nach der ersten Spalte entwickelt:

$$w_1 \times w_2 = \det \begin{bmatrix} v_1 & a_1^1 & a_2^1 \\ v_2 & a_1^2 & a_2^2 \\ v_3 & a_1^3 & a_2^3 \end{bmatrix}$$

Die Identifizierung $V \leftrightarrow V \wedge V$ für $\dim V = 3$ hat ein Problem, denn bei Koordinatentransformation $(v_1, v_2, v_3) \to (-v_1, -v_2, -v_3)$ ändern sich die Vorzeichen der Koordinaten von $v \in V$, aber die Vorzeichen der Koordinaten von $v \wedge w$ ändern sich nicht.

Satz 3 (Eigenschaften des äußeren Produktes)

a) $(w_1, \ldots, w_r)$ linear abhängig $\Leftrightarrow w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = 0$

b) $U = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \Rightarrow w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = a \cdot (u_1 \wedge \ldots \wedge u_r) \qquad q \in K$
Umkehrung gilt, falls $\dim U = r$ (K Körper)

Beweis:

a) siehe Übung

b) $\Rightarrow$): Ist $\dim U < r$, so ist nach a)

$$0 = w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = u_1 \wedge \ldots \wedge u_r = 0$$

Sei also $\dim U = r$

$$w_j = \sum_{i=1}^{r} a_j^i \cdot u_i \qquad a_j^i \in K \text{ Basiswechselmatrix}$$

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = \underbrace{\det A}_{\neq 0} \cdot u_1 \wedge \ldots \wedge u_r$$

$\Leftarrow$): Sind $(u_1, \ldots, u_r)$ linear unabhängig und ist $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \ngeq \langle w_1, \ldots, w_r \rangle$, so existiert mindestens ein $w_j \notin \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$.
Also $\langle u_1, \ldots, u_r, w_j \rangle$ linear unabhängig.
Ist $w_1 \wedge \ldots \wedge = a \cdot (u_1 \wedge \ldots \wedge u_r)$ mit $a \neq 0$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig, so folgt:

$$\underbrace{w_1 \wedge \ldots \wedge w_r \wedge w_j}_{=0} = \underbrace{a \cdot (u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge w_j)}_{\neq 0} \qquad \text{Widerspruch}$$

dabei benutzten wir:

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_r = w_1 \wedge \ldots \wedge w_r \Rightarrow u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge v = w_1 \wedge \ldots \wedge w_r \wedge v$$

Beweis: siehe Übung

□

Definition (Plücker-Koordinaten)

Ist $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ Teilraum von V, K-Vektorraum, und $\dim U = r$, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V, so heißen die Koordinaten von

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_r = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} x^{i_1, \ldots, i_r} (v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r})$$

die **Plücker-Koordinaten** von u bezüglich B.

Sie sind bis auf skalare Faktoren ($\neq 0$) eindeutig bestimmt.

§5 Äußeres Produkt von linearen Abbildungen

Satz 1 (universelle Eigenschaft des äußeren Produktes)

Sei φ: $V \to W$ K-linear (K kommutativer Ring oder Körper), dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcll} \bigwedge^r V & \to & \bigwedge^r W & \quad \text{mit} \\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_r & \mapsto & \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_r) & \end{array}$$

Ist ψ: $W \to W'$ linear, so ist

$$\bigwedge^r \psi \circ \bigwedge^r \varphi = \bigwedge^r (\psi \circ \varphi) \qquad (*)$$

Beweis:
Definiere $\Phi(v_1, \ldots, v_r) := \varphi(v_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(v_r) \in \bigwedge^r W$
Φ ist alternierend und multilinear.
Also existiert $\bigwedge^r \varphi$ gemäß §4, Satz 1

$$\bigwedge^r \varphi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = \Phi(v_1, \ldots, v_r)$$

Linke Seite und rechte Seite von $(*)$ stimmen überein für $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$. Diese bilden ein Erzeugendensystem, also gilt: linke Seite = rechte Seite (von $(*)$).
Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V und $C = (w_1, \ldots, w_m)$ Basis von W.
$\bigwedge^r B$ sei Basis von V und $\bigwedge^r C$ sei Basis von $\bigwedge^r W$.

$${}_C[\varphi]_B = [a^i_j] = A, \qquad \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a^i_j \cdot w_i$$

$$\bigwedge^r \varphi(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_r}) = \varphi(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi(v_{j_r}) = \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_r \le n} \det A^{(i)}_{(j)} (w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_r})$$

$$\text{wobei } A^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_r} = A^{(i)}_{(j)} = \begin{pmatrix} a^{i_1}_{j_1} & \cdots & a^{i_1}_{j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} & \cdots & a^{i_r}_{j_r} \end{pmatrix}$$

${}_{\bigwedge^r C}[\bigwedge^r \varphi]_{\bigwedge^r B} = \det[A^{(i)}_{(j)}]$ mit $(i) \in \underline{\underline{\binom{m}{r}}}$ und $(j) \in \underline{\underline{\binom{n}{r}}}$
wobei $\underline{\underline{\binom{m}{r}}} = \{(i_1, \ldots, i_r) | 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le m\}$ und $\underline{\underline{\binom{n}{r}}} = \{(j_1, \ldots, j_r) | 1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n\}$.
□

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = {}_C[\varphi]_B$
dann ist: $n = 3, m = 2, r = 2, \underline{\underline{\binom{m}{r}}} = \{(1,2)\}$ und $\underline{\underline{\binom{n}{r}}} = \{(1,2); (1,3); (2,3)\}$.
$\bigwedge^2 A = {}_{\bigwedge^2 C}[\bigwedge^2 \varphi]_{\bigwedge^2 B} (\in K^{1 \times 3})$
$= [\det A^{1,2}_{1,2}, \det A^{1,2}_{1,3}, \det A^{1,2}_{2,3}] = \left[\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right] = [-1, 0, 2]$

Folgerung

a) $A \in K^{m\times n}, D \in K^{n\times p}, (i) \in \underline{\underline{\binom{m}{r}}}, (j) \in \underline{\underline{\binom{n}{r}}}$

$$\det(A\cdot D)^{(i)}_{(j)} = \sum_{(k)\in\underline{\underline{\binom{n}{r}}}} \det A^{(i)}_{(k)} \cdot \det D^{(k)}_{(j)}$$

b) $A \in K^{m\times n}, D \in K^{n\times m}$

$$\det A\cdot D = \sum_{(k)\in\underline{\underline{\binom{n}{m}}}} \det A^{(1,\dots,m)}_{(k)} \cdot \det D^{(k)}_{(1,\dots,m)}$$

Folgt aus Satz 1.

Beispiel

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{pmatrix} 1234321 & 1 & 2 \\ 2468642 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12121 & 36363 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1234321 & 1 \\ 2468642 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 12121 & 36363 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} 1234321 & 2 \\ 2468642 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 12121 & 36363 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 0 + (4-2)(5-6) = -2
\end{aligned}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$n=3\colon\ A \wedge A = \begin{pmatrix} a_1a_2 & * & * \\ 0 & a_1a_3 & * \\ 0 & 0 & a_2a_3 \end{pmatrix}$$

$$n=n\colon\ \bigwedge^2 A = A\wedge A = \begin{pmatrix} a_1a_2 & & & * \\ & a_1a_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-1}a_n \end{pmatrix}$$

Spezialfall

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_2 & \dots & d_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

$\bigwedge^r D$ ist Dreiecksmatrix

$$\bigwedge^r D = \begin{bmatrix} d_1 \dots d_r & * & * & * \\ & \ddots & & \\ 0 & \dots & d_{i_1} \dots d_{i_r} & * \\ 0 & \dots & & \ddots \end{bmatrix} \leftarrow (i_1, \dots, i_r)$$

$$\operatorname{Spur} \bigwedge^r D = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_r \le n} d_{i_1} \cdot \dots \cdot d_{i_r}$$

Folgerung

Sei $A \in K^{n \times n}$ $(K \subseteq \mathbb{C})$.
Dann ist A über $\mathbb{C}$ ähnlich zu

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

und

$$\chi_A = \chi_D = \prod_{i=1}^{n} (X - d_i)$$

$$\begin{aligned} \chi_A &= (X - d_1) \cdot (X - d_2) \cdot \dots \cdot (X - d_n) \\ &= X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right) X^{n-1} + \left(\sum_{i_1 < i_2} d_{i_1} d_{i_2} \right) X^{n-2} \mp \dots + (-1)^n d_1 \cdot \dots \cdot d_n \\ &= X^n - \operatorname{Spur}(D) X^{n-1} + \operatorname{Spur}(\bigwedge^2 D) X^{n-2} \mp \dots + (-1)^n \operatorname{Spur}(\bigwedge^n D) \end{aligned}$$

$\bigwedge^r D$ ähnlich zu $\bigwedge^r A$,weil A ähnlich zu D

$$\chi_A = X^n - \operatorname{Spur}(A) X^{n-1} + \operatorname{Spur}(\bigwedge^2 A) X^{n-2} \mp \dots + (-1)^n \underbrace{\operatorname{Spur}(\bigwedge^n A)}_{= \det A}$$

$$\operatorname{Spur}(\bigwedge^r A) = \left(\sum_{(i) \in \underline{\underline{\binom{n}{r}}}} \det A_{(i)}^{(i)} \right)$$ heißt Summe der $r \times r$-**Hauptminoren**.

Formel gilt allgemein, auch falls $K \not\subseteq \mathbb{C}$.

§6 Skalarbereichserweiterung

Vor.: $K \subset L$ seien kommutative Ringe mit 1 (z.B. Körper). Ist W ein L-Modul, so wird W durch Einschränkung der Operation zu einem K-Modul W_K
genauer:
$W = (W, L, +, \cdot)$
$\cdot\colon L \times W \to W$
$W_K = (W, K, +, \cdot|_{K \times W})$

Beispiel

$K = \mathbb{R} \quad L = \mathbb{C}$

$W = \langle v_1, v_2 \rangle \cong \mathbb{C}^{2\times 1}$

dann ist $W_{\mathbb{R}}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = (v_1, i \cdot v_1, v_2, i \cdot v_2)$

Satz 1 (Skalarbereichserweiterung)

Sei V ein K-Modul, dann kann man $L \otimes_K V$ (Tensorprodukt von K-Moduln; L ist K-Modul) zu einem L-Modul machen mit

$$c \cdot (d \otimes v) = c \cdot d \otimes v \qquad \text{für } c, d \in L, v \in V$$

Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ K-Basis von V, so ist $1 \otimes B = (1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n)$ L-Basis von $L \otimes_K V$.

Falls K Körper, dann ist $\dim_K V = \dim_L(L \otimes_K V)$

Beweis:

Sei $c \in L, \quad d \in L, \quad v \in V$

$$\begin{array}{ccc} L \times V & \xrightarrow{\otimes} & L \otimes V \\ & \Phi_c \searrow & \downarrow \varphi_c \\ & & L \otimes V \end{array}$$

definiere $\Phi_c(d, v) := c \cdot d \otimes v$

Φ_c ist bilinear, also existiert (universelle Eigenschaft) genau eine Abbildung $\varphi_c\colon L \otimes V \to L \otimes V$ K-linear mit

$$\varphi_c(d \otimes v) = \Phi_c(d, v) = c \cdot d \otimes v$$

Definiere für $c \in L, t \in L \otimes_K V$

$$\begin{aligned}
c \cdot t &:= \varphi_c(t) \\
1 \cdot t &= \varphi_1(t) = \mathrm{Id}(t) = t \\
c \cdot (t_1 + t_2) &= \varphi_c(t_1 + t_2) \\
&= \varphi_c(t_1) + \varphi_c(t_2) \\
&= ct_1 + ct_2 \\
(c_1 c_2)t &= (\varphi_{c_1} \circ \varphi_{c_2})(t) \\
&= c_1(c_2 t) \\
(c_1 + c_2)t &= \varphi_{c_1+c_2}(t) \\
&=^1 \varphi_{c_1}(t) + \varphi_{c_2}(t) \\
&= c_1 t + c_2 t
\end{aligned}$$

Also ist $L \otimes_K V$ L-Vektorraum. Es gilt $c \cdot (d \otimes v) = c \cdot d \otimes v$.
Sei $t \in L \otimes_K V$

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{\text{endlich}} c_i \otimes w_i \qquad\qquad c_i \in L \quad w_i \in V \\
&= \left(\sum_j c_j \right) \otimes \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_j c_j a_{ij} \right) \cdot (1 \otimes v_i)
\end{aligned}$$

Beh.: $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$ l.u. über K

$$\begin{array}{ccc}
L \times V & \xrightarrow{\otimes} & L \otimes_K V \\
& \Phi \searrow & \downarrow \varphi \\
& & L^n
\end{array}$$

definiere

$$\Phi(c, \sum_{i=1}^n a_i v_i) := (ca_1, \ldots, ca_n) \in L^n \qquad c \in L, a \in K$$

Φ ist bilinear, also existiert eine Abbildung φ, die linear ist mit

$$\varphi(c \otimes \sum a_i v_i) = (ca_1, \ldots, ca_n)$$

$$\varphi(1 \otimes v_i) = e_1$$

also, da $e_1, \ldots, e_n$ l.u. $\Rightarrow 1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$ l.u.

$\square$

Beispiel

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{m \times n} \cong \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}[X]$$

---

[1] gilt für $t = d \otimes v$

Kapitel 4

Affine und projektive Räume

§1 Affine Räume

Definition (affiner Raum)

V sein K-Vektorraum. Ein **affiner Raum** $\mathcal{A}$ über V ist eine Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ und einer Operation $V \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit

(i) $\underline{0} + P = P \quad \forall P \in \mathcal{A}$

(ii) $(v_1 + v_2) + P = v_1 + (v_2 + P)$,

die regulär ist, d.h. zu $P, Q \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in V$ mit $Q = v + P$
(und schreibt dann $v = \overrightarrow{PQ} \ (\in V)$)

Bemerkung

Es gilt

a) $P, Q, R \in \mathcal{A} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
denn
$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + P = (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ}) + P = \overrightarrow{QR} + (\overrightarrow{PQ} + P) = \overrightarrow{QR} + Q = R$

b) $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \Leftrightarrow P = Q$
$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$

c) t hat genau so viele Punkte, wie V Vektoren hat

$$\mathcal{A} = \{v + P | v \in V\}$$

$$V = \{\overrightarrow{PQ} \, | Q \in \mathcal{A}\} \text{ für (festes) } P \in \mathcal{A}$$

Standardbeispiel

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_i \in K \right\}$$

$v \in V = K^{n\times 1}$
$P \in \mathcal{A}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Für $n = 2$ und $K = \mathbb{R}$ erhalten wir eine Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem

Abbildung 4.1: Ebene in dreidimensionalen Raum

Allgemeiner

V sei Teilraum von W K-Vektorraum, $w_0 \in W$ fest gewählt, so ist

$$\mathcal{A} := w_0 + V$$

eine **Restklasse** von V in W.
Dann ist $(\mathcal{A}, V)$ **affiner Raum** (mit der Addition aus W)
z.B. Lösungsmenge von inhomogenen linearen Gleichungssystemen sind affine Räume.

Definition (affiner Teilraum)

Ist $(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum, V' Teilraum von V, $P \in \mathcal{A}$, dann ist

$$\mathcal{A}' = \{v' + P | v' \in V'\}$$

ein **affiner Teilraum** von $\mathcal{A}$.

Bemerkung

a) Es ist dann $V' = \{\overrightarrow{PP'} \,|P' \in \mathcal{A}'\}$ und $\mathcal{A}'$ ist affiner Raum über V'

b) Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ affine Teilräume von $\mathcal{A}$, so ist

   (i) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ oder

   (ii) $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ ist affiner Teilraum

   über $V_1 \cap V_2$

   (wenn $V_i = \{\overrightarrow{PP_i} \,|P_i \in \mathcal{A}_i\}$ $P \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$)

Definition (affine Abbildung)

$(\mathcal{A}, V), (\mathcal{A}', V')$ seien affine Räume über K (d.h. V, V' K-Vektorräume)
Eine Abbildung α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ heißt **affin**, wenn

(i) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P_1Q_1}\in V \Rightarrow \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}=\overrightarrow{\alpha(P_1)\alpha(Q_1)}\in V'$

(ii) $$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha{:}\overrightarrow{PQ} & \to & \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} \\ V & \to & V' \end{array}$$

   $(P, Q \in \mathcal{A})$

   φ_α ist linear nach (i).

Bemerkung

(i) affine Abbildungen bedeuten geometrisch, daß Parallelogramme auf Parallelogramme abgebildet werden.

(ii) kann man ersetzen durch

$$\overrightarrow{PR}= s\ \overrightarrow{PQ}\Rightarrow\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(R)}= s\ \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}$$

   Teilverhältnisse bleiben erhalten

   Ist $\overrightarrow{PR}= s\ \overrightarrow{PQ}$ so heißt s **Teilverhältnis** von R bezüglich P, Q. Ist z.B. $s = \frac{1}{2}$, so heißt R **Mittelpunkt** von P, Q (Voraussetzung char $K \neq 2$)

beachte:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}) &= \varphi_\alpha(\overrightarrow{PR})\\
&= \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}\\
&= \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}+\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(R)}\\
&= \varphi_\alpha(\overrightarrow{PQ})+\varphi_\alpha(\overrightarrow{QR})
\end{aligned}$$

Also ist φ_α automatisch additiv.

Definition (Affinität)

$\alpha\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ heißt **Affinität**, wenn α affin und bijektiv ist.

Satz 1 (Eigenschaften von affine Abbildungen)

a) α Affinität $\Leftrightarrow \varphi_\alpha$ bijektiv $(V\to V')$ und α affin

b) α,β affin $\Rightarrow \alpha\circ\beta$ affin

c) $\mathrm{AGL}(\mathcal{A}) := \{\alpha\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A} | \alpha \text{ Affinität}\}$ ist eine Gruppe

d) $\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \{\alpha\in\mathrm{AGL}(\mathcal{A}) | \varphi_\alpha=\mathrm{Id}_V\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{AGL}(\mathcal{A})$, die **Translationsgruppe** von $\mathcal{A}$

$$\mathcal{T}(\mathcal{A})\cong(V,+)$$

Beweis:

a) gegeben

$$\begin{aligned}
\alpha\colon \mathcal{A} &\to \mathcal{A}' \text{ affin}\\
\overrightarrow{PQ} &\to \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}
\end{aligned}$$

Sei $\varphi=\varphi_\alpha\colon V\to V'$ injektiv

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\varphi(PQ)=\underline{0}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\underline{0})\\
&\Leftrightarrow (\alpha(P)\alpha(Q)=\underline{0})\\
&\Leftrightarrow (\alpha(P)=\alpha(Q)\Rightarrow P=Q)\\
&\Leftrightarrow \alpha \text{ injektiv}
\end{aligned}$$

wähle $P\in\mathcal{A}$ fest

φ surjektiv

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow V'=\{\varphi(v)|v\in V\}\\
&\Leftrightarrow V'=\{\alpha(P)\alpha(Q)|Q\in\mathcal{A}\}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{A}'=\{\alpha(Q)|Q\in\mathcal{A}\}\\
&\Leftrightarrow \alpha \text{ surjektiv}
\end{aligned}$$

b) $\mathcal{A} \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$

α, β affin mit linearen Abbildungen $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$

$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta(\overrightarrow{PQ}) = \varphi_\alpha(\varphi_\beta(\overrightarrow{PQ})) = \varphi_\alpha(\overrightarrow{\beta(P)\beta(Q)}) = \overrightarrow{\alpha(\beta(P))\alpha(\beta(Q))}$

Also $\varphi_{\alpha\circ\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ mit $\alpha \circ \beta$ affin

c) α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sei affin mit linearen Abbildung φ_α und bijektiv

$\alpha^{-1}(\overrightarrow{\alpha(P)})\alpha^{-1}(\overrightarrow{\alpha(Q)}) = \overrightarrow{PQ} = (\varphi_\alpha)^{-1}\varphi_\alpha(\overrightarrow{PQ}) = (\varphi_\alpha)^{-1}(\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)})$

also $\varphi_{\alpha^{-1}} = (\varphi_\alpha)^{-1}$ und α^{-1} affin

d) Sei $\varphi_\alpha = \mathrm{Id}$

α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ affin, also

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}$ für $P, Q \in \mathcal{A}$

$\overrightarrow{P\alpha(Q)} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q\alpha(P)} = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)} + \overrightarrow{Q\alpha(P)} = \overrightarrow{Q\alpha(Q)} =: v_\alpha \in V$

Dann gilt $\alpha(P) = v_\alpha + P$ und

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \to & v_\alpha \\ (\mathcal{T}(\mathcal{A}), \circ) & \to & (V, +) \end{array}$$

ist Isomorphismus

□

§2 Affine Koordinatensysteme

$(\mathcal{A}, V)$ affiner Raum, $\dim \mathcal{A} := \dim_K V$.

Definition (affines Koordinatensystem)

Im affinen Raum $(\mathcal{A}, V)$ ist ein **affines Koordinatensystem** $S = (P_0, \ldots, P_n), P_i \in \mathcal{A}$ ein $(n+1)$-Tupel von Punkten mit $B = (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ eine Basis von V.
Ist $P \in \mathcal{A}$, so ist $\overrightarrow{P_0P} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$, dann heißt

$$\nu_S(P) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

affiner Koordinatenvektor von P und

$$\mu_S(P) := \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

inhomogener Koordinatenvektor von P.

Satz 1 (Wechsel von affinen Koordinatensystemen)

Seien S, S' affine Koordinatensysteme von $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ mit zugehörigen K-Basen B, B' von V, V'; $P \in \mathcal{A}$. Sei nun α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affin, dann:

$$\nu_{S'}(\alpha(P)) = {}_{B'}[\varphi_\alpha]_B \cdot \nu_S(P) + \nu_{S'}(\alpha(P_0)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

und

$$\mu_{S'}(\alpha(P)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \mu_S(P)$$

Beweis:

φ_α: $V \to V'$ $\quad \varphi_\alpha(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}$

(Nach §1) $S = (P_0, \ldots, P_n)$ $\quad S' = (Q_0, \ldots, Q_m)$

Es ist:

$$\nu_{S'}(\alpha(P)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \nu_{S'}(\alpha(P_0)) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \nu_S(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Q_0\alpha(P)} &= \overrightarrow{Q_0\alpha(P_0)} + \overrightarrow{\alpha(P_0)\alpha(P)} \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \overrightarrow{Q_0Q_i} + \varphi_\alpha(\overrightarrow{P_0P}) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \overrightarrow{Q_0Q_i} + \sum_{j=1}^n x_j \varphi_\alpha(\overrightarrow{P_0P_j}) \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \overrightarrow{Q_0Q_i} + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \overrightarrow{Q_0Q_i} \\
&= \sum_{i=1}^m \underbrace{(a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)}_{y_i} \cdot \overrightarrow{Q_0Q_i} \\
&= \sum_{i=1}^m y_i \overrightarrow{Q_0Q_i}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2

Sind $P_0 \in \mathcal{A}, Q_0 \in \mathcal{A}'$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$ beliebig gegeben, so existiert genau eine affine Abbildung α: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mit $\alpha(P_0) = Q_0$ und $\varphi_\alpha = \varphi$.

Beweis:

Definiere $\alpha(P)$ für $P \in \mathcal{A}$ durch:

$$\overrightarrow{Q_0\alpha(P)} = \varphi(\overrightarrow{P_0P}) \in V'$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha(P)\alpha(P')} &= \overrightarrow{\alpha(P)Q_0} + \overrightarrow{Q_0\alpha(P')} \\
&= -\overrightarrow{Q_0\alpha(P)} + \overrightarrow{Q_0\alpha(P')} \\
&= -\varphi(\overrightarrow{P_0P}) + \varphi(\overrightarrow{P_0P'}) \\
&= \varphi(-\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0P'}) \\
&= \underbrace{\varphi(\overrightarrow{PP'})}_{\text{hängt nur von} \overrightarrow{PP'} \text{ ab und ist linear}}
\end{aligned}$$

Also α affin: $\overrightarrow{Q_0\alpha(P_0)} = \varphi(\overrightarrow{P_0P_0}) = \underline{0} \Rightarrow Q_0 = \alpha(P_0)$
Eindeutigkeit: selbst.

□

Satz 3 (affine Gruppen)

Ist $P \in \mathcal{A}$, so ist

$$\mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P := \{\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A}) | \alpha(P) = P\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{AGL}(\mathcal{A})$, die zu $\mathrm{GL}(V)$ isomorph ist.

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A}) | \varphi_\alpha = \mathrm{Id}\}$$

Es ist $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P = \{\mathrm{Id}\}$

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) \cdot \mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P = \mathrm{AGL}(\mathcal{A})$$

d.h., jedes $\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})$ kann man schreiben als

$$\alpha = \tau \cdot \alpha_P \text{ mit } \tau \in \mathcal{T}(\mathcal{A}), \alpha_P \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P$$

Beweis:

Nach §1 ist $\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \varphi_\alpha \in \mathrm{GL}(V)$
Nach Satz 2 existiert zu $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ und P genau ein $\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})$ mit

$$\alpha = \alpha_{\varphi,P}, \quad \alpha(P) = P \quad \text{und}\, \varphi_\alpha = \varphi$$

Zuordnung: $\underset{\mathrm{GL}(V)\to\mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P}{\varphi \mapsto \alpha = \alpha_{\varphi,P}}$ dies ist ein Isomorphismus.

Ist $\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})$ beliebig und ist $V := \overrightarrow{P\alpha(P)}$, so ist $P_v \in \mathcal{T}(\mathcal{A}), \tau v(Q) = v + Q$
dann ist z.B.: $\tau_v(P) = v + P = \alpha(P)$ und $\alpha_P := \tau_v \circ \alpha$ erfüllt $\alpha_P(P) = P, \alpha_P \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P$

$$\alpha = \tau_v \circ \alpha_P$$

Ist auch $\beta = \tau_w \circ \beta_P$ mit $\beta_P \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P$ so ist:
$\alpha \circ \beta = \tau_v \circ \alpha_P \circ \tau_w \circ \beta_P = \tau_v \circ \underbrace{(\alpha_P \circ \tau_w \circ \alpha_P^{-1})}_{\tau_{\varphi_{\alpha(w)}}} \circ \alpha_P \circ \beta_P = \tau_{v+\varphi_{\alpha(w)}} \circ \alpha_P \circ \beta_P$

denn: $\varphi_{\alpha_P \circ \tau_w \circ_P^{-1}} = \varphi_{\alpha_P} \circ \underbrace{\varphi_{\tau_w}}_{=\mathrm{Id}} \circ \varphi_{\alpha_P}^{-1} = \mathrm{Id}_V$.

□

Bemerkung

Ist $\dim V = n < \infty$, so hat man Isomorphismen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{AGL}(\mathcal{A}) &\leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{GL}(n.K), a \in K^{n\times 1} \right\} \\
\mathrm{AGL}(\mathcal{A})_P &\leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{GL}(n,K) \right\} = \mathrm{GL}(n,K) \\
\mathcal{T}(\mathcal{A}) &\leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & E_n \end{pmatrix} \middle| a \in K^{n\times 1} \right\} \cong (K^{n\times 1}, +)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + Ab & AB \end{pmatrix}$$

§3 Euklidische Punkträume

Definition (euklidischer Punktraum)

$\mathcal{A}$ sei affiner Raum über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Sei (V, Φ) euklidischer Raum.
Dann heißt $(\mathcal{A}, V, \Phi)$ **euklidischer Punktraum**.

Für $P, Q \in \mathcal{A}$ sei $d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = +\sqrt{\Phi(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})}$ der **Abstand** von P und Q.

Bemerkung

Es gilt:

$d(P,Q) > 0$ für $P \neq Q; \alpha(P,Q) = 0$ für $P = Q$
$d(P,Q) = d(Q,P)$
$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ $\quad$ **$\triangle$-Ungleichung**

Definition (Isometrie)

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ euklidische Punkträume, so heißt eine affine Abbildung $\beta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ **Isometrie**, wenn

$$(*) \qquad d(\beta(P), \beta(Q)) = d(P,Q) \quad \forall P, Q \in \mathcal{A}$$

Bemerkung

Man braucht eigentlich nicht zu fordern, daß β affin ist; dies folgt aus $(*)$.

Definition (Bewegung und cartesisches Koordinatensystem)

a) $\beta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ **Bewegung**, falls β Isometrie und bijektiv.

b) $S = (P_0, \ldots, P_n)$ affines Koordinatensystem heißt ein **cartesisches Koordinatensystem**, wenn $B = (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ eine ON-Basis von (V, Φ) ist.

$(\mathcal{A}, V, \Phi)$ euklidischer Punktraum
$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\beta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} | \beta \text{ Isometrie und bijektiv } \}$
Ist $S = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ cartesisches Koordinatensystem, so ist $B = (\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n})$ ON-Basis von V.

Bemerkung

$$\nu_s(\beta(P)) = A\nu_s(P) + \nu_s\beta(P_0)$$

Ist S cartesisch und β eine Bewegung, so ist

$$A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n \times n} | A^{\mathrm{tr}}A = E_n\}$$

Mit $P \in A$ ergibt sich

$$\mathcal{B}_{P_0} = \{\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) | \beta(P_0) = P_0\} \cong O(n, \mathbb{R})$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{AGL}(\mathcal{A}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \mathcal{B}(\mathcal{A}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{AGL}(\mathcal{A})_{P_0} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \arrow[dl] \\
\mathcal{T}(\mathcal{A}) \arrow[dr] & & \mathcal{B}(\mathcal{A})_{P_0} \cong \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \arrow[dl] & \\
 & \mathrm{Id} & &
\end{tikzcd}$$

Klassifikation der Bewegungen im zweidimensionalen euklidischen Punktraum

a) β habe Fixpunkt P_0

(i) $\det \varphi_\beta = 1 \qquad \beta =$ **Drehung** um P_0

$$\varphi_\beta = (\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\beta(P)\beta(Q)}$$

(ii) $\det \varphi_\beta = -1 \qquad \beta =$ **Spiegelung** an der Geraden durch P_0.

b) β habe keinen Fixpunkt

(iii) $\varphi_\beta = \mathrm{id} \qquad \beta =$ **Translation**

(iv) $\dim(\mathrm{E}_{\varphi_\beta}(1)) = 1 \quad \beta =$ **Gleitspiegelung** $= \tau_{v_0} \circ \sigma$ mit σ Spiegelung an der Geraden

$$\{v + P_1 | v \in \mathrm{E}_\varphi(1)\}, \qquad \langle v_0 \rangle = \mathrm{E}_\varphi(1)$$

Satz 1 (Zusammenhang zwischen Fixpunkt und Eigenwerten)

Sei $\dim \mathcal{A} = n \geq 2, \beta \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ habe keinen Fixpunkt, dann hat φ_β den Eigenwert 1 und es existiert $P_1 \in \mathcal{A}$ und $v_0 \in \mathrm{E}_{\varphi_\beta}(1)$ und $\beta = \tau_{v_0} \circ \beta_0$ mit $\beta_0 \in B(P_1)$

Beweis:
(für $n = 2$)
Sei $P, P_1 \in \mathcal{A}$ beliebig, $v = \overrightarrow{P_1 P}$ und $w = \overrightarrow{P_1 \beta(P_1)}$, dann ist $\overrightarrow{\beta(P_1)\beta(P)} = \varphi(v), \quad \varphi = \varphi_\beta$

$$\overrightarrow{P\beta(P)} = -v + w + \varphi(v) = w + (\varphi - \mathrm{id})v$$

Wäre 1 kein Eigenwert von φ, so wäre $\varphi - \mathrm{id}_v$ invertierbar und insbesondere surjektiv. Dann gäbe es $v \in V$ mit $(\varphi - \mathrm{id})_v = -w$; für dieses $v = \overrightarrow{P_1 P}$ wäre $\overrightarrow{P\beta(P)} = 0$, also $P = \beta(P)$. (Widerspruch zur Voraussetzung!)
$n = 2: \qquad \mathrm{E}_\varphi(1) = V, \quad \varphi = \mathrm{id}, \quad \beta$ Translation ($\beta_0 = \mathrm{id}_A$)

$$V = \mathrm{E}_\varphi(1) \oplus \mathrm{E}_\varphi(1)^\perp; \qquad \mathrm{E}_\varphi(1)^\perp = \mathrm{E}_\varphi(-1)$$

$w = v_0 + v_1$ mit $v_0 \in \mathrm{E}_\varphi(1)$ und $v_1 \in \mathrm{E}_\varphi(-1)$
Definiere P_0 durch $\overrightarrow{P_1 P_0} = \frac{1}{2} v_1$, dann ist

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0\beta(P_0)} &= \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1\beta(P_1)} + \underbrace{\overrightarrow{\beta(P_1)\beta(P_0)}}_{\varphi(\overrightarrow{P_1 P_0}) = \varphi(\frac{1}{2}v1) = -\frac{1}{2}v_1} \\
&= -\frac{1}{2}v_1 + w - \frac{1}{2}v_1 = v_0
\end{aligned}$$

$\beta_0 = {\tau_{v_0}}^{-1} \circ \beta$ (dann ist $\beta = \tau_{v_0} \circ \beta_0$)
$\overrightarrow{P_0\beta_0(P_0)} = \overrightarrow{P_0\beta(P_0)} + \overrightarrow{\beta(P_0)\beta_0(P_0)} = v_0 - v_0 = 0$
also $\beta_0(P_0) = P_0$, dann $\overrightarrow{\beta(P_0)\beta_0(P_0)} = \overrightarrow{\beta(P_0)\tau_{v_0}\beta(P_0)} = -v_0$

□

§4 Klassifikation der Quadriken

$(\mathcal{A}, V)$ sei affiner Raum, V sei K-Vektorraum, char $K \neq 2$.
$S = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ sei affines Koordinatensystem.

Definition (Quadrik)

a) $$Q = \left\{ P \in \mathcal{A} \,\middle|\, v_s(P) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} 2a_i x_i + a_0 = n \right\}$$
heißt **Quadrik** in $\mathcal{A}$.

b) Zwei Quadriken Q, Q' heißen **affin äquivalent**, wenn $Q' = \alpha(Q)$ mit $\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})$.

c) Ist $(\mathcal{A}, V, \Phi)$ ein euklidischer Punktraum, so heißen Q, Q' **kongruent**, wenn $Q' = \beta(Q)$ mit $\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Zwei Betrachtungsweisen:
Gegeben Quadrik Q:

(i) Suche eine affin äquivalente (kongruente) Quadrik Q', die bezüglich des gleichen Koordinatensystems S eine einfache Gleichung hat.

(ii) Suche zu Q ein neues Koordinatensystem S' (im euklidischen Fall stets cartesisch) so, daß die Gleichung für Q bezüglich S' einfacher ist.

Die Gleichung in Definition a) kann man in inhomogenen Koordinaten $\mu_S(P) = (1, x_1, \ldots, x_n)$ einfacher schreiben $(\nu_S(P))^{\mathrm{tr}} A \cdot \nu_S(P) + 2[a_1, \ldots, a_n]\nu_S(P) + a_0 = 0$):

$$\mu_S(P)^{\mathrm{tr}} \left(\begin{array}{c|ccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \end{array} \right) \mu_S(P) = 0$$

Bemerkung

Man kann stets annehmen, daß $A^{\mathrm{tr}} = A$, sonst ersetze a_{ij}, a_{ji} durch $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}, \frac{a_{ji}+aij}{2}$.
$\alpha \in \mathrm{AGL}(\mathcal{A})$ (bzw. $\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ Bewegungsgruppe im euklidischen Fall)
$\mu_s(\alpha(P)) = T\mu_s(P)$ mit

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ c_n & & & \end{bmatrix} \qquad \text{mit } T_1 \in \mathrm{GL}(n, K) \text{ bzw. } T_1 \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}))$$

$Q = \{P | \mu_s(P)^{\mathrm{tr}} A \mu_s(P) = 0\}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ a_n & & & \end{bmatrix} \qquad \text{mit } A_1 = A^{\mathrm{tr}} \in K^{n\times n}$$

$$\begin{aligned} Q &= \{\alpha(P) \mid (T\mu_s(P))^{\mathrm{tr}} A \mu_s(\alpha(P)) = 0\} \\ &= \{\alpha(P) \mid \mu_s(P)^{\mathrm{tr}} (T^{\mathrm{tr}} A T) \cdot \mu_s(P) = 0\} \end{aligned}$$

$$\alpha^{-1}(Q) = \{P \mid \mu_s(P)^{\mathrm{tr}} (T^{\mathrm{tr}} A T) \mu_s(P) = 0\}$$

Nebenrechnung

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{tr}} A T &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & c^{\mathrm{tr}} \\ \hline 0 & T_1^{\mathrm{tr}} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a_0 & a^{\mathrm{tr}} \\ \hline a & A_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c & T_1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & c^{\mathrm{tr}} \\ \hline 0 & T_1^{\mathrm{tr}} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a_0 + a^{\mathrm{tr}} c & a^{\mathrm{tr}} T_1 \\ \hline a + A_1 c & A_1 T_1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} a_0' & a'^{\mathrm{tr}} \\ \hline a' & T_1^{\mathrm{tr}} A_1 T_1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

mit $a_0' = a_0 x^2 c + c^{\mathrm{tr}} A_1 c \in K$ und $a' = T_1^{\mathrm{tr}} a + T_1^{\mathrm{tr}} A_1 c \in K^{n\times 1}$
Da $\mathrm{char} K \neq 2$ existiert $T_1 \in \mathrm{GL}(n.K)$ mit

$$T_1^{\mathrm{tr}} A T_1 = \mathrm{Diag}(d_1, \dots d_r, 0 \dots 0) \quad \text{mit } d_i \neq 0$$

Im euklidischen Fall gibt es nach Spektralsatz eine orthogonale Matrix $T_1 \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ $(T_1^{\mathrm{tr}} = T_1^{-1})$ mit

$$T_1^{\mathrm{tr}} A T_1 = \mathrm{Diag}(d_1, \dots d_r, 0 \dots 0),$$

wobei $d_1, \dots d_r$ Eigenwerte von A sind.

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}$$

$$A' = T'^{\mathrm{tr}} A T' = \left[\begin{array}{c|ccccc} a_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ \hline b_1 & d_1 & & & & \\ b_2 & & \ddots & & & \\ \vdots & & & d_r & & \\ b_{n-2} & & & & 0 & \\ b_{n-1} & & & & & \ddots \\ b_{n-1} & & & & & 0 \end{array}\right]$$

neue Gleichung für die Quadriken: $\sum\limits_{i=1}^{r} d_i x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} 2b_i x_i + a_0 = 0.$

Durch quadratische Ergänzung und Transformation mit

$$T'' = \left[\begin{array}{cc} 1 & c'^{\mathrm{tr}} \\ c' & \mathrm{E}_n \end{array}\right] c' = [-\frac{b_1}{d_1}, \dots, \frac{b_r}{d_r}, 0 \dots 0]^{\mathrm{tr}}$$

erhält man:

$$A'' = T''^{\mathrm{tr}} A' T'' = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} a_0 & 0 & \dots & 0 & b_r+1 & \dots & b_n \\ \hline 0 & d_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & d_r & & & \\ \hline b_{r+1} & & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ b_n & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

Ist ein $b_s \neq 0, s \in \{r+1, \dots n\}$, so kann man $x_s \to x_s = \frac{a_0'}{b_s}$ annehmen, so daß $a_0' = 0$ und man findet $c \in \mathrm{GL}(n-r, K)$, bzw. $c \in \mathcal{O}(n-r, \mathbb{R})$ mit

$$c^{\mathrm{tr}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit}\, b \in K;\ b \neq 0;\ b^2 = \sum_{i=r+1}^{n} b_i^2$$

$$T''' = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{E}_r & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & c \end{array}\right]$$

$$T'''^{\mathrm{tr}} A'' T''' = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & b\,0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & d_1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & & d_r & & & \\ \hline b & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & c & \\ 0 & & & & & & \end{array}\right]$$

Satz 1 (Normalform der Quadriken)

Ist char$K \neq 2$, so ist jede Quadrik im n-dimensionalen affinen Raum affin äquivalent (falls $K = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}$ euklidischer Punktraum sogar kongruent) zu einer Quadrik mit Gleichung

a) $\sum_{i=1}^{r} d_i x_i^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, oder

b) $\sum_{i=1}^{r} d_i x_i^2 = 2x_{r+1},\ r > n$

Falls $K = \mathbb{R}$ ist jede Quadrik in $\mathcal{A}$ affin äquivalent zu einer mit Gleichung a) oder b), wobei alle $d_1 \in \{1, -1\}$ sind.

Beispiel

nicht leere Quadriken im 2-dimensionalen Punktraum:

a) $x_1^2 = 0$ Gerade
   $x_1^2 + x_2^2 = 0$ Punkt $(d_1^2 x_1^2 + d_2^2 x_2^2 = 0)$
   $d_1^2 x_1^2 - d_2^2 x_2^2 = 0$ Paar sich schneidender Geraden $d_i \neq 0$,
   $d_1^2 x_1^2 = 1$ Paar paralleler Geraden $(d_1 x_1 - 1)(d_1 x_1 + 1) = 0$
   $d_1^2 x_1^2 + d_2^2 x_2^2 = 1$ Ellipse (falls $d_1 = d_2 \Rightarrow$ Kreis)
   $d_1^2 x_1^2 - d_2^2 x_2^2 = 1$ Hyperbel

b) $d_1 x_1^2 = 2x_2$ Parabel

Beispiel

Ellipse ist das affine Bild eines Kreises, sie hat zwei Hauptachsen
Aufgabe: Konstruiere Tangente an Ellipse in P'

Beispiel

Sei $\mathcal{A}$ ein Euklidischer Punktraum und

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2x_2x_3 - 12x_1 - 6\sqrt{2}x_2 + 6\sqrt{2}x_3 = 1,$$

dann ergibt sich dazu die Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 6 & 3 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 & 3 & -1 \\ 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Abbildung 4.2: Tangete an eine Ellipse

Es ist dann $\det(XE_3 - A_1) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & x-3 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & x-3 \end{bmatrix} = (x-3)(x-6)x$

Also ergibt sich für die normierten Eigenvektoren:

$$v_{t=3} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_{t=6} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad v_{t=0} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Setze dann $T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ dann ist T' orthogonal und es gilt:

$$T'^{\mathrm{tr}}AT' = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 & 6 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit neuen Koordinaten: $3y_1^2 + 6y_2^2 - 12y_1 + 12y_3 = 1$.
Durch Umformen erhält man:

$$3(\underbrace{y_1 - 2}_{z_1})^2 + 6\underbrace{y_2}_{z_2}{}^2 + 12(\underbrace{y_3 - \frac{13}{12}}_{z_3}) = 0$$

Also ergibt sich in den neuen Koordinaten $3z_1^2 + 6z_2^2 + 12z_3 = 0$ und somit $\frac{z_1^2}{2} + z_2^2 + 2z_3 = 0$ als Normalform eines parabolischen Ellipsoids

Abbildung 4.3: parabolisches Ellipsoid

§5 Homogene Koordinaten, Satz von Desargues

Sei $(\mathcal{A}, V)$ affiner Punktraum, $S = (P_0, \dots, P_n)$ affines Koordinatensystem, $P \in \mathcal{A}$ mit $\overrightarrow{P_0P} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0P_i}$ und $\mu_s(P) = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Koordinatenvektor von P.

Definition (homogene Koordinaten)

$z \in K^{(n-1)\times 1}$ heißt **homogener Koordinatenvektor** von P bezüglich S, wenn

$$\langle z \rangle = \langle \mu_s(P) \rangle$$

beachte z ist nur bis auf ein skalares Vielfaches $\neq 0$ eindeutig bestimmt.

Beispiel

Die Gleichung einer Quadrik in inhomogenen Koordinaten lautet:

$\sum a_{ij}x_ix_j + \sum a_ix_i + a_0 = 0$. Setze dann $z_i = \frac{x_i}{x_0}$, dann ergibt sich $\sum\limits_{i,j=0}^{n} a_{ij}z_iz_j = 0$ mit $a_{i0} = a_{01} = a_i$ in homogenen Koordinaten.

Seien nun $P \neq Q \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{A}$ liegt auf der Geraden $g(P, Q)$ genau dann, wenn $\overrightarrow{PR} = t \overrightarrow{PQ}$ mit $t \in K$

Seien nun $\langle \mu_s(P) \rangle = \langle x \rangle$ und $\langle \mu_s(Q) \rangle = \langle y \rangle$ und $\langle \mu_s(R) \rangle = \langle z \rangle$, dann folgt dann für alle $i \in 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
& \frac{z_i}{z_0} - \frac{x_i}{x_0} && = t\left(\frac{y_i}{x_0} - \frac{x_i}{x_0}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & z_i && = t\frac{z_0}{y_0}y_i + (1-t)\frac{z_0}{x_0}x_i \\
\Leftrightarrow \quad & z \in \langle y, x \rangle &&
\end{aligned}$$

Also gilt das folgende Lemma:

Lemma (Geradenbedingung)

Seien P, Q, R paarweise verschiedene Punkte in $\mathcal{A}$, dann liegt R genau dann auf der Geraden $g(P, Q)$, wenn es zu vorgegebenem homogenen Koordinatenvektor z von R homogene Koordinatenvektoren $x, y \in K^{(n+1)\times 1}$ von P und Q gibt, mit $z = x + y$.

Beweis:

Dies folgt sofort aus der obigen Betrachtung.

□

Bemerkung

Sei $n = 2$ und $(\mathcal{A}, V)$ 2-dimensionaler affiner Raum und seien $P \neq Q$ und $P' \neq Q'$ in $\mathcal{A}$ mit homogenen Koordinatenvektoren $x, y, x', y' \in K^{3\times 1}$. Gilt nun $g(P, Q) \neq g(P', Q')$, dann folgt $P' \notin g(P, Q)$ oder $Q' \notin g(P, Q)$

Also gilt $x' \notin \langle x, y \rangle$ oder $y' \notin \langle x, y \rangle$

Also gilt wegen dem Dimensionssatz $\langle x, y \rangle \cap \langle x', y' \rangle = \langle z \rangle$ mit $z \neq 0$:

$$\underbrace{\langle x, y \rangle}_{\dim 2} + \underbrace{\langle x', y' \rangle}_{\dim 2} = K^{3\times 1}$$

Dann unterscheide 2 Fälle:

(i) $z_0 \neq 0$, dann ist z homogener Koordinatenvektor von $R \in \mathcal{A}$.

Also ist $R \in g(P, Q) \cap g(P', Q')$

(ii) $z_0 = 0$, dann ist z kein homogener Koordinatenvektor eines Punktes aus $\mathcal{A}$, also haben $g(P, Q)$ und $g(P', Q')$ keinen Schnittpunkt, sind also parallel.

Abbildung 4.4: Satz von Desargues

Satz von Desargues

Sei $\dim \mathcal{A} = 2$ (affine Ebene) und $P_0 \in \mathcal{A}$ Schnittpunkt von 3 verschiedenen Geraden $g(P_1, Q_1), g(P_2, Q_2), g(P_3, Q_3)$. Seien dann noch Z_i die Schnittpunkte von $g(P_j, P_k)$ und $g(Q_j, Q_k)$ mit $i, j, k = 1, 2, 3$. Dabei sollen alle so erhaltenen Punkte verschieden sein. Dann liegen Z_1, Z_2, Z_3 auf einer Geraden.

Beweis:

$x^{(i)} \in K^{3\times 1}$ sie homogener koordinatenvektor von P_i, $i = 0, 1, 2, 3, 3$ und ebenso $y^{(i)} \in K^{3\times 1}$ homogener Koordinatenvektor von Q_i. Dann gilt nach Voraussetzung und Lemma: $x^{(0)} = x^{(j)} + y^{(j)}$ für $j = 1, 2, 3$. Setze dann

$$z^{(3)} = x^{(1)} - x^{(2)} = y^{(2)} - y^{(1)} \in \langle x^{(1)}, x^{(2)} \rangle \cap \langle y^{(1)}, y^{(2)} \rangle$$

als homogenen Koordinatenvektor von Z_3 (der existiert nach Voraussetung).
Ebenso erhält man:

$$z^{(1)} = x^{(2)} - x^{(3)} = y^{(3)} - y^{(2)} \in \langle x^{(2)}, x^{(3)} \rangle \cap \langle y^{(2)}, y^{(3)} \rangle$$

und

$$z^{(2)} = x^{(3)} - x^{(1)} = y^{(1)} - y^{(3)} \in \langle x^{(1)}, x^{(3)} \rangle \cap \langle y^{(1)}, y^{(3)} \rangle$$

Nach Voraussetzung sind $z^{(i)}$ homogene Koordinatenvektoren von Z_i. Nun gilt

$$z^{(1)} + z^{(2)} = x^{(2)} - x^{(1)} = -z^{(3)} \in \langle z^{(1)}, z^{(2)} \rangle$$

Also gilt $Z_3 \in g(Z_1, Z_2)$ nach Lemma.

$\square$

Abbildung 4.5: Zusatz zum Satz von Desargues

Zusatz zum Satz von Desargues

Setzt man nicht die Existenz der Schnittpunkte Z_i voraus, sondern, daß
$g(P_2, P_3) \parallel g(Q_2, Q_3) \wedge g(P_1, P_3) \parallel g(Q_1, Q_3)$, so erhält man im Beweis wegen
$z_0^{(1)} = z_0^{(2)} = 0$ auch $z_0^{(3)} = 0$. Also gilt dann auch
$g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2)$
Eine entsprechende Variante erhält man, wenn P_0 nicht existiert.

§6 Projektive Räume und Ebenen

Definition (projektiver Raum)

Sei V $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum, dann heißt

$$P(V) = \{\langle v\rangle \,|v \in V, v \neq 0\} \qquad \dim P(V) = n$$

projektiver Raum über V.
Ist U Teilraum von V und $\dim U = r+1$, dann heißt

$$\{\langle v\rangle \,|v \in U\backslash\{0\}\}$$

r-dimensionaler **projektiver Unterraum**.

Bemerkung

$$A_0 = \left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right] \middle| x_i \in K \right\} \hookrightarrow^{1} \quad P(K^{n+1})$$
$$x \quad \mapsto \quad \langle x \rangle$$

Die $\langle v \rangle \in P(K^{n+1}) \backslash \varphi_0(A_0)$ heißen **uneigentliche Punkte** von A_0.

$$A_0 \cong A_i = \left\{ \left[\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right] \middle| x_i = 1 \right\} \hookrightarrow \quad P(K^{n+1})$$
$$\varphi_i \colon x \quad \mapsto \quad \langle x \rangle$$

Eine andere Einbettung bedeutet andere uneigentliche Punkte.

Beispiel

1) $n = 1; K = \mathbb{R}$

$P(\mathbb{R}^2) = \varphi_0(A_0) \cup \left\{ \left\langle \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \right\rangle \right\}$

2) $n = 2; K = \mathbb{R}$

$P(\mathbb{R}^3) \;=\; \varphi_0(A_0) \cup \underbrace{\left\{ \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\neq \underline{0}} \right\rangle \middle| x_i \in K \right\}}_{\text{uneigentliche Gerade}}$ 2 verschiedene Geraden haben in $P(\mathbb{R}^3)$ einen Schnittpunkt $\langle x, y \rangle \cap \langle x', y' \rangle = \langle z \rangle$.

2') Ellipse in

$$\begin{aligned} A_0 \quad &= \quad \left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \middle| x_0 = 1 \wedge \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0} \right)^2 = 1 \right\} \\ &= \quad \left\{ \left[\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \right] \middle| x_0 = 1 \wedge x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 \right\} \end{aligned}$$

[1] diese Zeichen bedeutet Einbettung

Abbildung 4.6: Ellipse im dreidimensionalen Raum

Kegel

$$K = \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle \middle| x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 \right\}$$

A_1: $\quad x_1 = 1 \quad \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle \cap A_1 \middle| x_0^2 - x_1^2 = 1 \right\}$ ist eine Hyperbel.

A_3: $\quad x_1 - x_0 = 1 \quad \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle \cap A_3 \middle| x_1 + x_0 + x_2^2 = 0 \right\}$ ist eine Parabel.

Somit lassen sich also alle Quadriken durch Kegelschnitte erzeugen.

3) $n = 3; K = \mathbb{Z}_2$

$$|P(\mathbb{Z}_2^3)| = 7$$

Satz 1 (Eigenschaften der Geraden)

Ist $P = P(V)$ ein 2-dimensionaler projektiver Raum, dann gilt:

(a) zu $\langle v \rangle, \langle w \rangle \in P$ gibt es genua eine Gerade $g = \langle v, w \rangle$ mit $\langle v \rangle, \langle w \rangle \in g$.

(b) Je 2 Geraden haben genau einen Schnittpunkt.

(c) Jede Gerade enthält mindestens 3 Punkte.

Abbildung 4.7: projektiver Raum zu $\mathbb{Z}_2^3$

Beweis:

Eigenschaften der projektiven Räume und Dimensionssatz aus LA I

□

Definition (projektive Ebene)

Eine Menge P (von Punkten) zusammen mit einer Menge G (von Geraden), wobei jedes $g \in G$ eine nichtleere Teilmenge von P ist, heißt **projektive Ebene**, wenn (a),(b),(c) aus Satz 1 gelten.

Bemerkung

K Körper mit q Elementen

$$|P(K^3)| = \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1$$

Jede projektive Gerade $g \in P(K^3)$ hat

$$\frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1$$

Punkte.

Satz 2 (Ordnung der projektiven Ebene)

Ist (P, G) eine endliche projektive Ebene, so hat jede Gerade $g \in G$ genau gleich viele Elemente, etwa $r + 1$, und $|P| = r^2 + r + 1$.
r heißt **Ordnung der projektiven Ebene**.

Beweis:
Seien $g_1, g_2 \in G; g_1 \neq g_2$
zu zeigen: $|g_1| = |g_2|$

$$\begin{array}{rcl} X & \mapsto & g(X,P) \cap g_2 \quad \text{ist Bijektion} \\ g_1 & \to & g_2 \end{array}$$

durch P gehen genau $|g_1| = r + 1$ Geraden, also

$$|P| = |r+1| \cdot r + 1 = r^2 + r + 1$$

□

Satz 3

Ist (P, G) eine beliebige, endliche projektive Ebene, in der der Satz von Desargues gilt, dann gibt es einen Körper K mit $|K| = q$ $(= p^r, p$ Primzahl), sodaß $P \cong P(K^3)$ ist.

Bemerkung

(i) Es gibt auch projektive Ebenen (P, G), in denen der Satz von Desargues nicht gilt.

(ii) Es ist aber nicht bekannt, ob es eine projektive Ebene (P, G) mit Ordnung r gibt, wobei r keine Primzahlpotenz ist.

(iii) Es gibt keine projektive Ebene der Ordnung 6.

(iv) Es gibt auch keine projektive Ebene der Ordnung 10 (Computerbeweis).

to be continued...

Anhang A

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und B eine Basisfolge von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ.

(b) Ist Φ ausgeartet? (Begründung.)

(c) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ.

(d) Ist Φ positiv definit? (Begründung.)

(e) Berechnen Sie den Rang und die Signatur von Φ.

Aufgabe 2

Es sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(A, B) = n \cdot \mathrm{Spur}(A \cdot B) - \mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B) \quad \text{für} \quad A, B \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) Φ ist eine ausgeartete symmetrische Bilinearform; geben Sie das Radikal von Φ an.

(b) Es sei T der Teilraum von V, bestehend aus den Matrizen mit Spur 0; dann ist die Einschränkung Φ_0 von Φ auf $T \times T$ nicht ausgeartet.

(c) Bestimmen Sie Rang und Signatur von Φ.
Hinweis: Sei $T_1 := \{A \in T \mid A^{tr} = -A\}$; zeigen Sie, daß $\Phi(A, A) < 0$ für alle $0 \neq A \in T_1$ gilt.

Aufgabe 3

Es sei $S(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \overline{A} = -A^{\mathrm{tr}}\}$.

(a) Zeigen Sie, daß $S(n)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Welche Dimension hat $S(n)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Aufgabe 4

(a) Es sei Φ ein Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $[\Phi]_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, wobei S die Standardbasis von V ist. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V für Φ.

(b) Beschreiben Sie $\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_1x_2 + x_2x_3 = 1\}$ geometrisch (in einem geeigneten Koordinatensystem).

Aufgabe 5

Es sei $V \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktionen und $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \quad \text{für} \quad f, g \in V,$$

und es sei $p \in V$ mit $p(x) = 2x^4 + x^5$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie eine bezüglich Φ beste Approximation von p durch eine Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich 3.

Aufgabe 6

V und W seien endlich-dimensionale K-Vektorräume, und $\varphi : V \to W$ sei linear. Wir definieren

$$^{\mathrm{tr}}\varphi : W^* \to V^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \varphi$$

(wobei V^* und W^* die Dualräume von V bzw. W sind). Zeigen Sie:

(a) $^{\mathrm{tr}}\varphi$ ist linear.

(b) φ ist surjektiv (bzw. injektiv) genau dann, wenn $^{\mathrm{tr}}\varphi$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(c) Sind B und C Basen von V bzw. W und B^* und C^* die dazu dualen Basen von V^* bzw. W^*, dann ist

$$_{B^*}\left[{}^{\mathrm{tr}}\varphi\right]_{C^*} = {}_C[\varphi]_B^{\mathrm{tr}}.$$

Aufgabe 7

Auf einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum V mit Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ sei eine symmetrische Bilinearform Φ gegeben durch

$$\Phi(v_i, v_j) := \begin{cases} 1 & \text{für } \ i = j, \\ -\frac{1}{2} & \text{für } \ i = j-1 \ \text{ oder } \ i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß Φ positiv definit ist.

Aufgabe 8

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Psi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Zeigen Sie:
Ist $\Psi(v, v) = 0$ für alle $v \in V$, so ist $\Psi(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$.

Aufgabe 9

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit, wenn $A^{\text{tr}} = A$ und wenn $x^{\text{tr}} A x > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $P \in GL(n, \mathbb{R})$, so ist $A := P\,P^{\,\text{tr}}$ positiv definit.

(b) Ist A positiv definit, so gibt es eine untere Dreiecksmatrix P mit $A = P\,P^{\,\text{tr}}$.
Hinweis: Denken Sie an das Gram-Schmidt-Verfahren, und überlegen Sie sich, daß das Inverse einer unteren Dreiecksmatrix auch eine untere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 10

Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\overline{A}$.

Aufgabe 11

Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt Φ, und es sei B eine Orthonormalbasis von V bzgl. Φ. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *antisymmetrisch*, wenn $\varphi^* = -\varphi$ gilt (wobei φ^* die zu φ adjungierte Abbildung bezeichnet). Zeigen Sie:

(a) Es sei $A = {}_B[\varphi]_B$. Genau dann ist φ antisymmetrisch, wenn $A^{\text{tr}} = -A$ gilt.

(b) Genau dann ist φ antisymmetrisch, wenn $\Phi(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in V$ gilt.

(c) Jede lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form $\varphi = \varphi_S + \varphi_A$ schreiben, wobei φ_S symmetrisch und φ_A antisymmetrisch ist.

(d) Ist $\dim V = 2$ und $\varphi\colon V \to V$ antisymmetrisch, so ist ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$ für ein $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis B, und es sei $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form auf V mit $[\Phi]_B = A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für $1 \le k \le n$ sei

$$d_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) Genau dann ist Φ positiv definit, wenn $d_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$ gilt.

(b) Genau dann ist Φ negativ definit, wenn $(-1)^k d_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$ gilt.

Aufgabe 13

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$, $\varphi\colon V \to V$ linear und B eine Basis von V mit

$${}_B[\varphi]_B = A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Ist φ diagonalisierbar?

(b) Es sei $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V mit $[\Phi]_B = A$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bzgl. Φ.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

(d) Geben Sie für $a = 0$ und $a = 1$ jeweils eine geometrische Interpretation der folgenden Menge Q_a an:

$$Q_a := \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x^2 - 4xy - 2xz + y^2 - 2yz + \frac{5}{2} z^2 = a \}.$$

Aufgabe 14

Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, so daß $P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} P$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 15

(a) Es sei (V, Φ) ein 2-dimensionaler euklidischer Raum, B eine beliebige Orthonormalbasis von V und $\varphi \in O(V, \Phi)$. Zeigen Sie, daß

$$ {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le \vartheta < 2\pi. $$

Geben Sie für jeden der beiden Fälle eine geometrische Interpretation.

(b) Es sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, B eine Basis von V, $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf V mit $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ und $\varphi \in O(V, \Phi)$. Zeigen Sie, daß

$$ {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & -\cosh\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{oder} $$

$$ {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} -\cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & -\cosh\vartheta \end{bmatrix} \text{ oder } {}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} -\cosh\vartheta & -\sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{bmatrix} \text{ mit } \vartheta \in \mathbb{R}. $$

(Dabei ist $\cosh\vartheta = \frac{1}{2}(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})$ und $\sinh\vartheta = \frac{1}{2}(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $\sinh\vartheta = a$.) Geben Sie eine geometrische Interpretation.

Aufgabe 16

Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2$ und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Weiter sei $\Phi : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform und $\varphi : V \to V$ eine beliebige (nicht als linear vorausgesetzte) Abbildung mit

$$ \Phi(\varphi(v), \varphi(w)) = \Phi(v, w) \quad \text{für alle} \quad v, w \in V. $$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, so daß $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ ebenfalls eine Basis von V ist.

(b) φ ist linear und eine Isometrie von (V, Φ).

Aufgabe 17

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $X^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 18

Es sei (V, Φ) ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum und G eine endliche Gruppe, deren Elemente lineare Abbildungen von V nach V sind. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\Phi'(v,w) := \sum_{\varphi \in G} \Phi(\varphi(v), \varphi(w)), \quad v, w \in V,$$

wird wiederum ein Skalarprodukt auf V definiert, und es gilt: $\Phi'(\varphi(v), \varphi(w)) = \Phi'(v,w)$ für alle $v, w \in V$ und $\varphi \in G$.

(b) Ist U ein Teilraum von V mit $\varphi(U) \subseteq U$ für alle $\varphi \in G$, so gilt auch $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$ für alle $\varphi \in G$, wobei $U^\perp$ der Orthogonalraum von U bezüglich Φ' ist.

(c) Es gibt eine Basis B von V, so daß ${}_B[\varphi]_B$ für alle $\varphi \in G$ eine orthogonale bzw. unitäre Matrix ist.

Aufgabe 19

Geben Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{Z}_2[X]$ an.

Aufgabe 20

Bestimmen Sie jeweils mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler d der Elemente a und b des Ringes R, und stellen Sie d als Linearkombination von a und b dar:

(a) für den Fall $R = \mathbb{Z}$, $a = 12\,417\,233$ und $b = 12\,422\,731$,

(b) für den Fall $R = \mathbb{Z}_2[X]$, $a = X^{10} + X^6 + X^4$ und $b = X^{12} + X^2 + X + 1$.

Aufgabe 21

Es sei K ein Körper und $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$. Die Begleitmatrix $A_f = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ zu f ist definiert durch $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j+1, \\ -a_{i-1} & \text{für } j = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ Zeigen Sie:

(a) Die charakteristische Matrix zu A_f ist äquivalent zur $n \times n$-Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $1, \ldots, 1, f$ (wobei $n-1$ Einsen vorkommen),

(b) f ist das charakteristische Polynom von A_f,

(c) f ist das Minimalpolynom von A_f.

Aufgabe 22

Es sei R ein euklidischer Ring, und es seien $a, b, d, v \in R$ mit $a \neq 0,\ b \neq 0,\ d \in \mathrm{ggT}(a, b)$ und $v = \dfrac{ab}{d}$. Zeigen Sie: Die Matrizen $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ und $A' = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ sind äquivalent. Geben Sie Matrizen $P, Q \in GL(2, R)$ an, so daß $PAQ = A'$ gilt.

Aufgabe 23

Bestimmen Sie die Invariantenteiler der folgenden Matrizen A über dem jeweils angegebenen Ring R:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ über $R = \mathbb{Z}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 1+X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+X & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1+X & 1 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{bmatrix}$ über $R = \mathbb{Z}_2[X]$.

Aufgabe 24

Es seien K und L Körper mit $K \leq L$, und es seien $A, A' \in K^{n\times n}$. Dann kann man A und A' auch als Elemente von $L^{n\times n}$ auffassen. Zeigen Sie: Wenn es eine invertierbare Matrix $P \in L^{n\times n}$ gibt mit $A' = P^{-1}AP$, so gibt es auch eine invertierbare Matrix $Q \in K^{n\times n}$ mit $A' = Q^{-1}AQ$.

Aufgabe 25

Berechnen Sie für $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die rationale kanonische Form A' und eine invertierbare Matrix P mit $P^{-1}AP = A'$.

Aufgabe 26

Wie viele Klassen ähnlicher Matrizen gibt es

(a) in $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$,

(b) in $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z}_2)$?

Aufgabe 27

Es sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie: Für $1 \leq n \leq 3$ sind $A, B \in K^{n\times n}$ genau dann ähnlich, wenn die charakteristischen Polynome χ_A und χ_B sowie die Minimalpolynome μ_A und μ_B übereinstimmen.

(b) Gilt das auch für $n = 4$?

Aufgabe 28

Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{5\times 5}$

(a) die rationale kanonische Form,

(b) das charakteristische Polynom,

(c) das Minimalpolynom,

(d) die Weierstraßsche Normalform,

(e) falls sie existiert, die Jordansche Normalform.

Aufgabe 29

Für $U = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$ seien die Restklassen $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + U$ und $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + U$ gegeben. Bestimmen Sie für $x = a$ bzw. $x = b$ jeweils die kleinste natürliche Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \cdot x = 0 + U$. Skizzieren Sie Vertreter $x_i \in \mathbb{Z}^{2\times 1}$ mit $\mathbb{Z}^{2\times 1}/U = \{x_i + U \mid 1 \leq i \leq 6\}$, wobei $x_i + U = i \cdot a$ ist.

Aufgabe 30

Gegeben seien die beiden Untermoduln

$$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -37 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

des freien $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}^{3\times 1}$. Zeigen Sie, daß $U_1 \neq U_2$, aber $M/U_1 \cong M/U_2$ gilt.

Aufgabe 31

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen der Ordnungen 123, 124, 125, 126 und 127.

Aufgabe 32

Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}V$. Zeigen Sie:

(a) Es sei $R = K[X]$. Dann wird V durch die Definition $f \cdot v := f(\varphi)(v)$ $(v \in V, f \in R)$ zu einem endlich erzeugten R-Modul, der mit V_φ bezeichnet werde.

(b) Die R-Untermoduln von V_φ sind genau die φ-invarianten Teilräume von V. Für $v \in V$ ist $R \cdot v$ ein φ-zyklischer Teilraum von V (das heißt, $R \cdot v$ hat eine Basis der Form $(w, \varphi(w), \ldots, \varphi^{m-1}(w))$ für ein $w \in R \cdot v$ und $m \in \mathbb{N}$).

(c) Ist auch $\psi \in \mathrm{End}V$, so gilt $V_\varphi \cong_R V_\psi$ (das heißt, V_φ und V_ψ sind als R-Moduln isomorph) genau dann, wenn es einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{End}V$ gibt mit $\psi = \sigma^{-1}\varphi\sigma$.

(d) Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $A = {}_B[\varphi]_B \in K^{n\times n}$, so gilt

$$V_\varphi \cong_R R^{n\times 1}\,\mathrm{SM}(XE_n - A).$$

Aufgabe 33

Prüfen Sie:

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(v \otimes w) = v + w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$?

(b) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(v \otimes w) = v_1w_1 + v_1w_2 - 2v_2w_2$ für alle $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$?

Aufgabe 34

Es seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und V^* der Dualraum von V.

(a) Für $w \in W$ und $\lambda \in V^*$ sei $\varphi_{w,\lambda} : V \to W$ definiert durch $\varphi_{w,\lambda}(v) = \lambda(v) \cdot w$ $(v \in V)$. Zeigen Sie: $\varphi_{w,\lambda}$ ist linear, d. h., $\varphi_{w,\lambda} \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon W \times V^* \to \mathrm{Hom}(V, W)$, definiert durch $\varphi((w, \lambda)) = \varphi_{w,\lambda}$, ist bilinear.

(c) Konstruieren Sie einen natürlichen Isomorphismus zwischen $W \otimes V^*$ und $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Aufgabe 35

Es sei K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = r$. Zeigen Sie: Es gibt Vektoren $v_i \in K^m$, $w_i \in K^n$ $(1 \le i \le r)$ mit $A = \sum_{i=1}^r v_i \cdot w_i^{tr}$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $A = (a_{ij})$ mit $a_{ii} = 1$ für $i = 1, \ldots, r$ und $a_{ij} = 0$ sonst.

Aufgabe 36

Zeigen Sie: Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und ist $d \in \mathrm{ggT}(m, n)$, so sind die folgenden Moduln als $\mathbb{Z}$-Moduln isomorph.

(a) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$,

(b) $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n$,

(c) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_n \cong \{0\}$.

Aufgabe 37

Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) $v_1, \ldots, v_r \in V$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \neq 0$ gilt.

(b) Ist $v \in V$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon \bigwedge^r V \to \bigwedge^{r+1} V$ mit

$$\varphi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \wedge v$$

für alle $v_i \in V$.

(c) Ist

$$\sum a_{i_1 \ldots i_r} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_r} = \sum b_{j_1 \ldots j_r} u_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_r}$$

in $\bigwedge^r V$, und ist $v \in V$, so folgt

$$\sum a_{i_1 \ldots i_r} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_r} \wedge v = \sum b_{j_1 \ldots j_r} u_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_r} \wedge v$$

in $\bigwedge^{r+1} V$.

(d) Bestimmen Sie jeweils die Plückerkoordinaten der Teilräume

$$T_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad T_2 = \langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ (mit Standardbasis B).

Aufgabe 38

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $W = \mathbb{C}^{3\times 1}$. Dann können wir V als Teilmenge von W auffassen, und für jeden $\mathbb{C}$-Teilraum U von W ist dann $U \cap V$ ein $\mathbb{R}$-Teilraum von V. Bestimmen Sie eine $\mathbb{R}$-Basis für $U \cap V$ in den beiden Fällen

(a) $U = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$, (b) $U = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \rangle$.

Aufgabe 39

Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie: Ist $(t_1, \ldots, t_n)$ eine Folge von Eigenwerten von φ, in der jeder Eigenwert von φ höchstens so oft vorkommt, wie seine geometrische Vielfachheit angibt, so ist $t_1 \cdots t_r$ ein Eigenwert von $\bigwedge^r \varphi$.

Anhang B

Semesterklausur zu LA II

Semesterklausur zur Linearen Algebra II (7. 7. 95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur <u>eine</u> Aufgabe, und schreiben Sie auf <u>jedes</u> Blatt Ihren Namen. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 65 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen mindestens 25 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe.

(a) Was ist eine „Sesquilinearform", und wann heißt sie „hermitesch"?

(b) Wann heißen zwei Matrizen „ähnlich", wann „äquivalent"?

(c) Es seien a, b und d Elemente eines Integritätsbereichs. Wann heißt d ein „größter gemeinsamer Teiler" von a und b? *7 Punkte*

Aufgabe 2

Es sei V ein 3-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorrraum und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ.

(b) Ist Φ positiv definit? (Begründung.)

(c) Berechnen Sie den Rang und die Signatur von Φ.

(d) Ist Φ ausgeartet? (Begründung.) *8 Punkte*

Aufgabe 3

Es sei $V = \mathbb{Q}^{3\times 1}$ und B die Standardbasis von V. Eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B = A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Ist φ diagonalisierbar? (Begründung.)

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

(c) Es sei $\Phi \colon V \times V \to \mathbb{Q}$ ein Skalarprodukt auf V mit $[\Phi]_B = A$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ. *10 Punkte*

Aufgabe 4

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_2[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler d der Polynome

$$f_1 = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{und} \quad f_2 = X^5 + X^4 + X^2 + 1.$$

(b) Stellen Sie d in der Form $a \cdot f_1 + b \cdot f_2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[X]$ dar. *6 Punkte*

Aufgabe 5

Es sei $f = (X^2 + 1)(X + 1)^2 \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Zeigen Sie: Haben zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ das Polynom f als Minimalpolynom, d. h., ist $\mu_A = \mu_B = f$, so sind A und B ähnlich.

(b) Wieviele Klassen ähnlicher Matrizen, die f als Minimalpolynom haben, gibt es in $\mathbb{R}^{6\times 6}$? (Mit Beweis.) *9 Punkte*

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}$

(a) die rationale kanonische Form,

(b) das charakteristische Polynom,

(c) das Minimalpolynom,

(d) die Weierstraßsche Normalform,

(e) falls sie existiert, die Jordansche Normalform. *10 Punkte*

Aufgabe 7

Es sei $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Geben Sie für jeden der beiden $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ eine Basis an, und zeigen Sie, daß die beiden Vektorräume isomorph sind.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keinen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(u,v) = u \otimes v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Läßt sich der Vektor $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ in der Form $u \otimes v$ mit $u, v \in \mathbb{R}^2$ schreiben? (Hinweis: Benutzen Sie die eindeutige Darstellung von z und $u \otimes v$ in einer Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.) *10 Punkte*

Aufgabe 8

In einem euklidischen Ring R seien zwei Elemente $a, b \in R$ mit $1 \in \mathrm{ggT}(a,b)$ gegeben. Zeigen Sie:

$$R/aR \otimes R/bR \cong \{0\}$$

(als R-Moduln). *5 Punkte*