## Aufgabe 1 [10 Punkte]

Sei A $= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$ mit $a \in \mathbb{F}_5$

a) Bestimmen Sie die Determinante von $A_a$. [4 Punkte]

b) Für welche Werte von a ist $A_a$ invertierbar? [2 Punkte]

c) Geben Sie eine Basis des Nullraums $\mathbb{L}(A_1, 0)$ an. [3 Punkte]

d) Was ist der Rang von $A_4$? [1 Punkt]

## Aufgabe 2 [12 Punkte]

Sei A $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A$. [4 Punkte]

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$. [1 Punkt]

c) Geben Sie eine Basis des Eigenraums für jeden der Eigenwerte von $A$ an. [4 Punkte]

d) Bestimmen Sie die geometrische und algebraische Vielfachheit von $A$. [2 Punkte]

e) Ist $A$ diagonalierbar? [1 Punkt]

## Aufgabe 3 [10 Punkte]

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{2\times 2}, v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot v \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit B als Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varepsilon$ als Standardbasis von $\mathbb{R}^3$

a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von $\varphi$: $M_B^{\varepsilon}$. [5 Punkte]

b) Berechnen Sie die Basis des Bildes von $\varphi$. [3 Punkte]

c) Was ist der Rand von $\varphi$? [1 Punkt]

d) Was ist der Defekt von $\varphi$? [1 Punkt]

## Aufgabe 4 [10 Punkte]

Sei $C \leq \mathbb{F}_2^5$ der [ $n, k, d$ ]-Code mit der Kontrollmatrix B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 5}$.

a) Bestimmen Sie die Parameter [ $n, k, d$ ]. [4 Punkte]

b) Wie viele Codewörter hat der Code C? [1 Punkt]

c) Wie viele Fehler können mit C korrigiert werden? [1 Punkt]

d) Sei $v = (1, 0, 1, 0, 0)^t \in \mathbb{F}_2^5$. Bestimmen Sie das Codewort mit minimalem Hammingabstand zu v. [2 Punkte]

e) Welche Syndrome haben einen Nebenklassenanführer vom Gewicht 2? [2 Punkte]

## Aufgabe 5 [8 Punkte]

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \mathbb{Q}$ sei definiert durch: $a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und habe die Anfangsglieder $a_0 = -1$ und $a_1 = 1$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung. [2 Punkte]

b) Berechnen Sie mit Methoden der linearen Algebra eine geschlossene Formel fur die Folgenglieder $a_n$. [6 Punkte]

## Aufgabe 6 [10 Punkte]

Gegeben sei der euklidische Raum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt und dem Unterraum $U \leq \mathbb{R}^3$ mit Basis $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix})$.

a) Bestimmen Sie zur Basis B mit dem Gram-Schmidt Verfahrendie zugehorige Orthogonalbasis. [3 Punkte]

b) Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp$. [2 Punkte]

c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von v = $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf U. [3 Punkte]

d) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels $\alpha$ zwischen v und w = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. [2 Punkte]

## Aufgabe 7 [12 Punkte]

Sei K ein Körper, $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi$ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft $\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)$.

a) Zeigen Sie, dass die Dimension von V eine geradde Zahl ist. [4 Punkte]

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von $\varphi$. [6 Punkte]

c) Ist $\varphi$ diagonalierbar? [2 Punkte]

## Aufgabe 8 [8 Punkte]

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Ähnlichee Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ haben das gleiche charakteristische Polynom. [4 Punkte]

b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbare Matrizen mit $A_11 + A_22 \neq B_1 + B_22$. Zeigen Sie, dass A und B äquivalent sind, aber nicht das gleiche charakteristische Polynom haben. [4 Punkte]