Name:____________________________ **Matrikelnummer:** __________________

Abgabe: Varianten einiger der folgenden Aufgaben sollen Sie im Test 3 in den Tutorien am 5.7.2019 bearbeiten.
Die Lösungen der übrigen Aufgaben (die genaue Liste wird noch in den aktuellen Ankündigungen bekanntgegeben) geben Sie dann bis Dienstag, 9.7.2019, 12 Uhr, in den Übungskästen ab.

Hinweise zur Klausur: Dieses zehnte Übungsblatt gibt Ihnen einen Eindruck, wie die Aufgaben in der Klausur aussehen werden. Die ersten 5 Aufgaben sind Rechenaufgaben, bei denen nur das Ergebnis bewertet wird. Die Aufgaben 6 bis 9 sind schriftlich zu bearbeiten und Sie müssen Ihre Aussagen begründen.
Hilfsmittel: in der Klausur benötigen Sie nur Schreibpapier und Stift. Es sind keine weiteren Hilfmittel zugelassen.
Bearbeitungszeit: in der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit, um die Aufgaben, die in etwa dem Umfang dieses Blattes entsprechen, zu bearbeiten.
Bewertung: Wie in der Klausur gibt es für dieses Blatt 50 Punkte. (In der Klausur benötigen Sie 25 Punkte zum Bestehen.)
Für die Auswertung der Klausurzulassung addieren wir für dieses Blatt 15 Punkte zu den Online-Aufgaben und 20 Punkte zu den schriftlichen Aufgaben (wie bei den anderen Blättern). Sie benötigen also für die Zulassung $0.7 \cdot 150 = 105$ Online-Punkte und $0.5 \cdot 200 = 100$ Hausaufgabenpunkte.
Die Punkte aus den Ergebnisaufgaben in diesem Blatt werden als Online-Punkte gewertet (es gibt also bis zu 15 Bonuspunkte für die Online-Aufgaben), die anderen als Hausaufgabenpunkte.
Wenn Ihnen dann wenige Hausaufgabenpunkte fehlen, übertragen wir bis zu 10 Punkte aus den Ergebnisaufgaben auf diesem Blatt zu den Hausaufgaben.

Blatt 10 (Beispielklausur)

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2019, Prof. Dr. G. Hiß

Die ersten 5 Aufgaben sind Rechenaufgaben. Bitte schreiben Sie Ihre Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse bei diesen Aufgaben nicht zu begründen. Es gibt für Ansätze und Begründungen auch keine Punkte.

Aufgabe 1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ sei definiert durch die Rekursionsgleichung

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

für alle $n \geq 2$, und durch die Anfangsglieder

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1.$$

Berechnen Sie mit Methoden der linearen Algebra eine geschlossene Formel für die Folgenglieder a_n.

$a_n = \boxed{}$ (4 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien $v = \begin{pmatrix} -\sqrt{22} \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3\sqrt{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Norm von w: $||w|| = \boxed{}$ (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels α zwischen v und w:

$\cos(\alpha) = \boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie zur Basis $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^3$ mit dem Gram-Schmidt Verfahren

die zugehörige Orthogonalbasis: $\boxed{}$ (2 Punkte)

(d) Sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp$: $\boxed{}$ (2 Punkte)

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A_a \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -a+1 & a+1 & -4 \\ a-1 & -a-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. $\boxed{}$ (2 Punkte)

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist A_a invertierbar in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{}$ (1 Punkt)

Name:______________________________ **Matrikelnummer:** __________________

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir betrachten den Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto XA - A^{tr}X^{tr}.$$

Sei $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich s an. $M_{\mathcal{B}}(\varphi) =$ (4 Punkte)

(b) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an: (2 Punkte)

(c) Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an: (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Rang von φ: Rang$(\varphi) =$ (1 Punkt)

Aufgabe 5. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A:

$\chi_A(X) =$ (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A: (1 Punkt)

(c) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Eigenraumes an:

(2 Punkte)

(d) Was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A:

(2 Punkte)

In den folgenden schriftlichen Aufgaben müssen Sie alle Ihre Aussagen begründen.
Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
Erinnerung: *Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *enthalten nach der Konvention dieser Vorlesung nicht die* 0.

Aufgabe 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A^3 = E_n$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. (5 Punkte)

Aufgabe 7. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass genau dann $\text{Rang}(A) \leq 1$ ist, wenn es Vektoren $u, v \in K^{n \times 1}$ gibt mit $A = uv^{tr}$. (5 Punkte)

Aufgabe 8. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $A, B \in K^{n \times n}$ trigonalisierbare Matrizen mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in K^n$ gibt, der gleichzeitig Eigenvektor von A und von B ist. (5 Punkte)

Aufgabe 9. Es sei V ein euklidischer Vektorraum.
Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ die folgenden Formeln gelten:

(a) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ (Parallelogramm-Identität). (2 Punkte)

(b) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung). (3 Punkte)