Name:____________________________ **Matrikelnummer:** ________________

Abgabe: Dienstag, 17.7.2018, 12 Uhr, in den Übungskästen.

Hinweise zur Klausur: Dieses zehnte Übungsblatt gibt Ihnen einen Eindruck, wie die Aufgaben in der Klausur aussehen werden. Die ersten 5 Aufgaben sind Rechenaufgaben, bei denen nur das Ergebnis bewertet wird. Die Aufgaben 6 bis 9 sind schriftlich zu bearbeiten und Sie müssen Ihre Aussagen begründen.
Hilfsmittel: in der Klausur benötigen Sie nur Schreibpapier und Stift. Es sind keine weiteren Hilfmittel zugelassen.
Bearbeitungszeit: in der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit, um die Aufgaben, die in etwa dem Umfang dieses Blattes entsprechen, zu bearbeiten.
Bewertung: Wie in der Klausur gibt es für dieses Blatt 50 Punkte. Diese zählen als Punkte für die schriftlichen Hausaufgaben.
Ausgleichsregelung: Für die Klausurzulassung benötigen Sie aus den Online-Aufgaben von Blatt 1 bis 9 mindestens 96 Punkte. Sollten Ihnen hier noch einige Punkte fehlen, so rechnen wir bis zu 10 Punkte aus Blatt 10 noch als Online Punkte an.
(In der Klausur benötigen Sie 25 Punkte zum Bestehen.)

Blatt 10 (Beispielklausur)

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2018, Prof. Dr. G. Hiß

Die ersten 5 Aufgaben sind Rechenaufgaben. Bitte schreiben Sie Ihre Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse bei diesen Aufgaben nicht zu begründen. Es gibt für Ansätze und Begründungen auch keine Punkte.

Aufgabe 1. Sei $C \leq \mathbb{F}_2^6$ der Code mit der Kontrollmatrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie eine Basis von C an: $\boxed{}$ (1 Punkt)

(b) Was ist die Minimaldistanz von C? $d(C) = \boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Wieviele Vektoren vom Gewicht 4 enthält C? $\boxed{}$ (1 Punkt)

(d) Welche Syndrome haben einen Nebenklassenanführer vom Gewicht 1?

$\boxed{}$ (1 Punkt)

Aufgabe 2. Wir betrachten den euklidischen Raum $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seien $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -3 \\ -4\sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Norm von w: $||w|| = \boxed{}$ (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels α zwischen v und w: $\cos(\alpha) = \boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie zur Basis $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit dem Gram-Schmidt Verfahren

die zugehörige Orthogonalbasis: $\boxed{}$ (2 Punkte)

(d) Sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp$: $\boxed{}$ (2 Punkte)

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{Q}$ sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. $\boxed{}$ (2 Punkte)

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist A_a invertierbar in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{}$ (1 Punkt)

Name:______________________________ **Matrikelnummer:** __________________

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir betrachten den Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto XA + A^{tr}X^{tr}.$$

Sei $s = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich s an. $M_{s,s}(\varphi) =$ (4 Punkte)

(b) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an: (2 Punkte)

(c) Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an: (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Rang von φ: Rang(φ) $=$ (1 Punkt)

Aufgabe 5. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A:

$\chi_A(X) =$ (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A: (1 Punkt)

(c) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Eigenraumes an:

(2 Punkte)

(d) Was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A:

(2 Punkte)

In den folgenden schriftlichen Aufgaben müssen Sie alle Ihre Aussagen begründen.
Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
Erinnerung: *Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *enthalten nach der Konvention dieser Vorlesung nicht die* 0.

Aufgabe 6. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $AA^{tr} = E_n$ gilt.

(a) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass dann auch AB orthogonal ist. (2 Punkte)

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass A invertierbar und A^{-1} auch orthogonal ist. (3 Punkte)

Aufgabe 7. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^3 = E_n$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. (5 Punkte)

Aufgabe 8. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass jedes $B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$ diagonalisierbar ist. Hat B auch n verschiedene Eigenwerte? (5 Punkte)

Aufgabe 9. Seien K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Außerdem sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für $n \in \mathbb{N}$ und ein n-Tupel $M = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ schreiben wir $\varphi(M) = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

(a) Wenn M linear unabhängig ist und φ injektiv ist, dann ist auch $\varphi(M)$ linear unabhängig. (1 Punkt)

(b) Wenn M linear unabhängig ist und φ surjektiv ist, dann ist auch $\varphi(M)$ linear unabhängig. (1 Punkt)

(c) Wenn M ein Erzeugendensystem von V ist und φ injektiv ist, dann ist $\varphi(M)$ ein Erzeugendensystem von W. (1 Punkt)

(d) Wenn M ein Erzeugendensystem von V ist und φ surjektiv ist, dann ist $\varphi(M)$ ein Erzeugendensystem von W. (2 Punkte)