Meine Lösungen zu dieser Klausur von Frau Dr. Niemeyer. Einige Aufgaben habe ich mit sinnvollen Unterpunkten ergänzt, die im Hinblick auf spätere Klausuren eventuell nützlich sein könnten. Ich garantiere nicht unbedingt für die kürzesten Lösungswege aber auf jeden Fall für sehr Ausführliche mit Hinweisen was man zum Beispiel auch vermeiden sollte. Diese Lösungen können die Übungen nicht ersetzen. Benutzt es am Besten als Begleitmaterial das ihr mit euren aktuellen Übungen kombinieren könnt. Falls ihr das Dokument über Adobe Reader ausdrucken wollt, wählt auf jeden Fall die Option "Übergroße Seiten verkleinern".

1. Klausur Lineare Algebra SS 2013

RWTH Aachen

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ der Körper mit 7 Elementen und sei $t \in \mathbb{F}_7$. Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{4\times 4}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^4$$

a

Welche Ränge kommen für die Matrix A vor, wenn t alle Elemente in $\mathbb{F}_7$ durchläuft?

b

Für welche $t \in \mathbb{F}_7$ ist die Matrix A nicht invertierbar?

c

Geben Sie eine Basis des Nullraumes von A im Fall $t = 0$ an.

d

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$ im Fall $t = 1$ an.

e

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$ im Fall $t = 0$ an.

f

Geben Sie eine Basis des Bildes von A im Fall $t = 0$ an.

g

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A in Abhängigkeit von t!

h

Für $t = 0$ bestimme man $|\text{Ker } A|$, also die Anzahl der Elemente des Kerns von A.

i

Für $t = 0$ bestimme man $|\text{Im } A|$, also die Anzahl der Elemente des Bildes von A.

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit Abbildungsmatrix

$$ {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

a

Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an.

b

Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an.

c

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von φ.

d

Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ mit ihren algebraischen Vielfachheiten.

e

Die Abbildung φ ist diagonalisierbar. Bestimmen sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht.

Aufgabe 3

Sei V der Unterraum der beliebig oft stetig differenzierbaren reellen Funktionen, mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (sin(x), sin(2x), cos(x), cos(2x))$. Es bezeichne $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ für eine Funktion $f(x) \in V$.
Wir betrachten den Endomorphismus $\varphi : V \to V, f(x) \mapsto f'(x) + 4f(x)$. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ von φ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B}$ von V.

Aufgabe 4

Sei $V = Q^3$ und

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq V, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a

Welche Dimension hat U?

b

Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp = \{v \in V | v^t u = 0 \text{ für alle } u \in U\}$.

c

Welche der Vektoren v und w liegen in $U^\perp$?

Aufgabe 5

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Dieser enthält die folgenden Vektoren:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei U der von u und v aufgespannte Untervektorraum.

a

Berechnen Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von U, die u enthält.

b

Geben Sie den Cosinus des Winkels α zwischen v und s an.

c

Bestimmen Sie $\dim(U)$.

d

Bestimmen Sie $\dim(U^\perp)$ und $U^\perp$.

e

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis $B^\perp$ von $U^\perp$.

Aufgabe 6

Für $t \in B_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

a

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t.

b

Bestimmen Sie die Determinante von B_t.

c

Für welche Werte von t ist B_t invertierbar?

d

Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$?

e

Eigenwerte von B_t.

f

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t diagonalisierbar?

g

Für $t = 0$ die Eigenvektoren bestimmen.

Aufgabe 7 (schriftlich)

Seien K ein Körper und U, V, W drei K-Vektorräume und U von endlich vielen Elementen erzeugt.
Ergänzen Sie die folgenden Satzanfänge zu korrekten Definitionen:

a

Die *Dimension* von U ist ...

b

Eine Teilmenge S von V heißt *linear unabhängig*, wenn ...

c

Eine Teilmenge S von V heißt *Erzeugendensystem von V*, wenn ...

d

Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt *linear*, wenn ...

Aufgabe 8 (schriftlich)

Sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_B(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Was ist der Rang von B? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 9 (schriftlich)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass jedes $B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$ diagonalisierbar ist. Beweisen, oder widerlegen Sie, dass B auch n verschiedene Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 1, Seite 1

$\mathbb{F}_7$ bedeutet:

	-28	-21	-14	-7	0	7	14	21	28	35	42	
	-27	-20	-13	-6	1	8	15	22	29	36	43	
	-26	-19	-12	-5	2	9	16	23	30	37	44	
	-25	-18	-11	-4	3	10	17	24	31	38	45	
	-24	-17	-10	-3	4	11	18	25	32	39	46	
...	-23	-16	-9	-2	5	12	19	26	33	40	47	...
	-22	-15	-8	-1	6	13	20	27	34	41	48	

Bemerkung: Man stellt fest, das der Parameter t in A in zwei Zeilen vorkommt. Wir werden jetzt versuchen soweit es geht linear unabhängige Zeilen bzw. Spalten in A zu bekommen <u>ohne</u> den Parameter t dabei auf Zeilen zu übertragen, die diesen Parameter nicht hat.

<u>zu a)</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 4 & 4 & t \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ + \\ |\cdot(-4) \quad |\cdot(-3) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6+t \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6+t \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6+t \end{pmatrix}$$

Die Matrise können wir nun so stehen lassen. Die eingekreisten "1"-en sind die Pivotelemente und damit wissen wir, das der Rang von A unabhängig von t <u>immer mindestens 2</u> ist. Um festzustellen wie sich der Rang von A für die verschiedenen Werte von t ändert reicht es nun aus nur die 3-te und 4-te Spalte zu betrachten. Dabei sogar nur die untere Hälfte davon mit dem Parameter t.

Aufgabe 1, Seite 2

Wir betrachten jetzt:

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ \cdots & t & 1 \\ \cdots & 0 & 6+t \end{array}$$

Fall $t = 0$:

$$\begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 1 & \\ \cdots & 0 & 6 & \mid :6 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 1 & \leftarrow + \\ \cdots & 0 & 1 & \mid \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Für $t = 0$ ist $\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{3}}$.

Fall $t = 1$:

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & 0 & 0 \end{array} \Longrightarrow \text{Für } t = 1 \text{ ist } \operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{3}}.$$

Fall $t = 2$:

$$\begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 2 & 1 & \leftarrow + \\ \cdots & 0 & 1 & \mid \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 2 & 0 & \mid :2 \\ \cdots & 0 & 1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Für $t = 2$ ist $\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{4}}$.

Fall $t = 3$:

$$\begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 3 & 1 & \\ \cdots & 0 & 2 & \mid :2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 3 & 1 & \leftarrow + \\ \cdots & 0 & 1 & \mid \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccl} & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 3 & 0 & \mid :3 \\ \cdots & 0 & 1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 1 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Für $t = 3$ ist $\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{4}}$.

Aufgabe 1, Seite 3

Fall $t=4$:

$$\begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 4 & 1 & \\ \dots 0 & 3 & \mid :3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 4 & 1 & \leftarrow + \\ \dots 0 & 1 & \mid \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 4 & 0 & \mid :4 \\ \dots 0 & 1 & \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \dots 1 & 0 \\ \dots 0 & 1 \end{array} \Longrightarrow \text{Für } t=4 \text{ ist } \operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{4}}.$$

Fall $t=5$:

$$\begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 5 & 1 & \\ \dots 0 & 4 & \mid :4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 5 & 1 & \leftarrow + \\ \dots 0 & 1 & \mid \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 5 & 0 & \mid :5 \\ \dots 0 & 1 & \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \dots 1 & 0 \\ \dots 0 & 1 \end{array} \Longrightarrow \text{Für } t=5 \text{ ist } \operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{4}}.$$

Fall $t=6$:

$$\begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 6 & 1 & \\ \dots 0 & 5 & \mid :5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 6 & 1 & \leftarrow + \\ \dots 0 & 1 & \mid \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccl} \vdots & \vdots & \\ \dots 6 & 0 & \mid :6 \\ \dots 0 & 1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \dots 1 & 0 \\ \dots 0 & 1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \text{Für } t=6 \text{ ist } \operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \underline{\underline{4}}.$$

Insgesamt also:

Falls $t \in \{0,1\}$ dann hat A den Rang 3.

Falls $t \in \{2,3,4,5,6\}$ dann hat A den Rang 4.

Aufgabe 1, Seite 4

zu b)

Nicht invertierbar falls $t \in \{0, 1\}$ und invertierbar falls $t \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, weil A dann vollen Rang hat.

zu c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ |:4 \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-1) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ |\cdot(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Vertausche 2-te und 3-te Zeile}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Pivotelemente (stehen immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= -3z \\ y &= -z \\ t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbb{L}(A, 0) = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

Aufgabe 1, Seite 5

Probe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \underset{\mathbb{F}_7}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

zu d_1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ + \\ |\cdot(-4) \quad |\cdot(-3) \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-3) \quad |\cdot(-1) \\ \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x + 5t = 1 \\ y + t = 0 \\ z + t = 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 6t \\ z = 6t \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen stehen)

Nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 1, Seite 6

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{Sol}(A, b) = s + \operatorname{Sol}(A, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe für b:

$$A_1 \cdot s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \checkmark$$

Probe für Kern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 \\ 7 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_7}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Zu e_1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ |:4 \\ + \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot(-3) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

→ nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 1, Seite 7

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x + 3z = 1 \\ y + z = 0 \\ t = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = 1 + 4z \\ y = 6z \\ t = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Sol}(A, b) = s + \mathrm{Sol}(A, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe für b:

$$A_0 \cdot s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \checkmark$$

Probe für Kern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_7}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe 1, Seite 8

zu f)

Für $t=0$ ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A transponieren und dann rechnen:

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot(-6) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \end{array}$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{F}_7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ |:4 \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ |\cdot(-1) \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad 5} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 2} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 2} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 1, Seite 9

zu g

$$CP(A) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -\lambda & t & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & t \\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ |\cdot(-1+\lambda) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3-3\lambda-\lambda^2 & -t+t\lambda \\ 0 & -\lambda & t & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & t \\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3-3\lambda-\lambda^2 & -t+t\lambda \\ -\lambda & t & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ |\cdot\lambda \quad |\cdot(-3) \end{matrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3\lambda-\lambda^2 & (1-t)+(3+t)\lambda \\ 0 & t+\lambda & 1+2\lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -3\lambda-\lambda^2 & (1-t)+(3+t)\lambda \\ t+\lambda & 1+2\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3\lambda-\lambda^2)\cdot(1+2\lambda-\lambda^2)-(t+\lambda)\cdot[(1-t)+(3+t)\lambda]$$

$$= -3\lambda-6\lambda^2+3\lambda^3-\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4-(t+\lambda)\cdot(1-t+3\lambda+t\lambda)$$

$$= -3\lambda+\lambda^3+\lambda^4-(t-t^2+3t\lambda+t^2\lambda+\lambda-t\lambda+3\lambda^2+t\lambda^2)$$

$$= -3\lambda+\lambda^3+\lambda^4-t+t^2-3t\lambda-t^2\lambda-\lambda+t\lambda-3\lambda^2-t\lambda^2$$

$$= -t+t^2-4\lambda-2t\lambda-t^2\lambda-3\lambda^2-t\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$$

$$= \lambda^4+\lambda^3+(-3-t)\lambda^2+(-4-2t-t^2)\lambda+(-t+t^2)$$

$$\overset{\mathbb{F}_7}{=} \underline{\underline{\lambda^4+\lambda^3+(4+6t)\lambda^2+(3+5t+6t^2)\lambda+(6t+t^2)}}$$

zu h)

Unter c) wurde für $t=0$ folgendes berechnet:

$$\mathbb{L}(A,0) = \{ t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dim(\operatorname{Ker} A) = 1} \mid t \in \mathbb{F}_7 \}$$

Es gilt: $|\operatorname{Ker} A| = \underset{\text{wegen } \mathbb{F}_7}{7}^{\dim(\operatorname{Ker} A)} = 7^1 = \underline{\underline{7}}$

zu i)

Unter f) wurde für $t=0$ folgendes berechnet:

$$\operatorname{Im}(A) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\dim(\operatorname{Im} A) = 3} \rangle$$

Es gilt: $|\operatorname{Im} A| = \underset{\text{wegen } \mathbb{F}_7}{7}^{\dim(\operatorname{Im} A)} = 7^3 = \underline{\underline{343}}$

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 1)

Sei $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ der Körper mit 7 Elementen und sei $t \in \mathbb{F}_7$. Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t+6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7 \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^4$$

a

Welche Ränge kommen für die Matrise A vor, wenn t alle Elemente in $\mathbb{F}_7$ durchläuft?

b

Für welche $t \in \mathbb{F}_7$ ist die Matrise A nicht invertierbar?

c

Geben Sie eine Basis des Nullraumes von A im Fall $t = 1$ an.

d

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$ im Fall $t = 6$ an.

e

Geben Sie eine Basis des Bildes von A im Fall $t = 1$ an.

f

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A in Abhängigkeit von t!

g

Für $t = 1$ bestimme man $|\mathrm{Ker}\, A|$, also die Anzahl der Elemente des Kerns von A.

h

Für $t = 1$ bestimme man $|\mathrm{Im}\, A|$, also die Anzahl der Elemente des Bildes von A.

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 1), Seite 1/7

Lösung

$\mathbb{F}_7$ bedeutet:

	-35	-28	-21	-14	-7	0	7	14	21	28	35	42	
	-34	-27	-20	-13	-6	1	8	15	22	29	36	43	
	-33	-26	-19	-12	-5	2	9	16	23	30	37	44	
	-32	-25	-18	-11	-4	3	10	17	24	31	38	45	
...	-31	-24	-17	-10	-3	4	11	18	25	32	39	46	...
	-30	-23	-16	-9	-2	5	12	19	26	33	40	47	
	-29	-22	-15	-8	-1	6	13	20	27	34	41	48	

Bemerkung: Man stellt fest, das der Parameter t in A in zwei Zeilen vorkommt. Wir werden jetzt versuchen soweit es geht linear unabhängige Zeilen bzw. Spalten in A zu bekommen <u>ohne</u> den Parameter t dabei auf Zeilen zu übertragen, die diesen Parameter nicht hat.

Zu a)

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t+6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-1) \\ \\ \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t+6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ \mid\cdot(-1) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t+6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t+6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix können wir nun so stehen lassen. Die 1-te Spalte dieser Matrix ist eine Pivotspalte, da mit $a_{11} = 6$ nur <u>ein</u> Eintrag in dieser Spalte vorhanden ist. Ebenso ist die 3-te Spalte dieser Matrix eine Pivotspalte, da diese Spalte mit $a_{33} = 1$ auch nur <u>einen</u> Eintrag hat. Damit wissen wir sofort das der Rang von A <u>immer mindestens 2</u> ist. Um festzustellen wie sich der Rang von A für die verschiedenen Werte von t ändert muß man Folgendes untersuchen:

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 1), Seite 2/7

Falls $a_{22}=0$ und $a_{44}=0 \implies Rg(A)=\dim(Bild(A))=2$

Falls $\left\{\begin{array}{c} a_{22}\neq 0 \text{ und } a_{44}=0 \\ \text{bzw.} \\ a_{22}=0 \text{ und } a_{44}\neq 0 \end{array}\right\} Rg(A)=\dim(Bild(A))=3$

Nicht invertierbar

Falls $a_{22}\neq 0$ und $a_{44}\neq 0 \implies \underbrace{Rg(A)=\dim(Bild(A))=4}_{\text{Invertierbar, weil voller Rang}}$

$t=0$:	$t=1$:	$t=2$:	$t=3$:	$t=4$:	$t=5$:	$t=6$:
$a_{22}=6$ und $a_{44}=1$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{4}}$	$a_{22}=0$ und $a_{44}=2$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{3}}$	$a_{22}=1$ und $a_{44}=3$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{4}}$	$a_{22}=2$ und $a_{44}=4$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{4}}$	$a_{22}=3$ und $a_{44}=5$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{4}}$	$a_{22}=4$ und $a_{44}=6$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{4}}$	$a_{22}=5$ und $a_{44}=0$ ergibt $Rg(A)=\underline{\underline{3}}$

Insgesamt also:

Falls $t\in\{1,6\}$ dann hat A den Rang 3.

Falls $t\in\{0,2,3,4,5\}$ dann hat A den Rang 4.

zu b)

Nicht invertierbar falls $t\in\{1,6\}$.

zu c)

Die letzte angegebene Matrix unter Aufgabenpunkt a) können wir für die Bearbeitung dieses Aufgabenpunktes übernehmen. Für t setzen wir 1 ein und auf die rechte Seite der Blockmatrix schreiben wir Nullen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ I:2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ \\ \\ I\cdot(-1) \end{array} \xrightarrow{\mathbb{F}_7} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} I:6 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

→ nächste Seite geht's weiter

$$\rightarrow \begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{r} x - y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{r} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

hier geht's weiter

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbb{L}(A,0) = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_7}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

zu d)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbb{F}_7} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ \\ + \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-1) \\ + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathbb{F}_7} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:(-2) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

nächste Seite geht's weiter

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 1), Seite 4/7

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; |\cdot(-1) \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{aligned} x - t &= -5 \\ y &= -4 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \overset{\mathbb{F}_7}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 + 0 \cdot t \\ z &= 0 + 0 \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Sol}(A, b) = s + \mathrm{Sol}(A, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe für b:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_7}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \; \checkmark$$

Probe für Kern:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_7}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; \checkmark$$

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 1), Seite 5/7

zu e,

Für $t = 1$ ist $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A transponieren und dann rechnen:

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |:6 \\ \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ |:2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Bild}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 1), Seite 6/7

zu f_1

$$CP(A) = \det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t+6-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & t+1 \\ 6 & 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \big| \cdot (-1-\lambda) \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -1-2\lambda & \lambda^2 \\ 0 & t+6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & t+1 \\ 6 & 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 6\cdot(-1)^{4+1}\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1-2\lambda & \lambda^2 \\ t+6-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -1-2\lambda & \lambda^2 \\ t+6-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & t+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \big|\cdot(1+2\lambda) \quad \big|\cdot(-1+\lambda) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t+6+10\lambda+2t\lambda-2\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \\ t+6-\lambda & 1 & 0 \\ -t-6+7\lambda+t\lambda-\lambda^2 & 0 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{F_7}{=} \begin{vmatrix} t-1+3\lambda+2t\lambda-2\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \\ t-1-\lambda & 1 & 0 \\ -t+1+t\lambda-\lambda^2 & 0 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} t-1+3\lambda+2t\lambda-2\lambda^2 & \lambda^2 \\ -t+1+t\lambda-\lambda^2 & t+1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1+3\lambda+2t\lambda-2\lambda^2)\cdot(t+1) - \lambda^2\cdot(-t+1+t\lambda-\lambda^2)$$

$$= (t^2+t-t-1+3t\lambda+3\lambda+2t^2\lambda+2t\lambda-2t\lambda^2-2\lambda^2) - (-t\lambda^2+\lambda^2+t\lambda^3-\lambda^4)$$

$$= t^2+t-t-1+3t\lambda+3\lambda+2t^2\lambda+2t\lambda-2t\lambda^2-2\lambda^2+t\lambda^2-\lambda^2-t\lambda^3+\lambda^4$$

$$= \lambda^4-t\lambda^3-2t\lambda^2-2\lambda^2+t\lambda^2-\lambda^2+3t\lambda+3\lambda+2t^2\lambda+2t\lambda+t^2+t-t-1$$

$$= \lambda^4-t\lambda^3+(-2t-2+t-1)\lambda^2+(3t+3+2t^2+2t)\lambda+(t^2-1)$$

$$= \lambda^4-t\lambda^3+(-t-3)\lambda^2+(2t^2+5t+3)\lambda+(t^2-1)$$

$$\overset{F_7}{=} \underline{\underline{\lambda^4+6t\lambda^3+(6t+4)\lambda^2+(2t^2+5t+3)\lambda+(t^2+6)}}$$

zu g)

Unter c) wurde für $t = 1$ folgendes berechnet:

$$\mathbb{L}(A,0) = \{ y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dim(\operatorname{Ker} A) = 1} \mid y \in \mathbb{F}_7 \}$$

Es gilt: $|\operatorname{Ker} A| = 7^{\dim(\operatorname{Ker} A)} = 7^1 = \underline{\underline{7}}$

wegen $\mathbb{F}_7$

zu h)

Unter e) wurde für $t = 1$ folgendes berechnet:

$$\operatorname{Bild}(A) = \underbrace{< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >}_{\dim(\operatorname{Bild}(A)) = 3}$$

Es gilt: $|\operatorname{Im} A| = 7^{\dim(\operatorname{Im} A)} = 7^3 = \underline{\underline{343}}$

wegen $\mathbb{F}_7$

gegeben:

Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{B} = {}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und}$$

$$ {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gegeben ist also die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ und die Basiswechselmatrix ${}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}}$. Um die ganzen Unterpunkte a) bis e) zu lösen brauchen wir aber die Darstellungsmatrix ${}^{\mathcal{E}}M_{\varphi}^{\mathcal{E}}$!

Es gilt:

$$ {}^{\mathcal{E}}M_{\varphi}^{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}} \qquad \text{und}$$

$$ {}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}} = \left({}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}}\right)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{{}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}}}$$

<u>Aufgabe 2, Seite 2</u>

Da auf der linken Seite mit ${}^{\mathcal{E}}T^{B}$ schon die 4×4-Einheitsmatrix steht, können wir auf der rechten Seite der Blockmatrix ${}^{B}T^{\mathcal{E}}$ sofort ablesen:

$$ {}^{B}T^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

$$ {}^{\mathcal{E}}M^{\mathcal{E}}_{\varphi} = {}^{\mathcal{E}}T^{B} \cdot {}^{B}M^{B}_{\varphi} \cdot {}^{B}T^{\mathcal{E}} $$

$$ \Longrightarrow \quad {}^{\mathcal{E}}M^{\mathcal{E}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} $$

$$ \Longleftrightarrow \quad {}^{\mathcal{E}}M^{\mathcal{E}}_{\varphi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} $$

$$ \Longleftrightarrow \quad {}^{\mathcal{E}}M^{\mathcal{E}}_{\varphi} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Da die Basis B die Standardbasis war, ist ${}^{\mathcal{E}}M^{\mathcal{E}}_{\varphi}$ gleich ${}^{B}M^{B}_{\varphi}$.

<u>zu a,</u>

$$ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) $$

$\longrightarrow$ Nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 2, Seite 3

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ |\cdot(-1) \ \overset{+}{\lrcorner} \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}} \iff \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

WICHTIG: Hier erscheint die Variable t nicht, also muß es hier erscheinen. Fügt ihr dann also immer so hinzu den fehlenden Parameter (hier nur t).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

zu b)

${}^{\mathcal{E}}M_{\varphi}^{\mathcal{E}}$ transponieren und dann rechnen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ \overset{+}{\hookleftarrow} \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ |\cdot 1 \\ \overset{+}{\hookleftarrow} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 0 \quad -1} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{Bild}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Aufgabe 2, Seite 4

zu c)

$$CP(\varphi) = \det(\varphi - \lambda E)$$

$$CP(\varphi) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$CP(\varphi) = \det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \left((-1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \left((-1-\lambda) \cdot [(-1-\lambda) \cdot (-\lambda)] - 1[-\lambda] \right)$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \left((-1-\lambda) \cdot (\lambda + \lambda^2) + \lambda \right)$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \left(-\lambda - \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda \right)$$

$$= (-1-\lambda) \cdot (-2\lambda^2 - \lambda^3)$$

$$= 2\lambda^2 + \lambda^3 + 2\lambda^3 + \lambda^4$$

$$= \underline{\underline{\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2}}$$

Aufgabe 2, Seite 5

zu c (alternativer Weg):

$$CP(\varphi) = \det(\varphi - \lambda E)$$

$$CP(\varphi) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$CP(\varphi) = \det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\cdot(-1)^{4+4}\cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)\cdot\left[(-1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}\right]$$

$$= (-\lambda)\cdot\left[(-1-\lambda)\cdot[(-1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 0] - 1\cdot[1\cdot(-1-\lambda) - 0]\right]$$

$$= (-\lambda)\cdot\left[(-1-\lambda)\cdot(1+\lambda+\lambda+\lambda^2) - 1\cdot(-1-\lambda)\right]$$

$$= (-\lambda)\cdot\left[(-1-\lambda)\cdot(1+2\lambda+\lambda^2) + 1 + \lambda\right]$$

$$= (-\lambda)\cdot\left[-1-2\lambda-\lambda^2-\lambda-2\lambda^2-\lambda^3+1+\lambda\right]$$

$$= (-\lambda)\cdot\left[-\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda\right]$$

$$= \underline{\underline{\lambda^4+3\lambda^3+2\lambda^2}}$$

zu C (2-ter alternativer Weg),

$$CP(\varphi) = \det(\varphi - \lambda E)$$

$$CP(\varphi) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$CP(\varphi) = \det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \quad |\cdot(-1) \quad |\cdot(1+\lambda)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 & -\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda-\lambda^2 \\ -\lambda & 0 & \lambda \\ 1 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} \quad |\cdot\lambda$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -\lambda-\lambda^2 & -\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda-\lambda^2 & \lambda \\ 1 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda-\lambda^2 & -\lambda-\lambda^2 \\ -\lambda-\lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda-\lambda^2 & -\lambda-\lambda^2 \\ -\lambda-\lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot [(-\lambda-\lambda^2) \cdot \lambda - (-\lambda-\lambda^2) \cdot (-\lambda-\lambda^2)]$$

$$= (-1) \cdot [-\lambda^2 - \lambda^3 - (\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^3 + \lambda^4)]$$

$$= (-1) \cdot [-\lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda^3 - \lambda^4]$$

$$= (-1) \cdot (-2\lambda^2 - 3\lambda^3 - \lambda^4)$$

$$= \underline{\underline{\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2}}$$

Aufgabe 2, Seite 7

zu d)

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 0 \mid \sqrt{\ } \quad \wedge \quad \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{3/4} = 0 \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow$ Insgesamt haben wir also folgende Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$ (einfach),

$\lambda_2 = -2$ (einfach) und

$\lambda_{3/4} = 0$ (doppelt)

Mit Hilfe der Eigenwerte kann man das charakteristische Polynom $\lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2$ in Linearfaktoren angeben: $\lambda^2 \cdot (\lambda+1)^1 \cdot (\lambda+2)^1$.

Aufgabe 2, Seite 8

zu e)

Eigenvektoren:

$$(\varphi - \lambda E) v = 0$$

$$\lambda := \lambda_1 = -1 \quad \text{einsetzen}$$

$$(\varphi + 1 \cdot E) v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ \xleftarrow{+} \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 1 \\ \xleftarrow{+} \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

Hier erscheint z nicht, also muß es hier erscheinen.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{Eig}_\varphi(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 2, Seite 9

Analog für λ_2:

$$(\varphi - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_2 = -2$$

einsetzen

$$(\varphi + 2E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |:2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 1 \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ |\cdot 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x + t = 0 \\ y - t = 0 \\ z + t = 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{Eig_\varphi(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

Aufgabe 2, Seite 10 (letzte Seite)

Analog für $\lambda_{3/4}$:

$(\varphi - \lambda E)v = 0$

$\lambda := \lambda_{3/4} = 0$ einsetzen

$(\varphi - 0E)v = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ + \\ \\ + \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot 1 \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

Hier erscheint t nicht, also muß es hier erscheinen.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{Eig_\varphi(0) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}}$$

Aufgabe 2, Bonusseite

Es gilt: $D = T^{-1} \cdot {}^{\mathcal{E}}M_{\varphi}^{\mathcal{E}} \cdot T$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1 \quad \mid \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 2 \\ \\ \mid \cdot 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1) \quad \mid \cdot 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid : 2 \\ \mid : 2 \\ \mid : 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \underbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}}_{T^{-1}}\right)$$

$$\Longrightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man erkennt stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen.

Aufgabe 3

gegeben: Basis $B = (\sin(X), \sin(2X), \cos(X), \cos(2X))$

Zielvektorraum

Startvektorraum

gesucht nach Vorschrift $f(X) \mapsto f'(X) + 4\cdot f(X)$ die Matrise ${}^{B}M^{B}_{\varphi}$.

Lösung

1. Schritt:

$\varphi(\sin(X)) = \cos(X) + 4\cdot\sin(X) = \_\cdot\sin(X) + \_\cdot\sin(2X) + \_\cdot\cos(X) + \_\cdot\cos(2X)$

$\varphi(\sin(2X)) = 2\cdot\cos(2X) + 4\cdot\sin(2X) = \_\cdot\sin(X) + \_\cdot\sin(2X) + \_\cdot\cos(X) + \_\cdot\cos(2X)$

$\varphi(\cos(X)) = -\sin(X) + 4\cdot\cos(X) = \_\cdot\sin(X) + \_\cdot\sin(2X) + \_\cdot\cos(X) + \_\cdot\cos(2X)$

$\varphi(\cos(2X)) = -2\cdot\sin(2X) + 4\cdot\cos(2X) = \_\cdot\sin(X) + \_\cdot\sin(2X) + \_\cdot\cos(X) + \_\cdot\cos(2X)$

2. Schritt:

Fülle die leeren Stellen so das diese rechte Seite gleich der linken Seite entspricht und trage die vier Zahlen in den Zeilen in die Spalten der gesuchten Matrise ${}^{B}M^{B}_{\varphi}$ ein:

$\varphi(\sin(X)) = \cos(X) + 4\cdot\sin(X) = \underline{4}\cdot\sin(X) + \underline{0}\cdot\sin(2X) + \underline{1}\cdot\cos(X) + \underline{0}\cdot\cos(2X)$

$\varphi(\sin(2X)) = 2\cdot\cos(2X) + 4\cdot\sin(2X) = \underline{0}\cdot\sin(X) + \underline{4}\cdot\sin(2X) + \underline{0}\cdot\cos(X) + \underline{2}\cdot\cos(2X)$

$\varphi(\cos(X)) = -\sin(X) + 4\cdot\cos(X) = \underline{(-1)}\cdot\sin(X) + \underline{0}\cdot\sin(2X) + \underline{4}\cdot\cos(X) + \underline{0}\cdot\cos(2X)$

$\varphi(\cos(2X)) = -2\cdot\sin(2X) + 4\cdot\cos(2X) = \underline{0}\cdot\sin(X) + \underline{(-2)}\cdot\sin(2X) + \underline{0}\cdot\cos(X) + \underline{4}\cdot\cos(2X)$

$$\Longrightarrow \quad {}^{B}M^{B}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 3)

Zielvektorraum

Startvektorraum

gegeben: Basis $B = \{ \sin(x), e^x, \cos(x), e^{x+2} \}$

gesucht nach Vorschrift $f(x) \mapsto f'(x) + 3 \cdot f(x)$ die Matrise ${}^{B}M^{B}_{\varphi}$.

Lösung

1. Schritt:

$$\varphi(\sin(x)) = \cos(x) + 3 \cdot \sin(x) = \_ \cdot \sin(x) + \_ \cdot e^x + \_ \cdot \cos(x) + \_ \cdot e^{x+2}$$

$$\varphi(e^x) = e^x + 3 \cdot e^x = \_ \cdot \sin(x) + \_ \cdot e^x + \_ \cdot \cos(x) + \_ \cdot e^{x+2}$$

$$\varphi(\cos(x)) = -\sin(x) + 3 \cdot \cos(x) = \_ \cdot \sin(x) + \_ \cdot e^x + \_ \cdot \cos(x) + \_ \cdot e^{x+2}$$

$$\varphi(e^{x+2}) = e^{x+2} + 3 \cdot e^{x+2} = \_ \cdot \sin(x) + \_ \cdot e^x + \_ \cdot \cos(x) + \_ \cdot e^{x+2}$$

2. Schritt:

Fülle die leeren Stellen so das diese rechte Seite gleich der linken Seite entspricht und trage die vier Zahlen in den Zeilen in die Spalten der gesuchten Matrise ${}^{B}M^{B}_{\varphi}$ ein:

$$\varphi(\sin(x)) = \cos(x) + 3 \cdot \sin(x) = \underline{3} \cdot \sin(x) + \underline{0} \cdot e^x + \underline{1} \cdot \cos(x) + \underline{0} \cdot e^{x+2}$$

$$\varphi(e^x) = e^x + 3 \cdot e^x = \underline{0} \cdot \sin(x) + \underline{4} \cdot e^x + \underline{0} \cdot \cos(x) + \underline{0} \cdot e^{x+2}$$

$$\varphi(\cos(x)) = -\sin(x) + 3 \cdot \cos(x) = \underline{(-1)} \cdot \sin(x) + \underline{0} \cdot e^x + \underline{3} \cdot \cos(x) + \underline{0} \cdot e^{x+2}$$

$$\varphi(e^{x+2}) = e^{x+2} + 3 \cdot e^{x+2} = \underline{0} \cdot \sin(x) + \underline{0} \cdot e^x + \underline{0} \cdot \cos(x) + \underline{4} \cdot e^{x+2}$$

$$\Longrightarrow {}^{B}M^{B}_{\varphi} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

zu a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot 2 \\ |\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(U) = 2$$

zu b)

$$U^{\perp} = \{ X = \underbrace{(X_1 \;\; X_2 \;\; X_3)}^{tr} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, u_1 \rangle = 0, \langle X, u_2 \rangle = 0, \langle X, u_3 \rangle = 0 \}$$

Bezieht sich auf die Anzahl der Zeilen die jeder einzelne Vektor hat und nicht wieviel Vektoren U enthält

Also

$\langle X, u_1 \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 = 0$

$\langle X, u_2 \rangle = 0: \quad 0 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 0$

$\langle X, u_3 \rangle = 0: \quad 2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 0$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot 2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |:2 \\ |:2 \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\dim(U^{\perp}) = 1$, weil man mit z eine Spalte einer freien Variablen hat. Also wird man auch einen Lösungsvektor für $U^{\perp}$ erhalten.

$$\Longrightarrow \begin{matrix} x - \frac{1}{2} z = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} z \end{matrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ wähle $z = 2$ um die Brüche loszuwerden und erhalte:

$l_z = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also ist $U^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

zu c)

$U^{\perp} = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid 1X_1 - 1X_2 + 2X_3 = 0 \}$

1) v in $U^{\perp}$?: $1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 - 1 + 4 = 4 \neq 0$ ↯

2) w in $U^{\perp}$?: $1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 - 2 + 2 = 2 \neq 0$ ↯

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 4)

Sei $V = \mathbb{Q}^3$ und

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq V$$

a

Welche Dimension hat U?

b

Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp$.

c

Geben Sie eine Orthonormalbasis B von U an.

d

Geben Sie $U^\perp$ orthonormiert an.

Lösung

zu a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(U) = 2$$

zu b)

$$U^{\perp} = \{X = (X_1 \;\; X_2 \;\; X_3)^{tr} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, u_1\rangle = 0, \langle X, u_2\rangle = 0, \langle X, u_3\rangle = 0\}.$$

Also

$\langle X, u_1\rangle = 0: \; 1\cdot X_1 + 1\cdot X_2 + 1\cdot X_3 = 0$

$\langle X, u_2\rangle = 0: \; 0\cdot X_1 + 2\cdot X_2 + 1\cdot X_3 = 0$

$\langle X, u_3\rangle = 0: \; 1\cdot X_1 + 3\cdot X_2 + 2\cdot X_3 = 0$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot 2 \\ |\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |:2 \\ |:2 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & \;\; y & \;\; z \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{0} & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{matrix} x + \frac{1}{2} z = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} z \end{matrix}$$

$\dim(U^{\perp}) = 1$, weil z die Spalte der einen freien Variable ist. D.h. auch das man einen Lösungsvektor für $U^{\perp}$ erhalten wird.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wähle $z = 2$ um die Brüche loszuwerden und erhalte somit:

$$l_z = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Also ist } U^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

zu c)

Angenommen, $\dim(U) = 3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^{3\times 1}$ ONB von U ist (e_1, e_2, e_3)

1. Bestimme eine Basis von U:

Schreibe die Vektoren aus dem Erzeugendensystem von U als Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 1} \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist die gleiche Rechnung aus Unterpunkt a) wo man die Dimension (man sagt Dimension und nicht Rang, weil es ein Vektorraum ist) von U bestimmen sollte. Hierbei stellen die erste und zweite Zeile die Basis von U dar. Für Aufgabenpunkt a) war dies noch nicht interessant, jetzt aber schon.

$$\Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ Erzeugnis

2. Gram-Schmidt auf die Basis

$$u = (u_1, u_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$ von U:

Mit $w_1 = u_1$ und den inneren Produkten

$$\langle u_2, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$ und $$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$ ist

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Mit $\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{120}{25}$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1, 2$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$b_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{120}{25}}} \cdot \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{120}} \cdot \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{120}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{auf}$$

die Orthonormalbasis $B = \{b_1, b_2\} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}}$.

Zu d)

Bekannt aus der Lösung von Aufgabenpunkt b) ist

$$U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Sei nun $u^\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Vektor aus $U^\perp$.

$$\Longrightarrow \|u^\perp\| = \sqrt{\langle u^\perp, u^\perp \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{ONB}(U^\perp) = \{ b_1^\perp \} = \frac{1}{\|u^\perp\|} \cdot u^\perp = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}} .$$

Zu a)

Mit $w_1 = u$ und den inneren Produkten ist

$$\langle v, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 4 = 6 \quad \text{und}$$

$$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 4 + 1 = 6 \quad \text{ist}$$

$$w_2 = v - \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu b)

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{4}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2+2+2}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{4}}$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{4}} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$

$$\cos \alpha = \frac{6 \cdot \sqrt{12}}{12 \cdot \sqrt{4}}$$

$$\cos \alpha = \frac{6 \cdot \sqrt{12}}{12 \cdot 2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aufgabe 5, Seite 2

zu c)

$$U = \langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$ laut Aufgabenstellung gilt dies.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot(-2) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ \mid\cdot 1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid:2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(U) = 2$$

zu d)

$$U^\perp = \{ X = (X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4)^{tr} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle X, u \rangle = 0, \langle X, v \rangle = 0 \}$$

Also

$$\langle X, u \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + (-2) \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + (-1) \cdot X_4 = 0$$

$$\langle X, v \rangle = 0: \quad 2 \cdot X_1 + (-2) \cdot X_2 + (-2) \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \mid\cdot(-2) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mid:2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \xleftarrow{+} \\ \mid\cdot 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \underbrace{-1 \quad 1} & & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\dim(U^\perp) = 2$, weil

man mit z und t zwei Spalten der freien Variablen hat. D. h. auch das man zwei Lösungsvektoren für $U^\perp$ erhalten wird.

Aufgabe 5, Seite 3 (letzte Seite)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot 1 \;\; |\cdot 2 \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2P \\ 0 & 1 & 0 & 1 & P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2P-1Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1P-1Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1P+0Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0P+1Q \end{array}\right) \Rightarrow l_z = z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$l_t = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe:

$$\langle u, u_1^{\perp} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 - 0 = 0 \checkmark$$

$$\langle u, u_2^{\perp} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 + 0 - 1 = 0 \checkmark$$

$$\langle v, u_1^{\perp} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 + 0 = 0 \checkmark$$

$$\langle v, u_2^{\perp} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 - 0 + 0 = 0 \checkmark$$

Aufgabe 5, Bonusseite 1/2

zu e,

$$U^{\perp} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1^{\perp}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2^{\perp}} \rangle$$

Mit $w_1 = u_1^{\perp}$ und den inneren Produkten

$$\langle u_2^{\perp}, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \quad \text{und} \quad \|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \quad \text{ist}$$

$$w_2 = u_2^{\perp} - \frac{\langle u_2^{\perp}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 5, Bonusseite 2/2

mit $\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{4}$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1,2$ führt das Normieren

der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2

$$b_1' = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$b_2' = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{4}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{auf die}$$

Orthonormalbasis ONB $B^\perp = \{ b_1^\perp, b_2^\perp \} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}}.$

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 5)

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

Seien $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $W = \langle x, y \rangle$.

(a) Geben Sie eine Orthogonalbasis von W an.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von W an.

(c) Sei $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und sei $w = u + v$, wobei

$u \in W$ und v orthogonal zu W, also $v \in W^\perp$ ist.

Berechnen Sie u und v.

(d) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $W^\perp$.

Lösung

zu a)

Da $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ ergibt stellen X und Y

bereits eine Orthogonalbasis dar:

$$\text{OGB} = \{w_1, w_2\} = \underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}}.$$

zu b)

Es ist $\{w_1, w_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Mit

$$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{und}$$

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1,2$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1 und w_2

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$b_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{auf die}$$

Orthonormalbasis $B = \{b_1, b_2\} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}}.$

zu c)

Bestimmung $proj_W(u)$:

$$proj_W(u) = <w, b_1> b_1 + <w, b_2> b_2$$

$$= < \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1+2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot (-1-2+1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/6 \\ -3/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/6 \\ -4/6 \\ 4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -7/6 \\ 2/3 \end{pmatrix} = u$$

Bestimmung $proj_{W^\perp}(v)$:

$$w = u + v$$

$$\Longleftrightarrow v = w - u$$

$$\Longrightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/6 \\ -7/6 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/6 \\ -5/6 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

zu d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert\cdot 2 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \vert\cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \vert\cdot 1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert:2 \\ \vert:2 \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1/2)\cdot p \\ 0 & 1 & 0 & (1/2)\cdot p \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdot p \end{array}\right) \Longrightarrow l_p = p \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

wähle $p = 2$ um die Brüche loszuwerden und erhalte $W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Sei dies nun $w^\perp$

Normieren: $\|w^\perp\|^2 = \langle w^\perp, w^\perp \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 4 = 6$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\|w^\perp\|} \cdot w^\perp = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{ONB}(W^\perp).$$

Aufgabe 6, Seite 1

zu a,

$$CP(B_t) = det\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$CP(B_t) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & t \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$CP(B_t) = (1-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 2t$$

$$CP(B_t) = 5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 2t$$

$$CP(B_t) = \lambda^2 - 6\lambda + (5-2t)$$

zu b,

$$|B_t| = 5 - 2t$$

zu c,

$$5 - 2t \neq 0 \quad |-5$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2t \neq -5 \quad |\cdot(-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2t \neq 5 \quad |:2$$

$$\Longleftrightarrow \quad t \neq \frac{5}{2}$$

zu d,

$$5 - 2t = 1 \qquad \text{und} \qquad 5 - 2t = -1$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2t = -4 \qquad \Longleftrightarrow \quad -2t = -6$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2t = 4 \qquad \Longleftrightarrow \quad 2t = 6$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = 2 \qquad \Longleftrightarrow \quad t = 3$$

$$\Longrightarrow \quad t \in \{2, 3\}$$

Aufgabe 6, Seite 2

zu e)

$$CP(B_t) = \lambda^2 - 6\lambda + (5 - 2t)$$

$$\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - (5 - 2t)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5 + 2t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{4 + 2t}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 3 + \sqrt{4+2t} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 3 - \sqrt{4+2t}$$

sind die Eigenwerte von B_t.

zu f)

$$4 + 2t > 0 \quad | -4$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2t > -4 \quad | :2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{t > -2}}$$

zu g)

Für $t = 0$ ist $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 1$.

$$(B_0 - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_1 = 5$$

einsetzen

$$(B_0 - 5E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | :(-4) \\ | :2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot(-1) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & P \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0P \\ 0 & 1 & 1P \end{array}\right) \Longrightarrow \underline{\underline{Eig_{B_0}(5) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.}}$$

Aufgabe 6, Seite 3 (letzte Seite)

Analog für λ_2:

$(B_0 - \lambda E)v = 0$

$\lambda := \lambda_2 = 1$ einsetzen

$(B_0 - 1E)v = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) |:2 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) |\cdot(-2)\ +$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & 1p \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{Eig_{B_0}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.}}$$

Es gilt: $D = T^{-1} \cdot B_0 \cdot T$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung T^{-1}:

$$T^{-1} = \frac{1}{0+2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \quad D = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$ ← Auf den Diagonalen stehen die Eigenwerte.

Zusatzaufgabe (ähnlich wie Aufgabe 6)

Für $t \in B_t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Es sei $a = b = 1$, $c = 6$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von B_t.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von B_t.

(c) Für welche Werte von t ist B_t invertierbar?

(d) Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$?

(e) Es sei $t = 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.

(f) Es sei $t = 2$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.

Lösung

zu a)

$$CP(B_t) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & t \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & t-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(t-\lambda) - 6$$

$$= t - \lambda - t\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$= \lambda^2 - t\lambda - \lambda + t - 6$$

$$= \underline{\underline{\lambda^2 + (-t-1)\cdot\lambda + (t-6)}}$$

zu b)

$$|B_t| = \underline{\underline{t-6}}$$

zu c)

$$t - 6 \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{t \neq 6}}$$

zu d)

$t - 6 = 1$ und $t - 6 = -1$

$\Longleftrightarrow t = 7$ $\Longleftrightarrow t = 5$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{t \in \{5, 7\}}}$$

zu e)

Für $t=0$ ist $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

$$CP(B_0) = \lambda^2 - \lambda - 6$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ sind die Eigenwerte.

Eigenvektoren:

$$(B_0 - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_1 = 3$$

einsetzen

$$(B_0 - 3E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 3 \\ + \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} :(-2) \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 2 \\ \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot 1 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{matrix} :2 \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (1/2)\cdot p \\ 0 & 1 & 1\cdot p \end{array}\right) \Longrightarrow l_p = p \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wähle $p = 2$ um den Bruch loszuwerden und erhalte

$$Eig_{B_0}(3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

Analog für λ_2:

$(B_0 - \lambda E)v = 0$

$\lambda := \lambda_2 = -2$ einsetzen

$(B_0 + 2 \cdot E)v = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) | :3 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \cdot p \end{array}\right) | \cdot 3 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ | \cdot (-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -p \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) | :3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (-1/3) \cdot p \\ 0 & 1 & 1 \cdot p \end{array}\right) \Longrightarrow l_p = p \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Wähle $p = 3$

um den Bruch loszuwerden und erhalte

$$\mathrm{Eig}_{B_0}(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

zu f_1

Für $t=2$ ist $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

$$CP(B_2) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte.

Eigenvektoren:

$$(B_2 - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_1 = 4 \quad \text{einsetzen}$$

$$(B_2 - 4E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |:(-3) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1p \end{array}\right) |\cdot 3 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ |\cdot 1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & p \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) |:3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (1/3)\cdot p \\ 0 & 1 & 1\cdot p \end{array}\right) \Longrightarrow \ell_p = p \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wähle $p = 3$ um den Bruch loszuwerden und erhalte

$$\mathrm{Eig}_{B_2}(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Analog für λ_2:

$(B_2 - \lambda E)v = 0$

$\lambda := \lambda_2 = -1$ einsetzen

$(B_2 + 1 \cdot E)v = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-3) \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |:2 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \cdot p \end{array}\right) |\cdot 2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -p \\ 0 & 1 & p \end{array}\right) |:2 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (-1/2)\cdot p \\ 0 & 1 & 1 \cdot p \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow l_p = p \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wähle $p = 2$ um den Bruch loszuwerden und erhalte

$$\underline{\underline{Eig_{B_2}(-1) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.}}$$