Klausur, 25.07.2011

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2011, Dr. T. Hanke

Name: Savas Gürcebe **Matrikelnummer:** ____________

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

1 Sei $n \geq 2$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und sei die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ definiert durch $b_1 \mapsto 0$, $b_i \mapsto b_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, n-1$, und $b_n \mapsto b_{n-1} + b_n$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ von φ. *(3 Punkte)*

$$\chi_\varphi = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ mit ihren algebraischen Vielfachheiten. *(2 Punkte)*

(c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(2 Punkte)*

(d) Für welche n ist φ diagonalisierbar? *(1 Punkt)*

2 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

3 Sei die lineare Abbildung φ definiert durch:

$$\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$ und der geordneten Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an: *(3 Punkte)*

$${}^{\mathcal{B}}\mathrm{M}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Was ist der Rang von φ? $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{2}$ *(1 Punkt)*

(c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

$$\mathcal{C} = \langle (-1 \quad 0 \quad 1) \rangle$$

(d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

$$\mathcal{D} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4 Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor v_2', der v_1 zu einer Orthogonalbasis von E ergänzt.

$$v_2' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$ *(2 Punkte)*

Name: Savas Gürcebe Matrikelnummer:

4	(Fortsetzung) (b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion u' von $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf E. $u' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)* (c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels α zwischen dem Vektor u aus Teil (b) und E. $\cos(\alpha) = \boxed{\sqrt{11/17}}$ *(1 Punkt)*
5	Für $t \in \mathbb{R}$ sei $B_t = \begin{pmatrix} 3 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t. $\boxed{\lambda^2 - 4\lambda + (3+t)}$ *(1 Punkt)* (b) Bestimmen Sie die Determinante von B_t. $\boxed{3+t}$ *(1 Punkt)* (c) Für welche Werte von t ist B_t invertierbar? $\boxed{t \neq -3}$ *(1 Punkt)* (d) Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$? $\boxed{t \in \{-2, -4\}}$ *(1 Punkt)* (e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt B_t einen Eigenvektor? $\boxed{t \leq 1}$ *(1 Punkt)* (f) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t diagonalisierbar? $\boxed{t < 1}$ *(1 Punkt)* (g) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist B_t diagonalisierbar, wenn wir B_t als Matrix in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auffassen? *(2 Punkte)* (h) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t triangulierbar? *(1 Punkt)* (i) Geben Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, für die $T^{-1}B_{-8}T$ eine Diagonalmatrix ist. $T = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
6	Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißt φ *selbstadjungiert*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt $\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle$. Zeigen Sie: (a) φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $M^{\mathcal{B}}(\varphi)$ symmetrisch ist. *(3 Punkte)* (b) Sei φ selbstadjungiert. Dann ist für jeden φ-invarianten Unterraum $U \leq V$ auch $U^{\perp}$ ein φ-invarianter Unterraum. *(2 Punkte)*
7	Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Sei M eine Menge von Eigenvektoren von φ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass M linear unabhängig ist. *(5 Punkte)*
8	Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Was ist der Rang vom A? Beweisen Sie Ihre Aussage. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4 (eigene Unterpunkte)

(d) Bestimmen Sie dim(E).

(e) Bestimmen Sie dim($E^{\perp}$) und $E^{\perp}$.

(f) Geben Sie $E^{\perp}$ orthonormiert an.

Aufgabe 2 (Seite 1)

gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gesucht:

$$Sol(A, b) = s + Sol(A, 0)$$

Lösung

$\mathbb{F}_2$ bedeutet:

$$\begin{matrix} & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & \\ \ldots & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & \ldots \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

1-ter Lösungsweg:

Die eingekreisten "1"-en sind die Pivotelemente, jetzt fügt man eine weitere Zeile hinzu die in der 4-ten Spalte eine "1" stehen hat und im b-Teil den Parameter P:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1+P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \end{array}\right) \to \text{Vertausche 4-te und 5-te Zeile}$$

Aufgabe 2 (Seite 2)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1+P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ Man kann jetzt die Lösung auf der rechten Seite ablesen. Dabei stellen die Zahlen ohne den Parameter P die spezielle Lösung dar und die Koeffizienten von P die Lösung des Kerns, also die Nulllösung.

Zur Verdeutlichung kann man die obige Matrise auch so schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0+1\cdot P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+1\cdot P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1+1\cdot P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0+1\cdot P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+0\cdot P \end{array}\right) \Longrightarrow Sol(A,b) = s + Sol(A,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Probe für b:

$$A\cdot s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_2}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \ \checkmark$$

4×5 $\quad$ ok $\quad$ 5×1 $\quad$ 4×1

Probe für Kern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{\mathbb{F}_2}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \checkmark$$

4×5 $\quad$ ok $\quad$ 5×1 $\quad$ 4×1

Aufgabe 2 (letzte Seite)

2-ter Lösungsweg:

Wir nehmen die obige Matrize mit den eingekreisten "1"-en und kennzeichnen jede Spalte mit einem Buchstaben:

$$
\begin{array}{ccccc}
x & y & z & s & t
\end{array}
$$
$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
\Longrightarrow
\begin{array}{r}
x + s = 0 \\
y + s = 1 \\
z + s = 1 \\
t = 1
\end{array}
$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{array}{l}
x = 0 + s \\
y = 1 + s \\
z = 1 + s \\
t = 1
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow Sol(A, b) = s + Sol(A, 0)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
$$

Nicht verwiren lassen: Dieses s meint den Parameter s welches das erste mal über der vierten Spalte erscheint, wohingegen dieses s die spezielle Lösung (also die feste Lösung) bezeichnet.

Aufgabe 3, Seite 1

Vorüberlegung:

$$\varphi: \mathbb{R}^{1\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a \;\; b \;\; c) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (a \;\; b \;\; c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a \;\; b \;\; c) \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (a+c \quad a+b+c)$$

$$(a \;\; b \;\; c) \mapsto \begin{pmatrix} a+c & a+b+c \\ 2(a+c) & 2(a+b+c) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(a \;\; b \;\; c) = \begin{pmatrix} a+c & a+b+c \\ 2(a+c) & 2(a+b+c) \end{pmatrix}$$

Zu a)

Vorgehensweise:

1. Es wird von Basis $\mathcal{E}$ nach Basis $\mathcal{B}$ abgebildet.
2. Definitionsbereich ist $\mathbb{R}^{1\times 3}$, bedeutet stopfe jeden Vektor aus $\mathcal{E}$ in die Funktion rein.
3. Stelle die abgebildete Basis $\mathcal{E}$ durch die andere neue Basis $\mathcal{B}$ dar.
4. Schreibe Koeffizienten <u>spaltenweise</u> auf.

$$\varphi(1 \;\; 0 \;\; 0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

1-te Spalte

$$K_B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(0 \;\; 1 \;\; 0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

2-te Spalte

Aufgabe 3, Seite 2

$$\varphi(0\quad 0\quad 1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & t & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

3-te Spalte

$$\Longrightarrow \quad {}^{B}M^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zu b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \quad |\cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \operatorname{Rang}(\varphi) = 2$$

zu c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-1) \quad |\cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ |\cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \\ |\cdot(-1) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1P \\ 0 & 1 & 0 & 0P \\ 0 & 0 & 1 & 1P \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) = \langle(-1\quad 0\quad 1)\rangle$$

Aufgabe 3, Seite 3 (letzte Seite)

zu d)

Zuerst φ transponieren und dann rechnen:

$$\varphi^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Bild}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 4, Seite 1

zu a)

Mit $w_1 = v_1$ und den inneren Produkten

$$\langle v_2, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{und} \quad \|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= 2$ ist

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

zu b)

Es ist nun $\{w_1, w_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Mit $\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1,2$ und $\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2 \rangle$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$= 3$

führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4, Seite 2

auf die Orthonormalbasis ONB $B = \{ b_1, b_2 \} = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$.

$$\pi_E(u) = \langle u, b_1 \rangle b_1 + \langle u, b_2 \rangle b_2$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2+2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot (2-2-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{4}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{3} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

zu c)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{11}}$$

$$= \frac{2+6+3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{11}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{11}} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$$

$$= \frac{11 \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{17} \cdot 11}$$

$$= \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{17}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{11}{17}}}}$$

Aufgabe 4, Seite 3

zu d)

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}|\cdot(-2)\\ \xleftarrow{+}\end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}|\cdot 2\\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\xleftarrow{+}\\ |\cdot 1\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(E) = 2$$

zu e)

$$E^{\perp} = \{ X = (X_1 \quad X_2 \quad X_3)^{tr} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle X, V_1\rangle = 0, \langle X, V_2\rangle = 0\}$$

Also

$$\langle X, V_1\rangle = 0: \quad 1\cdot X_1 + (-1)\cdot X_2 + 0\cdot X_3 = 0$$

$$\langle X, V_2\rangle = 0: \quad 2\cdot X_1 + 0\cdot X_2 + (-1)\cdot X_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot(-2)\\ \xleftarrow{+}\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot 2\\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\xleftarrow{+}\\ |\cdot 1\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}|:2\\ |:2\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\;x & \;\;y & \;\;\;z & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\end{array}\right)\end{array}$$

$\dim(E^{\perp}) = 1$, weil <u>eine</u> Spalte der freien Variable existiert (hier nur z). D. h. es wird nachher <u>ein</u> Lösungsvektor für $E^{\perp}$ ermittelt.

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & P\end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot 2\\ |\cdot 2\\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & P\end{array}\right)\begin{array}{l}\xleftarrow{+}\\ \xleftarrow{+}\\ |\cdot 1\end{array}$$

Nächste Seite geht's weiter

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & P \\ 0 & 2 & 0 & P \\ 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ |:2 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1/2)P \\ 0 & 1 & 0 & (1/2)P \\ 0 & 0 & 1 & 1P \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow l_z = z \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wähle $z = 2$ um die Brüche loszuwerden und erhalte:

$$\underline{\underline{E^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}}. \quad \leftarrow \text{Orthogonal zu } v_1 \text{ und } v_2 \text{ aus } E.$$

<u>zu f)</u>

$E^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Sei nun $e_1^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\|e_1^{\perp}\|^2 = \langle e_1^{\perp}, e_1^{\perp} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= 1 + 1 + 4$$
$$= 6$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\|e_1^{\perp}\|} \cdot e_1^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$E^{\perp} \text{ orthonormiert: } \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}.$$

Aufgabe 5, Seite 1

zu a,

$$CP(B_t) = \det(B_t - \lambda E)$$

$$\Longrightarrow \quad CP(B_t) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\Longleftrightarrow \quad CP(B_t) = \det \begin{vmatrix} 3-\lambda & t \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad CP(B_t) = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) + t$$

$$\Longleftrightarrow \quad CP(B_t) = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + t$$

$$\Longleftrightarrow \quad CP(B_t) = \lambda^2 - 4\lambda + (3+t)$$

zu b,

Die Determinante läßt sich am charakteristischen Polynom ablesen. Es ist immer die Zahl (inklusive Vorzeichen) die in der Regel am Ende <u>ohne</u> das λ steht. Also

$$|B_t| = +(3+t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad |B_t| = 3 + t$$

zu c,

Invertierbar falls die Determinante ungleich Null ist:

$$3 + t \neq 0 \quad |-3$$

$$\Longleftrightarrow \quad t \neq -3$$

zu d,

$$3 + t = 1 \qquad \text{und} \qquad 3 + t = -1$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = -2 \qquad \Longleftrightarrow \quad t = -4$$

$$\Longrightarrow \quad t \in \{-2, -4\}$$

Aufgabe 5, Seite 2

zu e,

$$CP(B_t) = \lambda^2 - 4\lambda + (3+t)$$

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-(3+t)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3-t}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{1-t}$$

Um einen Eigenvektor zu bekommen braucht man erst mal einen Eigenwert. Und da der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ sein darf, gilt:

$$1 - t \geq 0 \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow -t \geq -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{t \leq 1}}$$

zu f,

Hierfür muß der Ausdruck unter der Wurzel echt größer als 0 sein, da man sonst keine zwei verschiedene Eigenwerte erhält:

$$1 - t > 0 \quad | -1$$

$$\Leftrightarrow -t > -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{t < 1}}$$

Aufgabe 5, Seite 3

zu i,

$$B_{-8} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\Longrightarrow \quad CP(B_{-8}) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{9}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 2 \pm 3$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = -1$ sind die Eigenwerte.

Eigenvektoren

$$(B_{-8} - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_1 = 5$$

einsetzen

$$(B_{-8} - 5E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -8 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:(-2) \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-4) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4\cdot P \\ 0 & 1 & 1\cdot P \end{array}\right) \Longrightarrow Eig_{B_{-8}}(5) = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Analog für λ_2:

$$(B_{-8} - \lambda E)v = 0$$

$$\lambda := \lambda_2 = -1$$

einsetzen

$$(B_{-8} + 1E)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:4 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot 2 \end{array}$$

$\longrightarrow$ nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 5, Seite 4 (letzte Seite)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2P \\ 0 & 1 & 1P \end{array}\right) \Longrightarrow \underline{\underline{\mathrm{Eig}_{B_{-8}}(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Verlangt war es nicht aber bestimme noch T^{-1}:

$$T^{-1} = \frac{1}{-4-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow T^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}}$$

Es gilt $D = T^{-1} \cdot B_{-8} \cdot T$, d.h. nachdem man die drei Matrizen miteinander multipliziert hat, sollten auf der Diagonalen die Eigenwerte erscheinen:

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow D = \underbrace{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}} \checkmark$$