Nachholklausur, 21.09.2011

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2011, Dr. T. Hanke

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ________________

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

1 Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von V. Eine weitere geordnete Basis $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ ist gegeben durch

$$u_1 := 2v_1 - 2v_2 - v_3, \quad u_2 := -2v_1 + 1v_2 + 2v_3, \quad u_3 := v_1 - v_2 - v_3.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}}$ und ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}}$. *(2+2 Punkte)*

$${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen sie den Koordinatenvektor von $v_1 + v_2 + v_3$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$: *(1 Punkt)*

$$\kappa_{\mathcal{B}}(v_1 + v_2 + v_3) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

Es sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $M_\varphi^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$: *(2 Punkte)*

$$M_\varphi^{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 10 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 8 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie Rang und Defekt von φ an. *(1+1 Punkte)*

$$\text{Rang}(\varphi) = \boxed{3}, \qquad \text{Defekt}(\varphi) = \boxed{0}$$

2 Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^4$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$

3 Sei die lineare Abbildung φ definiert durch:

$$\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$ und der geordneten Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an: *(3 Punkte)*

$${}^{\mathcal{B}}\mathrm{M}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

$\langle (0, 1, 1) \rangle$

$\mathcal{C} =$

(c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

$$\mathcal{D} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4 Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $E = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor v_2', der v_1 zu einer Orthogonalbasis von E ergänzt.

$$v_2' = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(2 Punkte)

Name:_______________________ Matrikelnummer:_______________________

4 (Fortsetzung)

(b) Sei $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und sei $u = u' + u''$, wobei $u' \in E$ und u'' orthogonal zu E ist. Berechnen Sie u' und u''.

$u' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$ $\quad u'' = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)*

(c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels α zwischen dem Vektor u aus Teil (b) und E.

$\cos(\alpha) = \boxed{\sqrt{23/95}}$ *(1 Punkt)*

5

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $B_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Determinante von B_t. $\boxed{2-t}$ *(1 Punkt)*

(b) Für welche Werte von t ist B_t invertierbar? $\boxed{t \neq 2}$ *(1 Punkt)*

(c) Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{t \in \{1, 3\}}$ *(1 Punkt)*

(d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt B_t einen Eigenvektor? $\boxed{}$ *(1 Punkt)*

(e) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t. $\boxed{x^2 - 3x + 2 + t}$ *(2 Punkte)*

(f) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t triangulierbar? $\boxed{t \geq -1/4}$ *(2 Punkte)*

(g) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t diagonalisierbar? $\boxed{t > -1/4,\ t \neq 0}$ *(2 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
6	(a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind, positiv definit? *(2 Punkte)* (b) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ kein Skalarprodukt gibt, so dass für die zugehörige Norm $\|\cdot\|$ und alle $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|x\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$. *(3 Punkte)*
7	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. (a) Zeigen Sie, dass es genau dann einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit Bild$(\varphi) =$ Kern(φ) gibt, wenn n gerade ist. *(3 Punkte)* (b) Sei $\psi : V \to V$ ein invertierbarer Endomorphismus und $U \leq V$ ein ψ-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass U auch ψ^{-1}-invariant ist. *(3 Punkte)*
8	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert $c \in K$ von A und jedes Polynom $p(X) \in K[X]$ gilt, dass $p(c)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist. *(4 Punkte)*