Klausur, 25.07.2011

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2011, Dr. T. Hanke

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Angaben ohne Gewähr.

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

1 Sei $n \geq 2$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ und sei die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ definiert durch $b_1 \mapsto 0$, $b_i \mapsto b_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, n-1$, und $b_n \mapsto b_{n-1} + b_n$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ von φ. *(3 Punkte)*

$$\chi_\varphi = \boxed{X^{n-1}(X-1)}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ mit ihren algebraischen Vielfachheiten. *(2 Punkte)*

$$\boxed{a_0(M) = n-1, a_1(M) = 1}$$

(c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(2 Punkte)*

$\underline{EW_1:}$ $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\underline{EW_0:}$ $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(d) Für welche n ist φ diagonalisierbar? $\boxed{n=2}$ *(1 Punkt)*

2 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3 Sei die lineare Abbildung φ definiert durch:

$$\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$ und der geordneten Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an: *(3 Punkte)*

$${}^{\mathcal{B}}\mathrm{M}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Was ist der Rang von φ? $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{2}$ *(1 Punkt)*

(c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

$$\mathcal{C} = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

(d) Geben Sie eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)*

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

4 Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$E = \langle v_1, v_2 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie einen Vektor v_2', der v_1 zu einer Orthogonalbasis von E ergänzt.

$$v_2' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(2 Punkte)

Name:________________________ Matrikelnummer:________________________

4	(Fortsetzung)

(b) Berechnen Sie die orthogonale Projektion u' von $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf E.

$u' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)*

(c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels α zwischen dem Vektor u aus Teil (b) und E.

$\cos(\alpha) = \boxed{\sqrt{\frac{11}{17}}}$ *(1 Punkt)*

5

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $B_t = \begin{pmatrix} 3 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t. $\boxed{x^2 - 4x + 3 + t}$ *(1 Punkt)*

(b) Bestimmen Sie die Determinante von B_t. $\boxed{3 + t}$ *(1 Punkt)*

(c) Für welche Werte von t ist B_t invertierbar? $\boxed{t \neq -3}$ *(1 Punkt)*

(d) Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$? $\boxed{t \in \{-2, -4\}}$ *(1 Punkt)*

(e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt B_t einen Eigenvektor? $\boxed{}$ *(1 Punkt)*

(f) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t diagonalisierbar? $\boxed{t < 1}$ *(1 Punkt)*

(g) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist B_t diagonalisierbar, wenn wir B_t als Matrix in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auffassen?

$\boxed{\forall t \in \mathbb{C}, t \neq 0}$ *(2 Punkte)*

(h) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t triangulierbar? $\boxed{t \leq 1}$ *(1 Punkt)*

(i) Geben Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, für die $T^{-1}B_{-8}T$ eine Diagonalmatrix ist.

$T = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
6	Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Dann heißt φ *selbstadjungiert*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt $\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle$. Zeigen Sie: (a) φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $M^{B}(\varphi)$ symmetrisch ist. *(3 Punkte)* (b) Sei φ selbstadjungiert. Dann ist für jeden φ-invarianten Unterraum $U \leq V$ auch $U^{\perp}$ ein φ-invarianter Unterraum. *(2 Punkte)*
7	Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Sei M eine Menge von Eigenvektoren von φ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass M linear unabhängig ist. *(5 Punkte)*
8	Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Was ist der Rang vom A? Beweisen Sie Ihre Aussage. *(4 Punkte)*