Lerndingsbums für LA

Geheim

23. Juli 2010

1. Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

   Hier ist $M \setminus N$ die **Differenzmenge** zweier Mengen M und N, also gleich $\{m \in M \mid m \notin N\}$.

   (a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

   Solution: Ja

   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

   Solution: Ja

   (c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   Solution: Ja

   (d) Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$.

   Solution: Ja

   (e) Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.

   Solution: Ja

   (f) Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cup A \subseteq C \cup B$.

   Solution: Ja

   (g) $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

   Solution: Nein

   (h) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

   Solution: Nein

(i) Wenn $A \cap B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.

Solution: Nein

(j) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

Solution: Nein

(k) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

Solution: Nein

2. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

(a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Ja

(b) $F : \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y\} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + y$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Ja

(c) $F : \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y\} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Ja

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x^2, x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Nein

(e) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y)$ ist eine injektive Abbildung.

Solution: Nein

(f) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3)$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Nein

(g) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \mapsto (x, x + 1)$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Nein

(h) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, x \mapsto (x, x - 1)$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Nein

(i) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ ist eine surjektive Abbildung.

Solution: Nein

(j) $f : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2+y^2, x-y)$ ist eine injektive Abbildung.

Solution: Nein

3. Es sei K ein beliebiger Körper. Kreuzen Sie bei den folgenden Fragen "Ja" nur an, wenn die Aussage für jeden Körper K gilt. Wenn es auch nur einen Körper gibt, für den die Aussage nicht gilt, müssen Sie "Nein" ankreuzen.

(a) Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ist die Abbildung $K \to K, x \mapsto ax$ bijektiv.

Solution: Ja

(b) Ist $a \in K$ und $a^2 = 1$, so folgt $a = 1$ oder $a = -1$.

Solution: Ja

(c) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $K \to K, x \mapsto a + x$ bijektiv.

Solution: Ja

(d) Sind $a, b \in K$ mit $a^2 - ab - ba + b^2 = 0$, so ist $a = b$.

Solution: Ja

(e) Sind $a, b \in K$ und $(a - b)^2 = 0$, so ist $a = b$.

Solution: Ja

(f) Die Gleichung $x \cdot a + x = 0$ hat für jedes $a \in K$ eine Lösung in K.

Solution: Ja

(g) Die Gleichung $x \cdot a + x = -1$ hat für jedes $a \in K$ eine Lösung in K.

Solution: Nein

(h) Die Abbildung $K \to K, x \mapsto x + x$ ist bijektiv.

Solution: Nein

(i) Die Abbildung $K \to K, x \mapsto x + x + x$ ist bijektiv.

Solution: Nein

(j) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $K \to K, x \mapsto ax$ bijektiv.

Solution: Nein

(k) Ist $a \in K$ und $a^{-1} = a$, so ist $a = 1$.

Solution: Nein

4. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ den Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Restklasse $k + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auch mit der eindeutigen ganzen Zahl $k' \in k + n\mathbb{Z}$ mit $0 \leq k' \leq n - 1$ (dem Rest von k beim Teilen durch n).

(a) Welches Element ist das Inverse von $5 \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$? (Das heißt, für welches $k \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ist $k \cdot 5 = 1 \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$?)

Solution: 8

(b) Welches Element ist das Inverse von $3 \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$? (Das heißt, für welches $k \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ist $k \cdot 3 = 1 \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$?)

Solution: 9

(c) In $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ist $(4 \cdot 4 + 5) \cdot 12 = 5$.

Solution: Ja

(d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Solution: Ja

(e) Wenn n keine Primzahl ist, dann gibt es $k, l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, beide ungleich Null, so dass $k \cdot l = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.

Solution: Ja

(f) Hat jedes Element $k \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, $k \neq 0$, ein Inverses?

Solution: Ja

(g) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann kein Körper, wenn n keine Primzahl ist.

Solution: Ja

(h) Hat jedes Element $k \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, $k \neq 0$, ein Inverses?

Solution: Nein

(i) In $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ist $12 \cdot (4 \cdot 3 + 7) = 6$.

Solution: Nein

5. Es sei K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen; verwenden Sie **nur** die Körperaxiome oder Aufgabenteile, die Sie bereits bewiesen haben.

   (i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$.
   (ii) Gilt $a + b = 0$ mit $a, b \in K$, so ist $b = -a$.
   (iii) $-a = (-1) \cdot a$ für alle $a \in K$.
   (iv) $-(-a) = a$ für alle $a \in K$.
   (v) Gilt $a \cdot b = 1$ mit $a, b \in K$, so ist $b = a^{-1}$.
   (vi) Sei $0 \neq a \in K$. Dann ist $(a^{-1})^{-1} = a$.
   (vii) Gilt für ein $b \in K$, dass $a + b = a$ ist für alle $a \in K$, so ist $b = 0$.
   (viii) Gilt für ein $b \in K$, dass $a \cdot b = a$ ist für alle $a \in K$, so ist $b = 1$.
   (ix) Ist $a \cdot b = 0$ mit $a, b \in K$, dann ist $a = 0$ oder $b = 0$ (oder beides).
   (x) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$.

6. Bestimmen Sie samtliche Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems uber dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & =0 \\
 & x_2 & & +x_4 & +x_5 & & =1 \\
x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & =1 \\
 & x_2 & +x_3 & & +x_5 & & =0 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & +x_6 & =1
\end{array}$$

7. Beantworten Sie bitte die folgenden Fragen.

   (a) $\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

   Solution: Ja

   (b) Jeder Vektorraum hat mindestens ein Element.

   Solution: Ja

   (c) Es gibt einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum, der nur endlich viele Elemente hat.

Solution: Ja

(d) Jeder vom Nullvektorraum verschiedene $\mathbb{Q}$-Vektorraum hat unendlich viele Elemente.

Solution: Ja

(e) Es gibt einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der nur endlich viele Elemente hat.

Solution: Ja

(f) Uber einem endlichen Körper existiert ein endlicher Vektorraum mit mehr als einem Element.

Solution: Ja

(g) $\mathbb{Z}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Solution: Nein

(h) $\mathbb{Z}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Solution: Nein

(i) $\mathbb{Q}^3$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Solution: Nein

(j) Die leere Menge ist ein Vektorraum uber jedem Körper.

Solution: Nein

(k) Jeder Vektorraum uber einem endlichen Körper ist endlich.

Solution: Nein

8. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume in den jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen?

(a) $U := \left\{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$

Solution: Ja

(b) $U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) - f(1) = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

(c) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = f(1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

(d) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist beschränkt} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

(e) $U := \left\{ (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$

Solution: Ja

(f) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = 0 \text{ fur alle } x \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

(g) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton fallend} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Nein

(h) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) > 0 \text{ fur alle } x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Nein

(i) $U := \left\{ (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$

Solution: Nein

(j) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton wachsend} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Nein

(k) $U := \left\{ (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$

Solution: Nein

(l) $U := \left\{ (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11}^2 - a_{22}^2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$

Solution: Nein

(m) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Nein

(n) $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq 17 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Nein

9. Sei V ein Vektorraum und $U, W \leq V$. Wir definieren $U - W$ als $U - W = \{u - w \mid u \in U, w \in W\}$. Dann gilt im Allgemeinen:

   (a) $U - W = U + W$.

   Solution: Ja

   (b) Aus $u \notin U$ und $u + u' \in U$ folgt $u' \notin U$.

   Solution: Ja

   (c) $U + W = U - W$.

   Solution: Ja

   (d) $U \cap W \leq V$.

   Solution: Ja

   (e) Aus $u \in U$ und $u + u' \notin U$ folgt $u' \notin U$.

   Solution: Ja

   (f) $U - W = \emptyset$.

   Solution: Nein

   (g) $U \cup W \leq V$.

   Solution: Nein

   (h) Aus $u, u' \notin U$ folgt $u + u' \in U$.

   Solution: Nein

   (i) $U - W = U \backslash W$.

   Solution: Nein

   (j) Aus $u, u' \notin U$ folgt $u + u' \notin U$.

   Solution: Nein

   (k) $U \backslash W \leq V$.

Solution: Nein

(l) $U \backslash W \leq U$.

Solution: Nein

(m) $U - W \leq U$.

Solution: Nein

10. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Jedes Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ besitzt unendlich viele Elemente.

Solution: Ja

(b) Ist M ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V, und ist $v \in V$, dann ist auch $M \cup \{v\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Solution: Ja

(c) Jedes Element aus $\mathbb{R}^2$ liegt im Erzeugnis von v_1 und v_2.

Solution: Ja

(d) Die leere Menge erzeugt den Nullvektorraum.

Solution: Ja

(e) Das Element v_3 liegt in $\langle v_1 \rangle$

Solution: Ja

(f) Das Element v_4 liegt im Erzeugnis von v_1 und v_2.

Solution: Ja

(g) Das Element v_3 ist eine Linearkombination von $\{v_1\}$

Solution: Ja

(h) Ist M ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V, und ist $v \in M$, dann ist auch $M \setminus \{v\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Solution: Nein

(i) Der Nullvektorraum besitzt kein Erzeugendensystem.

Solution: Nein

(j) Das Element v_4 liegt im Erzeugnis von v_1 und v_3.

Solution: Nein

(k) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem.

Solution: Nein

(l) Das Element v_3 liegt in $\langle v_2 \rangle$.

Solution: Nein

(m) $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_3 \rangle$.

Solution: Nein

(n) Das Element v_3 ist eine Linearkombination von $\{v_2\}$.

Solution: Nein

11. Bestimmen Sie alle Unterraume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$.

12. (a) Sei V ein Vektorraum und seien $U_1, U_2 \leq V$. Zeigen Sie, dass

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$$

der kleinste Unterraum von V ist, der U_1 und U_2 enthalt.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Gegeben seien $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ und $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) U und W sind Unterraume von V.

(ii) $U + W = V$.

13. Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum und sei $X \subsetneq Y \subseteq V$. Dann gilt im Allgemeinen:

(a) Wenn X linear unabhangig ist und Y ein Erzeugendensystem von V, dann existiert eine Basis X' von V mit $X \subseteq X' \subseteq Y$.

Solution: Ja

(b) Ist X linear abhängig, so ist auch Y linear abhängig.

Solution: Ja

(c) Ist X ein Erzeugendensystem von V, so ist auch Y ein Erzeugendensystem von V.

Solution: Ja

(d) Ist Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.

Solution: Ja

(e) Wenn Y ein Erzeugendensystem von V ist, dann existiert eine Basis X' von V mit $X \subseteq X' \subseteq Y$.

Solution: Nein

(f) Ist X eine Basis von V, so ist auch Y eine Basis von V.

Solution: Nein

(g) Ist Y linear abhängig, so ist auch X linear abhängig.

Solution: Nein

(h) Ist X linear unabhängig, so ist auch Y linear unabhängig.

Solution: Nein

(i) Ist Y eine Basis von V, so ist auch X eine Basis von V.

Solution: Nein

(j) Ist Y ein Erzeugendensystem von V, so ist auch X ein Erzeugendensystem von V.

Solution: Nein

14. Sind die folgenden Teilmengen der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume linear unabhängig?

(a) $\{g\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $g(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $f_i(i) = 1$ für $i \in \mathbb{N}$ und $f_i(n) = 0$ für $i, n \in \mathbb{N}$, $i \neq n$.

Solution: Ja

(b) $\{x \mapsto \cos(3x), x \mapsto x^4, x \mapsto \sin(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

(c) $\{(-1, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$

Solution: Ja

(d) $\{x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(5x), x \mapsto \sin(7x)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

(e) $\{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$

Solution: Nein

(f) $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (-3, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$

Solution: Nein

(g) $\{1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$

Solution: Nein

(h) $\{1, \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$

Solution: Nein

(i) $\{(2, 2, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 3)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$

Solution: Nein

15. Es gilt:

(a) Jede Basis von $\mathbb{F}_5^3$ hat genau 3 Elemente.

Solution: Ja

(b) Jede Basis des $\mathbb{R}^{1\times 3}$ enthalt einen Vektor (a, b, c) mit $c \neq 0$.

Solution: Ja

(c) Die Menge $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{F}_3^{1\times 3}$.

Solution: Ja

(d) Jede Basis des $\mathbb{R}^{1\times 3}$ enthalt einen Vektor (a,b,c) mit $b \neq 0$.

Solution: Ja

(e) Jeder Vektor der Form $(x, x-1)$ kann zu einer Basis von $\mathbb{R}^{1\times 2}$ ergänzt werden.

Solution: Ja

(f) Jede Basis des $\mathbb{R}^{1\times 3}$ enthalt einen Vektor (a,b,c) mit $a \neq 0$.

Solution: Ja

(g) Jede Basis von $\mathbb{F}_5^3$ hat genau 5 Elemente.

Solution: Nein

(h) Die Menge $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{F}_2^{1\times 3}$.

Solution: Nein

(i) Jeder Vektor der Form (x, x) kann zu einer Basis von $\mathbb{R}^{1\times 2}$ ergänzt werden.

Solution: Nein

(j) Jede Basis des $\mathbb{R}^{1\times 3}$ besteht aus Vektoren der Form (x,x,x).

Solution: Nein

(k) Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^{1\times 3}$ aus Vektoren der Form $(x,x,x+1)$.

Solution: Nein

16. Im Folgenden bezeichne V einen Vektorraum.

(a) Eine Basis von V ist eine maximale linear unabhangige Teilmenge.

Solution: Ja

(b) Eine Basis von V ist ein minimales Erzeugendensystem.

Solution: Ja

(c) Der Nullvektor ist in keiner Basis von V enthalten.

Solution: Ja

(d) Jede Basis von V ist linear unabhangig.

Solution: Ja

(e) Die leere Menge ist eine Basis des Nullraums.

Solution: Ja

(f) Der Nullraum ist endlich erzeugt.

Solution: Ja

(g) Wenn eine Basis von V endlich ist, so sind alle Basen von V endlich.

Solution: Ja

(h) Jede Basis von V ist ein Erzeugendensystem von V.

Solution: Ja

(i) Ist $v \in V$ nicht der Nullvektor, dann ist v in einer Basis von V enthalten.

Solution: Ja

(j) Wenn V eine endliche Basis hat, dann sind alle Erzeugendensysteme von V endlich.

Solution: Nein

(k) Eine Basis von V ist ein linear abhangiges Erzeugendensystem.

Solution: Nein

(l) Der Nullraum besitzt keine Basis.

Solution: Nein

(m) Eine Basis von V ist ein maximales Erzeugendensystem.

Solution: Nein

(n) Jeder Vektor von V ist in einer Basis von V enthalten.

Solution: Nein

17. Untersuchen Sie die Menge $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ auf lineare Unabhangigkeit, wobei $f_i \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definiert ist durch:

$$f_i(n) = \begin{cases} n & \text{fur } n \leq i \\ 0 & \text{fur } n > i \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(Diese Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.)

18. Geben Sie eine unendliche Teilmenge Y des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ an, so dass jede zweielementige Teilmenge von Y linear unabhangig ist. (Diese Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.)

19. Es sei $V := \mathbb{R}^{1\times 4}$.

 (a) Sei $X := \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,1),(0,0,0,1),(1,0,1,1)\}$. Zeigen Sie, dass X ein Erzeugendensystem fur V ist.
 (b) Sei $Y := \{(1,0,0,0),(1,1,1,0)\}$. Zeigen Sie: Y ist linear unabhangig.
 (c) Geben Sie eine Teilmenge $X' \subseteq X$ an, so dass $Y \cup X'$ eine Basis von V ist.

 (Diese Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.)

20. Es seien A und B Matrizen über einem Körper K, so dass AB definiert ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

 (a) Es gilt $AB^t = (BA^t)^t$, falls die rechte Seite definiert ist.

 Solution: Ja

 (b) Sind A und B in $GL_n(K)$, dann gilt $(A^tB^t)(A^{-1}B^{-1})^tB = B$.

 Solution: Ja

 (c) Die Zeilen von AB sind Linearkombinationen der Zeilen von B.

 Solution: Ja

 (d) Sind A und B in $GL_n(K)$, dann gilt $A(A^tB^t)(A^{-1}B^{-1})^t = A$.

 Solution: Ja

 (e) Es gilt $A^tB = (B^tA)^t$, falls die linke Seite definiert ist.

 Solution: Ja

(f) Die Spalten von AB sind Linearkombinationen der Spalten von A.

Solution: Ja

(g) Jede Zeile von AB liegt im Zeilenraum von B.

Solution: Ja

(h) Jede Spalte von AB liegt im Spaltenraum von A.

Solution: Ja

(i) Die Spalten von AB sind Linearkombinationen der Spalten von B.

Solution: Nein

(j) Die Zeilen von AB sind Linearkombinationen der Zeilen von A.

Solution: Nein

21. Alle vorkommenden Matrizen haben Einträge in einem Körper K. Sind die folgenden Aussagen wahr?

(a) Der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Spaltenraums.

Solution: Ja

(b) Elementare Umformungen andern den Rang einer Matrix nicht.

Solution: Ja

(c) Für $0 \neq c \in K$ und eine Matrix A haben A und cA den gleichen Rang.

Solution: Ja

(d) Lasst sich eine $(n \times n)$-Matrix durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix überführen, dann hat sie vollen Rang (d.h. Rang n).

Solution: Ja

(e) Eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix hat den Rang n.

Solution: Ja

(f) Eine $(n \times n)$-Matrix mit vollem Rang (d.h. Rang n) läßt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix überführen.

Solution: Ja

(g) Hat eine $(n \times n)$-Matrix den Rang n, dann ist sie invertierbar.

Solution: Ja

(h) Der Zeilenraum und der Spaltenraum einer Matrix haben die gleiche Dimension.

Solution: Ja

(i) Der Rang einer Matrix ist gleich der Dimension ihres Zeilenraums.

Solution: Ja

(j) Hat eine $(n \times n)$-Matrix einen Rang kleiner als n, dann ist sie nicht invertierbar.

Solution: Ja

(k) Elementare Umformungen konnen den Rang einer Matrix andern.

Solution: Nein

(l) Für $c \in K$ und eine Matrix A haben A und cA den gleichen Rang.

Solution: Nein

22. Es seien die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -39 \\ 2 & -5 & 1 & -8 \\ -3 & 5 & -5 & -32 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie jeweils den Rang der angegebenen Matrix.

(a) $BA - C$

Solution: 1

(b) $C^t - A^t B^t$

Solution: 1

(c) $B^t C$

Solution: 2

(d) $BA + C$

Solution: 3

(e) $AC^t + B^t$

Solution: 3

(f) $C^tB + A$

Solution: 4

(g) AA^t

Solution: 4

23. Mit E_n sei jeweils die $(n \times n)$-Einheitsmatrix bezeichnet, Sind die folgenden Aussagen über Matrizen uber einem Körper K richtig?

(a) Ist $A \in K^{m\times n}$ mit $\text{rang}(A) = 0$, dann ist A die Nullmatrix.

Solution: Ja

(b) Ist $A \in K^{m\times n}$ nicht die Nullmatrix, dann ist $\text{rang}(A) > 0$.

Solution: Ja

(c) Ist $A \in K^{l\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$, dann gilt $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$.

Solution: Ja

(d) Ist $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ und gilt $ABA = A$, so ist $AB = E_m$.

Solution: Nein

(e) Ist $A \in K^{l\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$, dann gilt $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$.

Solution: Nein

(f) Ist $A \in K^{2\times 2}$ mit $A^2 = E_2$, so ist $A = \pm E_2$.

Solution: Nein

(g) Ist $A \in K^{2\times 2}$ mit $A^2 = 0$, so ist $A = 0$.

Solution: Nein

(h) Ist $A \in K^{l\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$, dann gilt $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

Solution: Nein

(i) Ist $A \in K^{l\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$, dann gilt $\operatorname{rang}(AB) \geq \operatorname{rang}(A)$.

Solution: Nein

(j) Ist $A \in K^{l\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$, dann gilt $\operatorname{rang}(AB) \geq \operatorname{rang}(B)$.

Solution: Nein

(k) Ist $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ und gilt $ABA = A$, so ist $BA = E_n$.

Solution: Nein

24. (a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ invertierbar ist, und berechnen Sie ihr Inverses.
(b) Berechnen Sie mittels elementarer Zeilenumformungen eine Matrix $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ -5 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

25. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ heist *untere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ fur alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt.
(a) Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei unteren Dreiecksmatrizen aus $K^{n\times n}$ wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.
(b) Zeigen Sie, dass eine untere Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonalelemente $a_{ii} \neq 0$ sind.
(c) Zeigen Sie, dass

$$T_n(K) := \{A = (a_{ij}) \in K^{n\times n} \mid a_{ij} = 0, \text{ falls } i < j, \text{ und } a_{ii} \neq 0 \text{ fur alle } i\}$$

mit der ublichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Bestimmen Sie fur den Fall, dass K ein endlicher Körper mit q Elementen ist, die Anzahl der Elemente von $T_n(K)$.

26. Es sei

$$(A, b) := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ a & -1 & 3 & 12 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

die erweiterte Matrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ und $\frac{13}{5} \neq a \in \mathbb{Q}$. Lösen Sie das Gleichungssystem und beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Wenn $a = 4$ ist, was ist dann das Siebenfache des ersten Eintrags der Lösung?

Solution: -24

(b) Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

Solution: -4

(c) Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

Solution: -8

(d) Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

Solution: 0

(e) Wenn $a = 4$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

Solution: 12

(f) Wenn $a = 3$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

Solution: 24

(g) Wenn $a = 3$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

Solution: 24

(h) Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

Solution: 3

(i) Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der erste Eintrag der Lösung?

Solution: 3

(j) Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der erste Eintrag der Lösung?

Solution: 8

27. Sei LGS das lineare Gleichungssytem über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array}$$

(a) Die x_i sind die Unbekannten des LGS.

Solution: Ja

(b) Die Koeffizienten des LGS sind die a_{ij}.

Solution: Ja

(c) Hat das LGS mehr als eine Lösung, dann hat es unendlich viele Lösungen.

Solution: Ja

(d) Ist $b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$, dann hat das LGS eine Lösung.

Solution: Ja

(e) Hat das LGS genau eine Lösung, dann ist $m \geq n$.

Solution: Ja

(f) Ist $m < n$ und $b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$, dann hat das LGS unendlich viele Lösungen.

Solution: Ja

(g) Der Nullvektor ist stets eine Lösung des LGS.

Solution: Nein

(h) Hat das LGS unendlich viele Lösungen, dann ist $m < n$.

Solution: Nein

(i) Die Koeffizienten des LGS sind die x_i.

Solution: Nein

(j) Hat das LGS genau eine Lösung, dann ist $m = n$.

Solution: Nein

(k) Ist $m = n$, dann hat das LGS genau eine Lösung.

Solution: Nein

(l) Hat das LGS keine Lösung, dann ist $m > n$.

Solution: Nein

(m) Wenn $m > n$ ist, dann hat das LGS keine Lösung.

Solution: Nein

28. Im Folgenden seien $A, B \in K^{n \times n}$ quadratische Matrizen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Ist A nicht invertierbar, dann besitzt das homogene LGS $Ax = 0$ mehr als eine Lösung.

Solution: Ja

(b) Besitzt die reduzierte Zeilenstufenform von A eine Nullzeile, dann ist A nicht invertierbar.

Solution: Ja

(c) Ist $\text{rang}(A) < n$, dann besitzt das homogene LGS $Ax = 0$ mehr als eine Lösung.

Solution: Ja

(d) Ist $b \in K^n$, so dass das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar ist, dann ist A invertierbar.

Solution: Ja

(e) Ist $AB = E_n$, so ist B invertierbar.

Solution: Ja

(f) Besitzt die reduzierte Zeilenstufenform von A keine Nullzeile, dann ist A invertierbar.

Solution: Ja

(g) Ist A invertierbar, dann besitzt das homogene LGS $Ax = 0$ nur die triviale Lösung.

Solution: Ja

(h) Besitzt das homogene LGS $Ax = 0$ nur die triviale Lösung, dann ist A invertierbar.

Solution: Ja

(i) Ist $AB = E_n$, so ist A invertierbar.

Solution: Ja

(j) Ist die reduzierte Zeilenstufenform von A gleich E_n, dann ist A invertierbar.

Solution: Ja

(k) Ist A invertierbar, dann besitzt das LGS $Ax = b$ fur eine beliebige rechte Seite $b \in K^n$ genau eine Lösung.

Solution: Ja

29. Die Koeffizienten der Matrizen in den folgenden Aufgaben seien alle aus $\mathbb{R}$.

(a) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf eine reduzierte Zeilenstufenform mit einer Nullzeile bringen.

Solution: Ja

(b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in reduzierter Zeilenstufenform.

Solution: Ja

(c) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.

Solution: Ja

(d) Sei A eine $(m \times n)$-Matrix. Dann existiert eine invertierbare $(m \times m)$-Matrix Z, so dass ZA in reduzierter Zeilenstufenform ist.

Solution: Ja

(e) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf eine reduzierte Zeilenstufenform mit zwei Nullzeilen bringen.

Solution: Nein

(f) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in reduzierter Zeilenstufenform.

Solution: Nein

(g) Sei A eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform und habe A weniger Zeilen als Spalten. Dann kann A keine Nullzeile haben.

Solution: Nein

(h) Sei A eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform und habe A eine Nullzeile. Dann hat das durch A beschriebene homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Solution: Nein

(i) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.

Solution: Nein

(j) Sei A eine $(m \times n)$-Matrix. Dann existiert eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix S, so dass AS in reduzierter Zeilenstufenform ist.

Solution: Nein

30. (a) Bringen Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 5}$ durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform und bestimmen Sie ihren Nullraum.

(b) Fur welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & (3-a)x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & (a+2)x_3 & = & 4 \end{array}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen in $\mathbb{Q}^3$? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

31. Gegeben seien die Matrizen A, B, C uber $\mathbb{R}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AXB = C$.

32. Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W **linear** ist.

(a) $K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^2$

Solution: Ja

(b) $K := \mathbb{R}$, $V := K^{3\times 2}$, $W := K^{1\times 2}$, $\varphi : M \mapsto (3, 2, 1) \cdot M$

Solution: Ja

(c) $K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^3$

Solution: Ja

(d) $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f - f$

Solution: Ja

(e) $K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi : M \mapsto (1, 2) \cdot M$

Solution: Ja

(f) $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f + f$

Solution: Ja

(g) $K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 3x$

Solution: Ja

(h) $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$

Solution: Ja

(i) $K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 2x + 1$

Solution: Nein

(j) $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$

Solution: Nein

33. Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ

Solution: Ja

(b) Kern $\varphi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$

Solution: Ja

(c) Bild $\varphi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$

Solution: Nein

(d) Bild $\psi \subseteq$ Bild $(\psi \circ \varphi)$

Solution: Nein

(e) Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ

Solution: Nein

(f) Bild $(\psi \circ \varphi) =$ Kern $(\varphi \circ \psi)$

Solution: Nein

(g) Kern $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ

Solution: Nein

(h) Kern $(\psi \circ \varphi) =$ Bild $(\varphi \circ \psi)$

Solution: Nein

(i) Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ

Solution: Nein

(j) Kern $\psi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$

Solution: Nein

34. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$ mit $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, -3, 1)$ und $v_3 = (1, 1, -1)$.

Weiter seien die folgenden funf Vektoren aus $\mathbb{R}^{1\times 3}$ gegeben. $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1)$, $w_4 = (2, 1, -1)$ und $w_5 = (-1, 1, 1)$. Mit $\kappa_{\mathcal{B}}(w_i)$ sei der Koordinatenvektor von w_i bezuglich der Basis $\mathcal{B}$ bezeichnet, $i = 1, \ldots, 5$.

(a) Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_1)$ lautet

Solution: -1

(b) Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_1)$ lautet

Solution: -1

(c) Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_2)$ lautet

Solution: -1

(d) Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_2)$ lautet

Solution: -1

(e) Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_3)$ lautet

Solution: -2

(f) Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_5)$ lautet

Solution: -2

(g) Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_3)$ lautet

Solution: -3

(h) Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_5)$ lautet

Solution: -3

(i) Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_4)$ lautet

Solution: 0

(j) Der erste Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_2)$ lautet

Solution: 1

(k) Der erste Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_4)$ lautet

Solution: 2

(l) Der erste Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_1)$ lautet

Solution: 2

(m) Der erste Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_5)$ lautet

Solution: 2

(n) Der erste Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_3)$ lautet

Solution: 3

35. Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×3-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung:

$$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M \cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}.$$

Weiter seien die geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von V und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

von W gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ von φ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.

(a) Der Eintrag in der 4. Zeile und der 4. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet

Solution: -1

(b) Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

(c) Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

(d) Der Eintrag in der 2. Zeile und der 5. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

(e) Der Eintrag in der 4. Zeile und der 2. Spalte von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

(f) Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: -3

(g) Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: 0

(h) Der Eintrag in der 1. Zeile und der 1. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: 1

(i) Der Eintrag in der 3. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: 2

(j) Der Eintrag in der 1. Zeile und der 3. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: 3

36. (1) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(X) = AXA$ für alle $X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

(b) Geben Sie je eine Basis von Kern(φ) und Bild(φ) an.

(c) Ergänzen Sie eine Basis von Kern(φ) zu einer Basis von V.

(2) Gegeben seien die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\varphi(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ gibt, und bestimmen Sie $\varphi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$.

37. Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert eine lineare Abbildung $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi_t : \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4-t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2t+7 \end{pmatrix}? \end{cases}$$

Bestimmen Sie für diese t die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi_t)$ bezüglich der geordneten Standardbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$.

38. Es seien V, W und U Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen. Sind die folgenden Aussagen richtig? (Wir nennen für $v_1, v_2 \in V$ das Tupel (v_1, v_2) linear abhängig, wenn $v_1 = v_2$ oder $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig ist.)

(a) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ und $\psi(\varphi(v_1)) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.

Solution: Ja

(b) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.

Solution: Ja

(c) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.

Solution: Nein

(d) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.

Solution: Nein

(e) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear unabhängig.

Solution: Nein

(f) Sind v_1 und v_2 Elemente von V mit $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$ und gilt $\psi(\varphi(v_1)) \neq \psi(\varphi(v_2))$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.

Solution: Nein

(g) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, dann ist (v_1, v_2) in V linear unabhängig.

Solution: Nein

(h) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ und $\psi(\varphi(v_1)) \neq 0$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.

Solution: Nein

(i) Sind $v_1 \neq v_2$ Elemente von V und gilt $\psi(\varphi(v_1)) = \psi(\varphi(v_2)) \neq 0$, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$ in W linear abhängig.

Solution: Nein

(j) Sind v_1 und v_2 Elemente von V mit $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$ und gilt $\psi(\varphi(v_1)) \neq \psi(\varphi(v_2))$, dann ist (v_1, v_2) in V linear abhängig.

Solution: Nein

39. Es sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^{m \times 1}$. Sind die folgenden Aussagen über das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ richtig?

(a) Falls $m = n$ ist und es ein $c \in K^{m \times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.

Solution: Ja

(b) Für $c = 0$ und $n > m$ hat $Ax = c$ mindestens $n - m$ Lösungen.

Solution: Ja

(c) $Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\operatorname{rang}(A) + 1 = \operatorname{rang}(A, b)$ ist.

Solution: Ja

(d) $Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A, b) - 1$ ist.

Solution: Ja

(e) Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann gibt es $c \in K^{m \times 1}$, so dass $Ax = c$ unlösbar ist.

Solution: Ja

(f) Für $c \in K^{m\times 1}$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.

Solution: Nein

(g) Für $c = 0$ hat $Ax = c$ mindestens $|n - m|$ (Absolutbetrag) Lösungen.

Solution: Nein

(h) Für $0 \neq c \in K^{m\times 1}$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.

Solution: Nein

(i) Wenn es ein $c \in K^{m\times 1}$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.

Solution: Nein

(j) Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann ist $Ax = c$ für alle $c \in K^{m\times 1}$ unlösbar.

Solution: Nein

40. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen.

(a) K^3 für $q = 5$.

Solution: 125

(b) Die Menge der nicht-invertierbaren Matrizen in $K^{2\times 2}$ für $q = 5$.

Solution: 145

(c) K^2 für $q = 13$.

Solution: 169

(d) Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 13$.

Solution: 169

(e) Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{3\times 2}$ vom Rang 1 ist und $q = 2$.

Solution: 2

(f) Die Menge der K-linearen Abbildungen von K^2 nach K für $q = 17$.

Solution: 289

(g) Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wobei $A \in K^{2\times 3}$ vom Rang 2 ist und $q = 3$.

Solution: 3

(h) Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^3 für $q = 5$.

Solution: 31

(i) Die Menge der nicht-invertierbaren Matrizen in $K^{2\times 2}$ für $q = 3$.

Solution: 33

(j) Die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von K^4 für $q = 3$.

Solution: 40

41. Es sei K ein Körper. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ mit $\varphi(1, -1, 0) = (1, 1)$ und $\varphi(0, 1, -1) = (0, 1)$ und $\varphi(1, 0, -1) = (1, 2)$?

Solution: Ja

(b) Es sei $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\} \subseteq K^{1\times n}$. Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \to K^{n-1}$?

Solution: Ja

(c) Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, die nicht $\mathbb{F}_2$-linear ist?

Solution: Ja

(d) Es sei $\varphi : K^3 \to K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \to K^3$, so dass $\varphi \circ \psi$ ein Isomorphismus ist?

Solution: Ja

(e) Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$, die nicht $\mathbb{F}_3$-linear ist?

Solution: Ja

(f) Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2\times 3} \to K^{3\times 2}$?

Solution: Ja

(g) Es sei $\varphi : K^3 \to K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \to K^3$, so dass $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist?

Solution: Nein

(h) Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2\times 3} \to K^{2\times 2}$?

Solution: Nein

(i) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ mit $\varphi(1, -1, 0) = (1, 2)$ und $\varphi(0, 1, -1) = (0, 1)$ und $\varphi(1, 0, -1) = (1, 1)$?

Solution: Nein

(j) Es sei $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^{1\times n} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\} \subseteq K^{1\times n}$. Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \to K^{1\times n}$?

Solution: Nein

42. Es sei

$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{ es gibt } a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{R} \text{ und } f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

und $\varphi : V \to V$ sei definiert durch

$$\varphi(f)(x) = f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x + 1).$$

(a) Zeigen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist und dass φ linear ist.

(b) Berechnen Sie die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezuglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von Kern φ.

(d) Sei $g \in V$ mit $g(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 1$. Berechnen Sie $\varphi^{-1}(\{g\})$.

43. Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum uber K mit $\dim V = n < \infty$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ linear mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Man zeige:

(a) Es gilt Kern $(\varphi) \cap$ Bild $(\varphi) = \{0\}$.

(b) Es gilt Kern $(\varphi) +$ Bild $(\varphi) = V$.

(c) Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

44. Es sei R ein kommutativer Ring und n eine naturliche Zahl. Die $(n \times n)$-Einheitsmatrix wird (wie ublich) mit E_n bezeichnet. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?

(a) Ist $A \in R^{n\times n}$ invertierbar, dann ist det A invertierbar und es gilt det $(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Solution: Ja

(b) Ist $A \in R^{n\times n}$ mit $A^m = E_n$ fur ein $m \in \mathbb{N}$, dann ist $(\det A)^m = 1$.

Solution: Ja

(c) Zu jedem $r \in R$ existiert eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ mit det $A = r - 1$.

Solution: Ja

(d) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^2 = E_n$, dann ist det $A = \pm 1$.

Solution: Ja

(e) Zu jedem $r \in R$ existiert eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ mit det $A = r$.

Solution: Ja

(f) Fur $A \in R^{n\times n}$ ist det $A^t =$ det A.

Solution: Ja

(g) Fur $A \in R^{n\times n}$ ist det $(AA^t) = (\det A)^2$.

Solution: Ja

(h) Ist $A \in R^{n\times n}$ invertierbar, dann ist det $(A^{-1}) =$ det A.

Solution: Nein

(i) Ist $A \in R^{n\times n}$ mit $A^m = -E_n$ fur ein $m \in \mathbb{N}$, dann ist $(\det A)^m = 1$.

Solution: Nein

(j) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 = E_n$, dann ist det $A = 1$.

Solution: Nein

45. Es sei K ein Körper, n eine naturliche Zahl und $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?

(a) Entsteht A' aus A durch Addition eines Vielfachen einer Spalte von A auf eine andere Spalte von A, dann ist det $(A') =$ det A.

Solution: Ja

(b) Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier Zeilen, dann ist det $(A') = -$det A.

Solution: Ja

(c) Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier Spalten, dann ist det $(A') = -$det A.

Solution: Ja

(d) Ist eine Zeile von A die Nullzeile, dann ist det $A = 0$.

Solution: Ja

(e) Ist eine Spalte von A die Nullspalte, dann ist det $A = 0$.

Solution: Ja

(f) Entsteht A' aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile von A auf eine andere Zeile von A, dann ist det $(A') =$ det A.

Solution: Ja

(g) Sind zwei (verschiedene) Zeilen von A linear abhangig, dann ist det $A = 0$.

Solution: Ja

(h) Fur $x \in K$ ist det $(xA) = x^n \cdot$ det A.

Solution: Ja

(i) Sind zwei (verschiedene) Spalten von A linear abhangig, dann ist det $A = 0$.

Solution: Ja

(j) Fur $x \in K$ ist det $(xA) = x \cdot$ det A.

Solution: Nein

(k) Ist det $A = 0$, dann besitzt A eine Nullzeile.

Solution: Nein

(l) Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier Zeilen, dann ist det $(A') =$ det A.

Solution: Nein

(m) Entsteht A' aus A durch Vertauschen zweier Spalten, dann ist det $(A') =$ det A.

Solution: Nein

46. Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?

(a) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

Solution: Ja

(b) Sei $K = \mathbb{R}$ und $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ fur alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist det $A \in \mathbb{Q}$.

Solution: Ja

(c) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ fur alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist det $A \in \mathbb{Z}$.

Solution: Ja

(d) Es gilt (det A) $\cdot$ (det B) $=$ det$(A \cdot B)$.

Solution: Ja

(e) $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ab - bc$

Solution: Nein

(f) det $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = bc - ad.$

Solution: Nein

(g) Sei $K = \mathbb{R}$ und $a_{ij} > 0$ fur alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist det $A \geq 0$.

Solution: Nein

(h) Enthalt A nur die Eintrage 0 und 1, dann ist die Determinante von A in der Menge $\{0, 1, -1\}$.

Solution: Nein

(i) Es gilt (det A) + (det B) = det$(A + B)$.

Solution: Nein

(j) Enthalt A nur die Eintrage 0 und 1, dann ist die Determinante von A auch entweder 0 oder 1.

Solution: Nein

(k) Sei $K = \mathbb{R}$ und $a_{ij} < 0$ fur alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist det $A \leq 0$.

Solution: Nein

47. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$.

(a) $\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{Z}$ beliebig

Solution: -1

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solution: -16

(c) $\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{Z}$ beliebig

Solution: -2

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: -44

(e) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

Solution: 31

(f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 10 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: 44

(g) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: 48

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: 6

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: 7

(j) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: 9

48. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times3}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ -2 & -3 & 7 & 0 \\ 6 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \pi^2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2t^2 & -3 & -t \\ t & t & t^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} t^3 & 7 & t \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & \frac{-2}{t^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fur welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ bzw. $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind B bzw. C invertierbar?

49. Es sei K ein Körper. Berechnen Sie fur $n \geq 2$ und $x, a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -1 & x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

(Hinweis: Sie durfen hier schon benutzen, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Diagonaleintrage ist, und dass $\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(B) \cdot \det(D)$ fur quadratische Blockmatrizen B, D gilt. Das wird am Dienstag vor Abgabeschluss in der Vorlesung bewiesen.)

50. Es sei R ein kommutativer Ring, n eine naturliche Zahl und E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix uber R. Fur $A \in R^{n \times n}$ sei $\tilde{A}$ die Adjunkte von A. Sind die folgenden Aussagen richtig?

(a) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $\det A = -6$. Dann existiert $B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $AB = E_n$ und $6B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

Solution: Ja

(b) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $\det A = 7$. Dann existiert $B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $AB = E_n$ und $7B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

Solution: Ja

(c) Ist $A \in R^{n \times n}$ invertierbar, dann ist $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$.

Solution: Ja

(d) Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$. Dann existiert $B \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mit $AB = E_n$.

Solution: Ja

(e) Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \in \{-1, 1\}$ ist.

Solution: Ja

(f) Eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\tilde{A}A \neq 0$ ist.

Solution: Ja

(g) Es sei $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$. Dann existiert $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $AB = E_n$.

Solution: Nein

(h) Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A = 1$ ist.

Solution: Nein

(i) Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $A\tilde{A} \neq 0$ ist.

Solution: Nein

(j) Ist $A \in R^{n\times n}$ invertierbar, dann ist $\det \tilde{A} = \det A$.

Solution: Nein

51. Berechnen Sie jeweils für das angegebene Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ und die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Matrix $f(A)$ und geben Sie den geforderten Eintrag an.

(a) Was ist für $f = X^3+2X^2+3X+4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ der $(1,1)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: -4

(b) Was ist für $f = X^3 - 2X^2 - 14X + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 0

(c) Was ist für $f = X^3 - 2X^2 - 14X + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ der $(2,2)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 0

(d) Was ist für $f = X^{10} - X$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ der $(1,1)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 1022

(e) Was ist für $f = X^2 - 3X + 2$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ der $(2,1)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 14

(f) Was ist für $f = X^{10} - X$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ der $(2,2)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 2

(g) Was ist für $f = X \cdot (X-2)^2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 34

(h) Was ist für $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ der $(2,2)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 40

(i) Was ist für $f = X^2 - 3X + 2$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 49

(j) Was ist für $f = X \cdot (X-2)^2$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ der $(2,1)$-Eintrag von $f(A)$?

Solution: 51

52. Es sei K ein Körper, und $K[X]$ der Ring der Polynome uber K in der Unbestimmten X. Sind die folgenden Aussagen richtig?

(a) Es ist $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ fur alle $0 \neq f, g \in K[X]$.

Solution: Ja

(b) Die Einheiten von $K[X]$ sind genau die von 0 verschiedenen Polynome vom Grad 0.

Solution: Ja

(c) Es seien $f, g \in K[X]$. Dann sind f und g genau dann teilerfremd, wenn $u, v \in K[X]$ existieren mit $uf + vg = -1$.

Solution: Ja

(d) Die Einheiten von $K[X]$ sind genau die konstanten Polynome $\neq 0$.

Solution: Ja

(e) Ein Polynom aus $K[X]$ vom Grad 1 ist irreduzibel.

Solution: Ja

(f) Es seien $f, g \in K[X]$ mit f irreduzibel und $f \nmid g$. Dann sind f und g teilerfremd.

Solution: Ja

(g) Es seien $f, g \in K[X]$ irreduzibel. Sind f und g nicht teilerfremd, dann ist $f = g$.

Solution: Nein

(h) Es gilt $\deg(f+g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ fur alle $0 \neq f, g \in K[X]$.

Solution: Nein

(i) Es seien $f, g \in K[X]$. Dann sind f und g genau dann teilerfremd, wenn $u, v \in K[X]$ existieren mit $uf + vg = 0$.

Solution: Nein

(j) Ein Polynom aus $K[X]$ vom Grad 0 ist irreduzibel.

Solution: Nein

53. Sei $\{0\} \neq V$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sind die folgenden Aussagen wahr?

(a) Sei $K = \mathbb{R}$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine lineare Abbildung von V nach V mit Eigenwert a.

Solution: Ja

(b) Wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in V gibt mit $\varphi(-v) = av$, dann ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-a$.

Solution: Ja

(c) Eine Summe zweier Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert, die ungleich Null ist, ist ein Eigenvektor.

Solution: Ja

(d) Jede Linearkombination von zwei Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert, die ungleich Null ist, ist ein Eigenvektor.

Solution: Ja

(e) Der Nullvektor ist Eigenvektor von φ.

Solution: Nein

(f) Der Nullvektor ist genau dann Eigenvektor von φ, wenn φ die Nullabbildung ist.

Solution: Nein

(g) Ist 0 einziger Eigenwert von φ, so ist φ die Nullabbildung.

Solution: Nein

(h) Ist 1 einziger Eigenwert von φ, so ist φ die Identität.

Solution: Nein

(i) Wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in V gibt mit $\varphi(-v) = av$, dann ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a.

Solution: Nein

(j) Sei $K = \mathbb{R}$. Es gibt ein Element $a \in \mathbb{R}$, das nicht Eigenwert einer linearen Abbildung von V nach V ist.

Solution: Nein

54. Es seien $p, q \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p = X^5 + 3X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 3$ und $q = X^2 + X + 1$.

    (a) Dividieren Sie p mit Rest durch q.

    (b) Berechnen Sie $q(A)$ und $p(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

55. Es sei K ein Körper und $\mathrm{Pol}(K)$ die Menge der Polynomfunktionen, also

$$\mathrm{Pol}(K) := \left\{ f : K \to K, k \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und } a_i \in K \text{ für } 0 \leq i \leq n \right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Pol}(K)$ mit dem üblichen, punktweisen Produkt $(f \cdot g)(k) = f(k) \cdot g(k)$ für $f, g \in \mathrm{Pol}(K)$ und $k \in K$ ist eine K-Algebra.

(ii) Es existiert ein surjektiver K-Algebren-Homomorphismus $\alpha : K[X] \to \mathrm{Pol}(K)$.

(iii) Der Homomorphismus α ist genau dann bijektiv, wenn K unendlich viele Elemente enthält.

56. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und χ_φ sein charakteristisches Polynom. Außerdem sei $B \in K^{n\times n}$ und χ_B ihr charakteristisches Polynom. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Wenn φ nicht bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) = 0$.

Solution: Ja

(b) Wenn φ bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$.

Solution: Ja

(c) Falls die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = v$.

Solution: Ja

(d) Jedes normierte Polynom vom Grad n ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von V.

Solution: Ja

(e) Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat χ_B mindestens eine Nullstelle.

Solution: Ja

(f) Jedes Polynom vom Grad n ist charakteristisches Polynom eines Endomorphismus von V.

Solution: Nein

(g) Wenn für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_\varphi = \chi_A$, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$.

Solution: Nein

(h) Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat die Menge der Nullstellen von χ_B genau n Elemente.

> **Solution:** Nein

(i) Falls die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$.

> **Solution:** Nein

57. Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K. Sind die folgenden Aussagen über Diagonalisierbarkeit von Matrizen richtig?

(a) Jede quadratische Nullmatrix ist diagonalisierbar.

> **Solution:** Ja

(b) Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$, für die $0 \cdot A = A$ gilt, ist diagonalisierbar.

> **Solution:** Ja

(c) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ($n \geq 2$) ist genau dann diagonalisierbar, wenn ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von A mit $v_i \in K^{n \times 1}$ existiert, das linear unabhängig ist.

> **Solution:** Ja

(d) Jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Einträge alle gleich sind, ist diagonalisierbar.

> **Solution:** Ja

(e) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ und eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ existiert mit $TD = AT$.

> **Solution:** Ja

(f) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ($n \geq 2$) ist genau dann diagonalisierbar, wenn $K^{n \times 1}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat.

> **Solution:** Ja

(g) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n \times n}$ und eine Matrix $T \in K^{n \times n}$ existiert mit $TD = AT$.

> **Solution:** Nein

(h) Hat ein normiertes Polynom $f \in K[X]$, dessen Grad mindestens 2 ist, paarweise verschiedene Koeffizienten, dann ist seine Begleitmatrix diagonalisierbar.

Solution: Nein

(i) Jede Begleitmatrix eines Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad größer als 1 ist diagonalisierbar.

Solution: Nein

58. Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome über K gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?

(a) Das Minimalpolynom von A ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms.

Solution: Ja

(b) Ist $K = \mathbb{C}$ und $A^4 = E_n$, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

(c) Jedes normierte Polynom vom Grad größer oder gleich 1 ist charakteristisches Polynom einer Matrix.

Solution: Ja

(d) Ist $A^2 = A$, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

(e) Ist $A^2 \neq 0$ und sind A und A^2 linear abhängig, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

(f) Das charakteristische Polynom von A ist ein Teiler des Minimalpolynoms.

Solution: Nein

(g) Ist $A^2 = E_n$, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Nein

(h) Falls A und A^2 linear abhängig sind, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Nein

(i) Jedes Polynom ist charakteristisches Polynom einer Matrix.

Solution: Nein

59. Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome in $K[X]$ gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?

(a) Jedes normierte Polynom vom Grad größer oder gleich 1 ist Minimalpolynom einer Matrix.

Solution: Ja

(b) Ist $X^2 - X$ das Minimalpolynom von A, dann ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Solution: Ja

(c) Ist $X^2 - X$ das Minimalpolynom von A, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

(d) Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist $X - 1$.

Solution: Ja

(e) Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist X.

Solution: Ja

(f) Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist das konstante Polynom 1.

Solution: Nein

(g) Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist das Nullpolynom.

Solution: Nein

(h) Das Minimalpolynom einer Matrix zerfällt in Linearfaktoren.

Solution: Nein

(i) Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist gleich dem konstanten Polynom 1.

Solution: Nein

(j) Jedes Polynom ist Minimalpolynom einer Matrix.

Solution: Nein

60. Es sei A die folgende Matrix aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{9}{2} & 1 \\ 7 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(ii) Geben Sie Basen zu den Eigenraumen von A zu den Werten 0, 1 und 2 and.

(iii) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

61. Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie: Sind A und B trigonalisierbar, dann existiert eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, so dass $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ obere Dreiecksmatrizen sind.

Hinweise: Orientieren Sie sich am Beweis fur eine einzelne Matrix. Uberlegen Sie zuerst, dass es genugt zu zeigen, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen. Einen solchen finden Sie folgendermasen: Es sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a. Dann ist $E_a(A)$ invariant unter B, d.h. $Bw \in E_a(A)$ fur alle $w \in E_a(A)$.

62. Im Folgenden sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen. Ist $z = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann heist a der **Realteil** und b der **Imaginarteil** von z.

(a) Wie lautet der Realteil von $(3 + 4i)/(1 - 2i)$?

Solution: -1

(b) Was ist $(1/i)^{2010}$?

Solution: -1

(c) Wie lautet der Imaginarteil von $((1 + 2i)/5)^{-1}$?

Solution: -2

(d) Wie lautet der Imaginarteil von $(1 - 2i)(3 + i)$?

Solution: -5

(e) Wie lautet der Realteil von $((1 + 2i)/5)^{-1}$?

Solution: 1

(f) Was ist $(1/i)^{2000}$?

Solution: 1

(g) Wie lautet der Imaginarteil von $(3 + 4i)/(1 - 2i)$?

Solution: 2

(h) Wie lautet der Realteil von $\bar{z}$ fur $z = 3 - 4i$?

Solution: 3

(i) Wie lautet der Imaginarteil von $\bar{z}$ fur $z = 3 - 4i$?

Solution: 4

(j) Wie lautet der Realteil von $(1 - 2i)(3 + i)$?

Solution: 5

63. Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und es sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Es sei $\dim(V) = n$. Dann ist jede positiv definite $(n \times n)$-Matrix uber K die Grammatrix eines Skalarproduktes auf V.

Solution: Ja

(b) Ein Skalarprodukt ist eine positiv definite Sesquilinearform auf V.

Solution: Ja

(c) $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein unitärer Raum.

Solution: Ja

(d) Ist V endlich-dimensional, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und ist β eine Bilinearform auf V, so dass die Grammatrix $G_{\mathcal{B}}(\beta)$ symmetrisch ist, dann ist β symmetrisch.

Solution: Ja

(e) $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein euklidischer Raum.

Solution: Ja

(f) Ist V endlich-dimensional und $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V, dann ist $G_{\mathcal{B}}(\beta)$ symmetrisch fur jede symmetrische Bilinearform β auf V.

Solution: Ja

(g) Eine Sesquilinearform auf V ist ein Skalarprodukt auf V.

Solution: Nein

(h) Das Standardskalarprodukt ist das einzige Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Solution: Nein

(i) Es sei $\dim(V) = n$. Dann ist jede $(n \times n)$-Matrix uber K die Grammatrix eines Skalarproduktes auf V.

Solution: Nein

(j) Das Standardskalarprodukt ist das einzige Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Solution: Nein

64. Sei V ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von V. Die Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ sei durch $\beta(v,w) = 3a_1b_1 + 2a_2b_2 - a_3b_3 - 2a_4b_4 + a_1b_2 + 5a_1b_3 + 2a_2b_4 + 3a_3b_1 + 2a_3b_4$ fur $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4$ und $w = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3w_3 + b_4v_4$ in V definiert. Bestimmen Sie die Grammatrix $G := G_{\mathcal{B}}(\beta) = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von β bezuglich $\mathcal{B}$ und geben Sie die gefragten Werte an.

(a) Wie lautet der Eintrag g_{44} der Grammatrix G?

Solution: -2

(b) Was ist $\beta(v_2 - v_3, v_1 - 2v_4)$?

Solution: -3

(c) Was ist $\beta(v_2 + v_3, v_1 - 2v_4)$?

Solution: -5

(d) Wie lautet der Eintrag g_{14} der Grammatrix G?

Solution: 0

(e) Wie lautet der Eintrag g_{21} der Grammatrix G?

Solution: 0

(f) Was ist $\beta(v_1 + v_4, 2v_3 - v_4)$?

Solution: 12

(g) Wie lautet der Eintrag g_{24} der Grammatrix G?

Solution: 2

(h) Wie lautet der Eintrag g_{11} der Grammatrix G?

Solution: 3

(i) Wie lautet der Eintrag g_{31} der Grammatrix G?

Solution: 3

(j) Was ist $\beta(v_1 - v_4, 2v_3 - v_4)$?

Solution: 8

65. Sei $\langle\, ,\, \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Langen der folgenden Vektoren an.

(a) Sei $v = (12, -5)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 13

(b) Sei $v = (-15, 8)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 17

(c) Sei $v = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 2

(d) Sei $v = (0, 200)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 200

(e) Sei $v = (\sqrt{7}, -3)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 4

(f) Sei $v = (4, -3)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 5

(g) Sei $v = (3, 4)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 5

(h) Sei $v = (56, 0)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 56

(i) Sei $v = (\sqrt{11}, 5)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 6

(j) Sei $v = (-\sqrt{24}, 5)^t$. Wie lautet $||v||$?

Solution: 7

66. (a) Es bezeiche $\langle\, , \,\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass fur beliebige $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\langle u, Av\rangle = \langle A^t u, v\rangle.$$

(b) (Satz des Pythagoras) Es sei V ein K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass fur alle orthogonalen Vektoren $u, v \in V$ gilt:

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

67. Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein K-Vektorraum. Weiter sei $(\cdot, \cdot) : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $(v + w, v + w) + (v - w, v - w) = 2 \cdot ((v, v) + (w, w))$ für alle $v, w \in V$.

(ii) Ist $K = \mathbb{R}$, so gilt $(v, w) = \frac{1}{2}((v + w, v + w) - (v, v) - (w, w))$ für alle $v, w \in V$.

(iii) Ist $K = \mathbb{C}$, so gilt $(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \cdot \big(v + i^k \cdot w, v + i^k \cdot w\big)$ für alle $v, w \in V$.

(Hier ist $i \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit $i^2 = -1$.)

(iv) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, für die $(v_j, v_k) = \delta_{j,k}$ (Kronecker-Delta) für $1 \leq j, k \leq n$ gilt, dann ist:

$$v = \sum_{k=1}^{n} (v, v_k) \cdot v_k \qquad \text{für alle} \quad v \in V.$$

Bemerkung: Die Formel in (i) wird **Parallelogrammidentität** und die Formeln in (ii) und (iii) werden **Polarisationsidentität** genannt.

68. Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $A \in K^{n \times n}$. Mit A^t sei die zu A transponierte Matrix gemeint, und mit $\overline{A}$ diejenige Matrix, die aus A durch komponentenweise Anwendung der komplexen Konjugation entsteht. Weiter bezeichne E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix uber K. Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr?

(a) Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann heist A orthogonal, wenn $AA^t = E_n$ ist.

Solution: Ja

(b) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann heist A unitär, wenn $A\overline{A}^t = E_n$ ist.

Solution: Ja

(c) Es sei $K = \mathbb{R}$ und A orthogonal. Dann ist $\det(A) = \pm 1$.

Solution: Ja

(d) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann heist A hermitesch, wenn $A = \overline{A}^t$ ist.

Solution: Ja

(e) Es sei $K = \mathbb{R}$ und A symmetrisch. Dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

(f) Es sei $K = \mathbb{C}$ und A unitär. Dann ist $\det(A)\overline{\det(A)} = 1$.

Solution: Ja

(g) A heist symmetrisch, wenn $A = A^t$ ist.

Solution: Ja

(h) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann heist A hermitesch, wenn $A\overline{A}^t = E_n$ ist.

Solution: Nein

(i) Ist A symmetrisch, dann ist $AA^t = E_n$.

Solution: Nein

(j) Es sei $K = \mathbb{R}$ und A orthogonal. Dann ist $\det(A) = 1$.

Solution: Nein

(k) Es sei $K = \mathbb{C}$ und A unitär. Dann ist $\det(A) = 1$.

Solution: Nein

(l) Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann heist A orthogonal, wenn $A = A^t$ ist.

Solution: Nein

(m) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann heist A unitär, wenn $A = \overline{A}^t$ ist.

Solution: Nein

69. Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $A \in K^{n\times n}$. Fur eine Matrix B uber K bezeichne B^t die transponierte Matrix, und $\overline{B}$ diejenige Matrix, die aus B durch komponentenweise Anwendung der komplexen Konjugation entsteht. Weiter sei $\beta_A : K^n \times K^n \to K$, $(v, w) \mapsto v^t A\overline{w}$. Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr?

(a) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann ist β_A eine Sesqui-Linearform.

Solution: Ja

(b) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann ist β_A genau dann ein Skalarprodukt, wenn A positiv definit ist.

Solution: Ja

(c) Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist β_A genau dann ein Skalarprodukt, wenn A positiv definit ist.

Solution: Ja

(d) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann ist β_A genau dann hermitesch, wenn A hermitesch ist.

Solution: Ja

(e) Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist β_A genau dann symmetrisch, wenn A symmetrisch ist.

Solution: Ja

(f) Jedes Skalarprodukt auf K^n ist von der Form β_B fur eine geeignete positiv definite Matrix $B \in K^{n \times n}$.

Solution: Ja

(g) Ist A positiv definit, dann existiert eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von K^n mit $\beta_A(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, (Hierbei bezeichne δ_{ij} das Kronecker-Delta, d.h. $\delta_{ij} = 1$ fur $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$, sonst.)

Solution: Ja

(h) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann ist β_A ein Skalarprodukt.

Solution: Nein

70. Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\ ,\ )$ und Basis $\mathcal{B}$. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A \in K^{n \times n}$. Fur eine Matrix B uber K bezeichne B^t die transponierte Matrix, und $\overline{B}$ diejenige Matrix, die aus B durch komponentenweise Anwendung der komplexen Konjugation entsteht. Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr?

(a) Ist φ selbstadjungiert, dann exisitiert eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht.

Solution: Ja

(b) Es sei $K = \mathbb{C}$ und $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis. Dann ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ hermitesch ist.

Solution: Ja

(c) Es sei $K = \mathbb{C}$ und A hermitesch. Dann existiert eine unitäre Matrix $S \in K^{n \times n}$, so dass $\overline{S}^t AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Solution: Ja

(d) Ist $\overline{A}^t = A$, dann exisitiert eine Orthonormalbasis von K^n, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Solution: Ja

(e) Es sei $K = \mathbb{R}$ und A symmetrisch. Dann existiert eine orthogonale Matrix $S \in K^{n\times n}$, so dass S^tAS eine Diagonalmatrix ist.

Solution: Ja

(f) Es ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn $(v, \varphi(w)) = (\varphi(v), w)$ fur alle $v, w \in V$ ist.

Solution: Ja

(g) Es sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn $(v, \varphi(v)) = (\varphi(v), v)$ fur alle $v \in V$ ist.

Solution: Nein

(h) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ hermitesch ist.

Solution: Nein

(i) Es ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn $(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$ fur alle $v, w \in V$ ist.

Solution: Nein

(j) Es sei $K = \mathbb{C}$. Dann ist φ genau dann selbstadjungiert, wenn $(v, \varphi(v)) = \overline{(\varphi(v), v)}$ fur alle $v \in V$ ist.

Solution: Nein

71. Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\, , \,)$. Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr?

(a) Sind U und W Untervektorraume von V mit $U^\perp = W^\perp$, dann ist $U = W$.

Solution: Ja

(b) Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ orthogonal und ist U ein φ-invarianter Untervektorraum von V, dann ist $U^\perp$ auch φ-invariant.

Solution: Ja

(c) Es seien $u, v \in V$ mit $\{w \in V \mid (u, w) = 0\} = \{w \in V \mid (v, w) = 0\}$. Dann ist $\langle u \rangle = \langle v \rangle$.

Solution: Ja

(d) Ist $U \leq V$, dann ist $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$.

Solution: Ja

(e) Es ist $\left(U^\perp\right)^\perp = U$ fur jeden Untervektorraum U von V.

Solution: Ja

(f) Sind $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ paarweise orthogonal, dann ist das Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhangig.

Solution: Ja

(g) Sind $v_1, \ldots, v_m \in V \setminus \{0\}$ paarweise orthogonal, dann ist $m \leq n$.

Solution: Ja

(h) Ist $U \leq V$, dann ist $\dim(U^\perp) = \dim(U)$.

Solution: Nein

(i) Es seien $u, v \in V$ mit $\{w \in V \mid (u, w) = 0\} = \{w \in V \mid (v, w) = 0\}$. Dann ist $u = v$.

Solution: Nein

(j) Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und ist U ein φ-invarianter Untervektorraum von V, dann ist $U^\perp$ auch φ-invariant.

Solution: Nein

72. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit seinem Standardskalarprodukt.

(i) Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf das 4-Tupel (u_1, u_2, u_3, u_4) mit

$$u_1 = (0, 2, 1, 0)^t, \quad u_2 = (1, -1, 0, 0)^t, \quad u_3 = (1, 2, 0, -1)^t \quad \text{und} \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)^t$$

an, um eine Orthogonalbasis $\mathcal{O}$ zu erhalten.

(ii) Schreiben Sie die Vektoren $x = (1, 1, 1, 1)^t$ und $y = (-1, 0, 1, -1)^t$ bezüglich der Basis $\mathcal{O}$, d.h. bestimmen Sie $\kappa_{\mathcal{O}}(x)$ und $\kappa_{\mathcal{O}}(y)$.

73. Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Es sei $\varphi : V \to V, v \mapsto Av$. Ist φ diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(c) Geben Sie für $a = 0$ und $a = 1$ jeweils eine geometrische Interpretation der folgenden Menge Q_a an:

$$Q_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4xy - 2xz + y^2 - 2yz + \frac{5}{2}z^2 = a\}.$$

[Dieser Teil (c) ist ohne Punkte, suchen Sie im Internet nach „Quadrik“, es gibt eine Klassifikation der Quadriken, die die Hauptachsentransformation verwendet.]

74. Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. *(1 Punkt)*

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar?

(1 Punkt)

(c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$?

(1 Punkt)

(d) Es sei $a = -1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_{-1}.

(1 Punkt)

(e) Es sei $a = -1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_{-1} an. *(3 Punkte)*

.

75. Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind: *(5*

Punkte)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{}$

76. Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$ für $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ und $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ gegeben.

   (a) Bestimmen Sie aus *(3 Punkte)*

   $$x = (1,1,1)^t, \quad y = (1,1,0)^t, \quad z = (1,0,0)^t$$

   mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$.

   (b) Gegeben seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit *(je 1 Punkt)*

   $$\kappa_{\mathcal{O}}(u) = (-1, 2, 3)^t, \quad \kappa_{\mathcal{O}}(v) = (0, -3, 1)^t, \quad \kappa_{\mathcal{O}}(w) = (-2, -4, 2)^t.$$

   Bestimmen Sie
   $||u|| = \boxed{}$, $||v - w|| = \boxed{}$, $||v + w|| = \boxed{}$,
   $(v, w) = \boxed{}$.

77. Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung

   $$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.
   (4 Punkte)

   (b) Bestimmen Sie den Rang von φ. $\quad \mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{}$ *(1 Punkt)*

(c) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an. *(2 Punkte)*

78. Betrachten Sie den von $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, und $f_3 : x \mapsto \cos x$ erzeugten Untervektorraum V von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Es bezeichne $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ die Ableitung, d.h. $\varphi(\sin x) = \cos x$ und $\varphi(\cos x) = -\sin x$.

    (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ.

    (1 + 1 Punkte)

    $\chi_\varphi = \boxed{\qquad\qquad}$ $\mu_\varphi = \boxed{\qquad\qquad}$

    (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{\qquad\qquad}$ *(1 Punkt)*

    (c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(1 Punkt)*

79. Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum mit $\dim_K V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $0 \neq v \in V$ ein linear unabhängiges 2-Tupel (u, w) gibt mit $v = u + w$. *(3 Punkte)*

80. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mit L werde der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A bezeichnet (also $L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$). Weiter bezeichne $L^\perp$ den Orthogonalraum von L bezuglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^n$ (also $L^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v\rangle = 0$ fur alle $v \in L\}$).

    Zeigen Sie, dass $L^\perp$ gleich dem Spaltenraum von A^t ist. *(5 Punkte)*

81. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^t = -A$. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ ist. *(3 Punkte)*

82. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ mit $(A - E_n)^n = 0$ und $(A - E_n)^j \neq 0$ fur $1 \leq j < n$. Zeigen Sie: *(2+1+1 Punkte)*

    (a) A ist ahnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen.

(b) A ist invertierbar.

(c) A ist genau dann ahnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn $n = 1$ ist.

83. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix geschrieben werden kann.

(5 Punkte)