Aufgabenblatt 28.07.2009 (1. Termin)

Klausur zu “Lineare Algebra I für Informatiker”, SS 09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}.$$

a) Wie lautet das charakteristische Polynom von A? (3 P.)

Die Matrix ist eine transponierte Begleitmatrix, daher liesst man ab:

$\chi_A = X^3 - 2X^2 - X - 3 = X^3 + 3X^2 + 4X + 2 = (X+1)(X-1)(X-2) = (X-4)(X-1)(X-2).$

Alternative: Formel mit Sarrus, Laplace, o.a.

b) Wie lauten die Eigenwerte von A mit ihren algebraischen Vielfachheiten? (4 P.)

$-1 = 4, 1, 2$ jeweils einfach.

c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Z}_5^3$ aus Eigenvektoren von A. (4 P.)

$$c = 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = 2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, c = -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

alternativ: die Spalten von $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Es sei (a_n) die lineare rekursive Folge in $\mathbb{Z}_5$, definiert durch (4 P.)

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 0 \text{ und } a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} + 3a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für a_n.

Matrixgleichung: $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

mit Anfangswert: $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zwischenergebnis: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix} =: D.$

$$A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = TD^nT^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = TD^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 2^n \\ (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n \\ 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 2^{n+2} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Ergebnis $a_n = 2^n + (-1)^n$.

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Im $\mathbb{R}^4$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $U := \langle v_i - v_j \mid 0 \leq i, j \leq 3 \rangle$ und suchen eine Matrix A mit $\mathbb{L}_0(A) = U$.

a) Wie lautet die Dimension von U? (2 P.)

$$U = \langle v_3 - v_0, v_2 - v_0, v_1 - v_0 \rangle = \mathrm{SR}(A) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dim U = 3.$$

b) Welche Zeilenzahl muss A mindestens haben? (1 P.)

$\operatorname{Rg} A = 4 - \dim U = 1.$

c) Berechnen Sie ein solches A mit minimaler Zeilenzahl. (2 P.)

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Weiter ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ gesucht, für das gilt:

$$v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{L}(A, b).$$

d) Ist die Menge $\mathbb{L}(A, b)$ durch diese Anforderungen eindeutig bestimmt? (3 P.)
Die Antwort ist zu beweisen.

Es gilt $\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}_0(A)$ für jede Lösung s (z.B. $s = v_i$), d.h. $\mathbb{L}(A, b)$ ist genau dann eindeutig, wenn $\mathbb{L}_0(A)$ eindeutig ist.
Da alle $v_i \in \mathbb{L}(A, b)$, so sind alle $v_i - v_j \in \mathbb{L}_0(A)$, also $U \subseteq \mathbb{L}_0(A)$ (denn $\mathbb{L}_0(A)$ ist Unterraum).
Wegen $\dim U = 3$ folgt $\mathbb{L}_0(A) = U$ oder $\mathbb{R}^4$. Aus $\mathbb{L}_0(A) = \mathbb{R}^4$ ergibt sich aber $b = 0$, und $Ax = b$ wäre nicht inhomogen (Widerspruch), somit ist $\mathbb{L}_0(A) = U$ gezeigt.

e) Geben Sie ein solches Gleichungssystem $Ax = b$ an. (1 P.)

A wie oben und $b = Av_0 = 6$.

— bitte wenden —

♡

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Es seien $P = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten, $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ der Unterraum der quadratischen Polynome, und $U = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R})$ der Unterraum der linearen Polynome. Also:

$$V = \{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, \quad U = \{aX + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir definieren für alle $f, g \in V$:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=0}^{2} f(i)g(i).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist. (4 P.)

> Linearität: $\langle \lambda f + f', g \rangle = \sum_{i=0}^2 (\lambda f + f')(i)g(i) = \sum_{i=0}^2 (\lambda f(i) + f'(i))g(i) = \lambda \sum_{i=0}^2 f(i)g(i) + \sum_{i=0}^2 f'(i)g(i) = \lambda\langle f, g\rangle + \langle f', g\rangle$.
> Symmetrie: $\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)g(i) = \sum_{i=0}^2 g(i)f(i) = \langle g, f \rangle$.
> Positiv definit: $\langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)^2 \geq 0$ und $\langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow f = 0$ (weil $\deg f \leq 2$).

b) Erläutern Sie, wie der Abstand $\|f - g\|$ anschaulich anhand der Funktionsgraphen von f und g zu interpretieren ist. (1 P.)

> Der Abstand $\|f - g\|$ misst (bis auf Wurzel) die Summe der quadrierten Abstände zwischen den Funktionsgraphen an den Stützstellen $0, 1, 2$.

c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt auf P ist. (1 P.)

> Kein Skalarprodukt, da z.B. $\langle f, f \rangle = 0$ für $f = X(X-1)(X-2) \in P$.

Wir statten nun V mit dem soeben definierten Skalarprodukt aus und verwenden es, um quadratische Polynome $f \in V$ durch lineare Polynome aus dem Unterraum U zu approximieren.

d) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U. (4 P.)

> Orthogonalisiere die Basis $(1, X)$ von U:
> $w_1 := 1, w_2 := X - \frac{\langle 1, X\rangle}{\langle 1,1\rangle} \cdot 1 = X - 1$.

e) Berechnen Sie die Orthogonalprojektion von X^2 auf U. (2 P.)

> $\pi_U(X^2) = \frac{\langle 1, X^2\rangle}{\langle 1,1\rangle} \cdot 1 + \frac{\langle X-1, X^2\rangle}{\langle X-1, X-1\rangle} \cdot (X-1) = \frac{5}{3} + \frac{4}{2}(X-1) = 2X - \frac{1}{3}$.

f) Finden Sie ein normiertes quadratisches Polynom aus $U^{\perp}$. (3 P.)

> Ansatz: $\langle X^2 + aX + b, 1\rangle = 0 \wedge \langle X^2 + aX + b, X - 1\rangle = 0$.
> $\langle X^2 + aX + b, 1\rangle = b + (1 + a + b) + (4 + 2a + b) = 3a + 3b + 5$ und $\langle X^2 + aX + b, X - 1\rangle = -(b) + (4 + 2a + b) = 2a + 4$ liefert $a = -2$ und $b = \frac{1}{3}$.
> Ergebnis: $X^2 - 2X + \frac{1}{3}$ ist die eindeutige Antwort.

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Es sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \quad X \mapsto I \cdot X \cdot I^{-1}.$$

a) Geben Sie I^{-1} an. (1 P.)

$I^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die Eigenräume von φ zum Eigenwert 1 und zum Eigenwert -1. (5 P.)

Für $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $\varphi(X) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, also:

$$X \in V(1,\varphi) \Leftrightarrow a = d \wedge b = -c, \quad X \in V(-1,\varphi) \Leftrightarrow a = -d \wedge b = c.$$

Ergebnis:
$V(1,\varphi) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Q}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.
$V(-1,\varphi) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{Q}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.
Alternative: Man bestimmt die Eigenräume mit Hilfe der Abbildungsmatrix. Bzgl. der Standardbasis lautet sie $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie alle weiteren Eigenwerte von φ. (2 P.)

Die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu 1 und -1 ist bereits 4, also kann es keine weiteren Eigenwerte geben.

Alternative 1: $\varphi(X) = \lambda X \Rightarrow d = \lambda a, -c = \lambda b, -b = \lambda c, a = \lambda d \Rightarrow a = \lambda^2 a, b = \lambda^2 b, c = \lambda^2 c, d = \lambda^2 d$.
Aus $\varphi(X) = \lambda X$ und $X \neq 0$ folgt also $\lambda^2 = 1$, d.h. $\lambda = \pm 1$.
Alternative 2: Charakteristisches Polynom der Abbildungsmatrix.

d) Ist φ diagonalisierbar? (1 P.)

Ja, denn die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist 4.

Aufgabe 5. (5 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $\langle , \rangle$ sein Skalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$. (3 P.)

$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle$.
$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle$.
Summiert man die beiden Gleichungen auf, bekommt man die gewünschte Formel.

b) Erläutern Sie die Aussage aus a) geometrisch. (1 P.)

In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über die Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über die Seiten (bekannt als *Parallelogramm-Identität*).

c) Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt: $\|v+w\| = \|v-w\| \Leftrightarrow v \perp w$. (1 P.)

Vergleich der beiden Ausdrücke für $\|v+w\|$ und $\|v-w\|$ aus a) zeigt:

$$\|v+w\| = \|v-w\| \Leftrightarrow \|v+w\|^2 = \|v-w\|^2 \Leftrightarrow 2\langle v, w\rangle = -2\langle v, w\rangle \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w.$$

Viel Erfolg!