

Aufgabenblatt 3

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Timo Hanke, SS 2007

Für Matrikelnummer: 273784

Abgabezeitpunkt: Do 03 Mai 2007 08:00:00 CEST

Dieses Blatt wurde erstellt: Di 01 Mai 2007 06:59:43 CEST

22	Es sei	$(A, b) := \left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ a & -1 & 3 & 12 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right)$	
	die erweiterte Matrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über \mathbb{Q} und $\frac{13}{5} \neq a \in \mathbb{Q}$. Lösen Sie das Gleichungssystem und beantworten Sie die folgenden Fragen.		
	Wenn $a = 1$ ist, was ist dann die erste Komponente der Lösung?		
	Wenn $a = 1$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?		
	Wenn $a = 4$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?		
	Wenn $a = 2$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?		
	Wenn $a = 3$ ist, was ist dann die dritte Komponente der Lösung?		
23	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Einheiten in den jeweiligen Ringen.		
	Die Menge $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Paare (d.h. 2-Tupel) über \mathbb{Z} ist mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Multiplikation ein kommutativer Ring. Wieviele Einheiten hat R ?	<input type="radio"/> 1 / <input type="radio"/> 2 / <input type="radio"/> 3 / <input type="radio"/> 4 / <input type="radio"/> 6 / <input type="radio"/> 8	
	Welche der folgenden Zahlen ist in \mathbb{Z}_{37} das (multiplikative) Inverse von 16?	<input type="radio"/> 7 / <input type="radio"/> 8 / <input type="radio"/> 9 / <input type="radio"/> keins	
	Wieviele Einheiten hat der Ring \mathbb{Q} ?	<input type="radio"/> 1 / <input type="radio"/> 2 / <input type="radio"/> 4 / <input type="radio"/> unendlich viele	
	Es sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Ist es richtig, dass n genau dann Primzahl ist, wenn der Ring \mathbb{Z}_n genau $n - 1$ Einheiten besitzt?	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein	
	Wieviele Elemente hat die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{36})^*$?	<input type="radio"/> 8 / <input type="radio"/> 10 / <input type="radio"/> 12	
	Sei R ein Ring und $a \in R^*$. Ist dann auch $a^2 \in R^*$?	<input type="radio"/> Ja / <input type="radio"/> Nein	
24	Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten. $A := \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$ Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix $X = (x_{ij})$ definiert. Falls nein, kreuzen Sie <input type="radio"/> an (für <i>Quatsch</i>) und sonst kreuzen sie den Eintrag x_{11} an.		
	$X = CAD + A$	<input type="radio"/> <input type="radio"/> Q / <input type="radio"/> 180 / <input type="radio"/> 62	
	$X = C^3A - D$	<input type="radio"/> <input type="radio"/> Q / <input type="radio"/> 326 / <input type="radio"/> 388	
	$X = DBD$	<input type="radio"/> <input type="radio"/> Q / <input type="radio"/> -97 / <input type="radio"/> 188	
	$X = ADB - 4C^2$	<input type="radio"/> <input type="radio"/> Q / <input type="radio"/> 79 / <input type="radio"/> 18	

	$X = 7BA - 193D^2$	$\bigcirc \mathbb{Q} / \bigcirc 0 / \bigcirc 1$
25	Sei K ein Körper. Wir führen Matrixoperationen bzw. den Gauß-Algorithmus für Matrizen über K aus und zählen die maximal notwendigen Additionen und Multiplikationen in K . “Maximal” bedeutet, daß wir von ganz allgemeinen Matrizen ausgehen bei denen keine Operationen durch eventuelle 0- oder 1-Einträge überflüssig werden. Die Matrixmultiplikation wird jeweils nach der Standard-Formel (dem Falk-Schema) durchgeführt.	
	Wieviele Multiplikationen bzw. Divisionen in K sind maximal nötig, um eine Matrix $A \in K^{6 \times 9}$ mit Teil I des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform zu bringen? (“maximal” bedeutet insbesondere, daß vom ungünstigsten Verlauf des Gauß-Algorithmus ausgegangen wird!)	_____
	Seien $A \in K^{999 \times 1001}$ und $B \in K^{1001 \times 1001}$. Wieviele Additionen in K treten bei der Berechnung von $A \cdot B$ maximal auf?	_____
	Für $A, B, C \in K^{n \times n}$ wird $(A \cdot B) \cdot C$ berechnet. Angenommen, wir stellen eine Formel auf für die Anzahl der dazu maximal notwendigen Additionen in K . Diese Formel hängt von n ab. Was ist der höchste Exponent mit dem n in dieser Formel auftritt? (Natürlich nach dem Ausmultiplizieren der Formel!) Geben Sie hier nur den Exponenten (also eine natürliche Zahl) an.	_____
	Für $A, B, C \in K^{n \times n}$ wird $A + B \cdot C$ berechnet. Treten dabei mehr Additionen oder mehr Multiplikationen auf?	\bigcirc Additionen / \bigcirc Multiplikationen / \bigcirc gleich viele

Die folgenden beiden Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten.

26	<p>Für welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das lineare Gleichungssystem</p> $\begin{array}{rrcr} x_1 & + & (3-a)x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 = 2 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & (a+2)x_3 = 4 \end{array}$ <p>keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen in \mathbb{Q}^3? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an. Entscheiden Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe selbst, ob und wann sie Fallunterscheidungen machen wollen. Entscheiden Sie auch selbst, ob Sie den Gauß-Algorithmus nur bis zur Zeilenstufenform oder bis zur reduzierten Zeilenstufenform bzw. Normalform durchführen.</p>	
27	<p>Sei R ein Ring mit Eins und $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ mit</p> $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ <p>Berechnen Sie $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ Faktoren}}$ für $1 \leq k \leq n$. Beweisen Sie anschließend Ihr Ergebnis durch vollständige Induktion nach k.</p>	

Abgabe bis spätestens Donnerstag, 03. Mai 2007, um 8 Uhr. Nach diesem Zeitpunkt sehen Sie bei erneutem Aufruf des Blattes die Auswertung der online-Fragen. Bitte werfen Sie die schriftlichen Lösungen in den Kasten auf dem Flur des 2. Stocks im Sammelbau, Templergraben 64 in das Fach mit Ihrer Gruppennummer und der Aufschrift “LA I für Inf.”. Bitte **heften** Sie die Blätter zusammen (keine Büroklammern) und schreiben Sie unbedingt Ihre Gruppennummer, Ihre Matrikelnummer und Ihren Namen oben rechts auf das erste Blatt.