17.07.2007 (1. Termin), Gruppe **A**

Klausur zu “Lineare Algebra I für Informatiker”, SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (Typ MC, 3 Punkte)

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. In welchen der folgenden Fälle ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ notwendigerweise injektiv?

a) wenn $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W ist ☒ Ja ☐ Nein

b) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim V$ ist ☒ Ja ☐ Nein

c) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim W$ ist ☐ Ja ☒ Nein

Aufgabe 2. (Typ MC, 3 Punkte)

Ist die angegebene Teilmenge des $\mathbb{Z}_3^2$ ein Unterraum?

a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, 2x_1 + x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein

b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^2 + x_2 = x_1\}$ ☐ Ja ☒ Nein

c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^3 + x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. (Typ E, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte c_1, c_2, c_3 von φ so, daß $c_1 < c_2 < c_3$ gilt, und finden Sie dann zu jedem der c_i einen Eigenvektor v_i mit ganzzahligen Einträgen.

$c_1 = \boxed{-1}$ $c_2 = \boxed{1}$ $c_3 = \boxed{2}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *(7 Punkte)*

b) Geben Sie eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ an und berechnen Sie mit Hilfe von T den oberen linken Eintrag von A^{999}. Geben Sie als Zwischenergebnis zumindest diejenigen Einträge von T^{-1} an, die Sie bei Ihrer Rechnung benötigt haben.

$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{999} = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 4. (Typ E, 12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi_a(x) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} x.$

a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß φ_a nicht bijektiv ist. Berechnen Sie dann für diesen speziellen Wert a eine Matrix B so, daß die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Bx$ als Kern genau Im φ_a hat. Es reicht, wenn Sie eine nicht-Null-Zeile von B angeben.

$a =$ $\boxed{-7}$ *(3 Punkte)*, $B =$ | 4 | -3 | -1 | *(4 Punkte)*

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ wie oben bestimmt. Kreuzen Sie nun denjenigen Vektor für v an, der in Im φ_a liegt, und berechnen Sie für dieses v alle Lösungen von $\varphi_a(x) = v$.

$v = \square \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boxtimes \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*

$\varphi_a^{-1}(v) = \boxed{\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \}}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 5. (Typ S, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Endomorphismus mit $\varphi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante von φ. *(4 Punkte)*

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Standardbasis an. *(4 Punkte)*

c) Zeigen Sie, daß φ orthogonal ist. *(1 Punkte)*

d) Je nachdem ob φ eine Drehung oder eine Spiegelung ist, bestimmen Sie entweder den Kosinus des Drehwinkels oder bestimmen Sie die Spiegelachse. *(3 Punkte)*

Aufgabe 6. (Typ S, 12 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$.

a) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^t? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. *(4 Punkte)*

b) Zeigen Sie: Ist A invertierbar, dann sind alle Eigenwerte ungleich 0. *(4 Punkte)*

c) A heißt **schiefsymmetrisch** wenn $A^t = -A$ gilt. Zeigen Sie: Ist $A \in K^{5 \times 5}$ schiefsymmetrisch, dann ist 0 ein Eigenwert von A. *(4 Punkte)*

Bonus-Aufgabe. (Typ S, 6 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß jedes $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$ diagonalisierbar ist. *(6 Punkte)*
Tip: Bringen Sie Ker φ und Im φ mit den Eigenräumen von φ in Zusammenhang.

Viel Erfolg!

Klausur zu "Lineare Algebra I für Informatiker", SS 07

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur in Lineare Algebra I
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (Typ MC, 3 Punkte)

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem beliebigen Körper K. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. In welchen der folgenden Fälle ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ notwendigerweise injektiv?

a) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim W$ ist ☐ Ja ☒ Nein
b) wenn der Rang einer Abbildungsmatrix von φ gleich $\dim V$ ist ☒ Ja ☐ Nein
c) wenn $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W ist ☒ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2. (Typ MC, 3 Punkte)

Ist die angegebene Teilmenge des $\mathbb{Z}_3^2$ ein Unterraum?

a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, 2x_1 - x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein
b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^3 + x_2 = x_1\}$ ☒ Ja ☐ Nein
c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3, x_1^2 + x_2 = x_1\}$ ☐ Ja ☒ Nein

Aufgabe 3. (Typ E, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte c_1, c_2, c_3 von φ so, daß $c_1 < c_2 < c_3$ gilt, und finden Sie dann zu jedem der c_i einen Eigenvektor v_i mit ganzzahligen Einträgen.

$c_1 = \boxed{-2}$ $c_2 = \boxed{-1}$ $c_3 = \boxed{1}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(7 Punkte)*

b) Geben Sie eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ an und berechnen Sie mit Hilfe von T den oberen linken Eintrag von A^{999}. Geben Sie als Zwischenergebnis zumindest diejenigen Einträge von T^{-1} an, die Sie bei Ihrer Rechnung benötigt haben.

$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{999} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 4. (Typ E, 12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die lineare Abbildung $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi_a(x) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} x$.

a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß φ_a nicht bijektiv ist. Berechnen Sie dann für diesen speziellen Wert a eine Matrix B so, daß die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Bx$ als Kern genau Im φ_a hat. Es reicht, wenn Sie eine nicht-Null-Zeile von B angeben.

$a = \boxed{0}$ *(3 Punkte)*, $B = \boxed{5 \mid -2 \mid -1}$ *(4 Punkte)*

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ wie oben bestimmt. Kreuzen Sie nun denjenigen Vektor für v an, der in Im φ_a liegt, und berechnen Sie für dieses v alle Lösungen von $\varphi_a(x) = v$.

$v = \square \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boxtimes \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*

$\varphi_a^{-1}(v) = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}}$ *(3 Punkte)*

Aufgabe 5. (Typ S, 12 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Endomorphismus mit $\varphi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Determinante von φ. *(4 Punkte)*

b) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Standardbasis an. *(4 Punkte)*

c) Zeigen Sie, daß φ orthogonal ist. *(1 Punkte)*

d) Je nachdem ob φ eine Drehung oder eine Spiegelung ist, bestimmen Sie entweder den Kosinus des Drehwinkels oder bestimmen Sie die Spiegelachse. *(3 Punkte)*

Aufgabe 6. (Typ S, 12 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$.

a) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^t? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. *(4 Punkte)*

b) Zeigen Sie: Ist A invertierbar, dann sind alle Eigenwerte ungleich 0. *(4 Punkte)*

c) A heißt **schiefsymmetrisch** wenn $A^t = -A$ gilt. Zeigen Sie: Ist $A \in K^{5\times 5}$ schiefsymmetrisch, dann ist 0 ein Eigenwert von A. *(4 Punkte)*

Bonus-Aufgabe. (Typ S, 6 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß jedes $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$ diagonalisierbar ist. *(6 Punkte)*
Tip: Bringen Sie Ker φ und Im φ mit den Eigenräumen von φ in Zusammenhang.

Viel Erfolg!