Aufgabenstellung und Lösungsansatz zur 2. Scheinklausur Lineare Algebra I vom 10.02.2004

29. Februar 2004

Dies ist die Aufgabenstellung und ein Lösungsansatz für die zweite Scheinklausur zur Linearen Algebra I bei Prof. Pahlings im Wintersemester 03 / 04 vom 10.02.2004.
Der Lösungsansatz erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und / oder Richtigkeit.
Die verschiedenen Aufgabenteile sind mir von Kommilitonen zugesand, bzw. aus der Klausur meiner Freundin entnommen worden.
Beim Ankreuzteil geben die schwarz gefärbten Kästen die jeweils richtige Lösung an.
Lutz - Peter Hooge (`lpvader@gmx.de`) hat mir Aufgabe 6 und 10, Sebastian Goendoer (`sebastian.goemdoer@rwth-aachen.de`) Aufgabe 11, Schamil Wackenhut (`sw@wacke.org`) Aufgabe 10, Thorsten Sattler (`thorsten.sattler@rwth-aachen.de`) Aufgabe 6 und 8 und Sebastian Scholtes (`feanor_23@web.de`) Aufgabe 12 zugesand. Aufgabe 7, 8 und 9 stammen von Susanne Wagner.
Bei Fragen oder Anregungen wendet euch bitte an mich, Clemens Krämer (`gluexklee@gmx.de`)

Scheinklausur 2. Teil, 10.2.2004 **Gruppe B**

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: **Matrikelnummer:**

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja" oder „Nein" oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt −1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper.		
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n\times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad n mit $f(A) = E_n$?	■ Ja	□ Nein
	Gibt es einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \to K^{n\times n}$ mit $\varphi(X+1) = E_n$?	■ Ja	□ Nein
	Ist $K = \mathbb{Z}_2$, so ist $K[X]$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.	□ Ja	■ Nein
2	Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	Ist $a_{i,j} = 7$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, so ist A diagonalisierbar.	■ Ja	□ Nein
	Ist $a_{i,j} = i$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ und $a_{i,j} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$, so ist A diagonalisierbar.	■ Ja	□ Nein
	Ist $a_{i,j} = j - i$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ und $a_{i,j} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$, so ist A diagonalisierbar.	□ Ja	■ Nein
3	Es sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum für ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Ist $\Phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basisfolgen von V, so ...		
	... sind $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ und $M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ ähnlich.	□ Ja	■ Nein
	... ist $\det M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \det M_{\mathcal{B}'}(\Phi)$.	□ Ja	■ Nein
	... ist $\mathrm{Rg}(M_{\mathcal{B}}(\Phi)) = \mathrm{Rg}(M_{\mathcal{B}'}(\Phi))$.	■ Ja	□ Nein
4	Es sei K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 3$ und $\dim_K W = 2$ und $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V bzw. W mit ...		
?	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	□ Ja	■ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	■ Ja	□ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	□ Ja	■ Nein
5	Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ($1 \leq n \in \mathbb{N}$) und $\varphi \in \mathrm{End}\, V$. Mit χ_φ ist das charakteristische Polynom und mit μ_φ das Minimalpolynom von φ gemeint. Gelten die folgenden Aussagen?		
	Aus $\varphi^{2n} = 0$ folgt $\varphi^n = 0$.	■ Ja	□ Nein
	Ist $\varphi^n = 0$, so ist $\mu_\varphi = X^n$.	□ Ja	■ Nein
	Ist $\varphi^n = 0$, so ist $\chi_\varphi = X^n$.	■ Ja	□ Nein
	Ist $\varphi^m = 0$ für ein m, so hat φ genau einen Eigenwert.	□ Ja	■ Nein

Name: **Matrikelnummer:**

Scheinklausur 2. Teil, 10.2.2004, Rechenteil, **Gruppe B**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse nicht zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch keine Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es Null Punkte.

6 Es sei $V = \langle \sin^2, \cos^2, \sin \cdot \cos \rangle \leq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ und $\mathcal{B} = (\sin^2, \cos^2, \sin \cdot \cos)$, ferner sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ gegeben durch $\varphi(f) : x \mapsto f'(x) - f''(x)$ für $f \in V$.

Dann ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ *(6 Punkte)*

7 Es sei K ein Körper. Ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in K^{3\times3}, f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 \in K[X],$$

μ_A

dann ist $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *(6 Punkte)*

8 Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{Q}^{3\times3}.$$

Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A = x^3 + x^2 - 2x$ *(3 Punkte)*

Die Eigenwerte von A sind: Eigenwerte: $a_1 = 0 \quad a_2 = -2 \quad a_3 = 1$ *(2 Punkte)*

Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Berechnen Sie die Inverse von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{Q}^{3\times3}$$

mittels elementarer Zeilenoperationen. Dokumentieren Sie genau die Umformungen und geben Sie A^{-1} explizit an. *(6 Punkte)*

10 Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, $\psi \in \operatorname{End}(V)$ und v ein Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$. Bestimmen Sie einen Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$. *(6 Punkte)*

11 Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.

Berechnen Sie det A. Begründen Sie Ihre Umformungen bzw. Berechnungen. *(6 Punkte)*

12 Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Beweisen Sie, dass es ein Polynom $f \in K[X]$ mit Grad $f < n$ gibt mit $A^{-1} = f(A)$.
Hinweis: Betrachten Sie das Minimalpolynom. *(6 Punkte)*

Aufgabe 9

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1	-6	-2	1	0	0	
1	-2	1	0	1	0	+
-1	1	-2	0	0	1	

1	-6	-2	1	0	0	|*(-1) +
1	-2	1	0	1	0	
0	-5	-4	1	0	1	

1	-6	-2	1	0	0	
0	4	3	-1	1	0	|*5 +
0	-5	-4	1	0	1	|*4

1	-6	-2	1	0	0	
0	4	3	-1	1	0	+
0	0	-1	-1	5	4	|*3

1	-6	-2	1	0	0	
0	4	0	-4	16	12	|*(1/4)
0	0	-1	-1	5	4	

1	-6	-2	1	0	0	+
0	1	0	-1	4	3	
0	0	-1	-1	5	4	|*(-1) |*2

1	-6	0	3	-10	-8	+
0	1	0	-1	4	3	|*6
0	0	1	1	-5	-4	

1	0	0	-3	14	10
0	1	0	-1	4	3
0	0	1	1	-5	-4

Damit ist:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 & 14 & 10 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

$\varphi \in GL(V)$, also $\varphi \in End(V)$, φ bijektiv (Isomorphismus), $\psi \in End(V)$, v ist Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$, also $v \neq \underline{0}$ und $\psi(\varphi(v)) = s \cdot v$.

Da φ Isomorphismus ist und $v \neq \underline{0}$, so ist $\varphi(v) \neq \underline{0}$. Sei nun $\varphi(v) = w \in V$ (also $w \neq \underline{0}$). $(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v)) = \psi(w) = s \cdot v$ (Da v Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$) $(s \in K)$. Somit ist $(\varphi \circ \psi)(w) = \varphi(\psi(w)) = \varphi(s \cdot v) = s \cdot \varphi(v) = s \cdot w$ (wegen Annahme). Somit ist w ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$.

Aufgabe 11

Die Matrix A sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

also eine $n \times n$ Matrix deren Einträge auf der Hauptdiagonalen 2 und sonst 1 sind.

Die Determinante von A läßt sich nun wie folgt berrechnen. Ziehe von jeder Spalte, ausgenommen der rechteste Spalte, eben diese ab (Beachte: Durch das Addieren des (vielfachen) einer Zeile / Spalte zu einer anderen ändert sich die Determinante von A nicht). Nun erhält man:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

Ziehe nun die Spalten 1 bis n-1 von der letzten Spalte ab. Dann erhalten wir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n+1 \end{bmatrix}$$

wobei $a_{n,n} = n + 1$, da dieser Eintrag durch $2 + (n - 1)$ entsteht.

Es ist leicht zu sehen, dass dies eine untere Dreiecksmatrix ist. Die Determinate einer solchen Matrix errechnet sich durch Multiplikation der Spurelemente. Also ist $detA = \underbrace{1 * \dots * 1}_{(n-1)mal} * (n + 1) = n + 1$

Aufgabe 12

Behauptung Sei K ein Krper und $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, dann gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ mit $\mathrm{Grad}\, f < n$ mit $A^{-1} = f(A)$.

Beweis Fr das Minimalpolynom $\mu_A \in K[X]$ von A gilt $\mu_A = g \cdot q + r$, fr ein $g \neq 0$ mit $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} g$ oder $r = 0$. Fr $g = X$ ergibt sich also $\mu_A = X \cdot q + r$, da A ivertierbar ist, mu $r \neq 0$ gelten. Es ist also r ein Polynom vom Grad 0 und wegen der Gradformel mu auch $\operatorname{Grad} q < \operatorname{Grad} \mu_A$ gelten. Durch Einsetzen von A ergibt sich $\mu_A(A) = A \cdot q(A) + r(A) = A \cdot q(A) + s \cdot E_n = 0$ mit $s \neq 0$. Damit folgt $A \cdot q(A) = -s \cdot E_n$ und $A \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot q(A)\right) = 0$, woraus mit der Eindeutigkeit des Inversen $A^{-1} = -\frac{1}{s} \cdot q(A)$ folgt.