Aufgabe 5

(i)

Behauptung: Jede Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Beweis: (Durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $n = 1 \qquad M = \{x\}$
M hat folgende Teilmengen:

- $\emptyset \subseteq M$
- $M \subseteq M$

$\rightarrow$ M hat $2 = 2^1$ Teilmengen $\surd$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Verwende: Jede Teilmenge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Zeige: Jede Menge mit $n + 1$ Elementen hat 2^{n+1} Teilmengen.

Sei M eine Menge, die man aus M erhält, indem man x weglässt. Sie hat n Elemente, also 2^n Teilmengen. Diese sind genau die Teilmengen von M, die x nicht mehr enthalten. Die anderen Teilmengen entstehen jeweils durch Hinzunahme von x.

Also: $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

(ii)

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$
Beweis: (Induktion)

Induktionsanfang: $n = 1 \frac{1\cdot(1+1)}{2} \surd$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Sei Behauptung für n richtig:
Zu zeigen für $n + 1$**:** $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) \overset{\text{Beh.}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \surd$$

(iii)

Bestimme die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2^n - 1$

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$
Beweis: (Induktion)
Induktionsanfang: $n = 1 : 1 = 1\surd$
Induktionsschritt: Sei Behauptung für n bewiesen:
Zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\surd$$

Aufgabe 6

M sei eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung.
Zu zeigen:
Es sind äquivalent:

(a) f surjektiv

(b) f ist injektiv

(c) f ist bijektiv

Beweis:
$''(c) \Rightarrow (a)''$ und $''(c) \Rightarrow (b)''$
sind klar weil ("bijektiv" nach Def. dasselbe ist wie "surjektiv" und "injektiv").
$''(b) \Rightarrow (a)''$:
Sei f injektiv. Das bedeutet: Sind $x, y \in M$ und $x \neq y \Rightarrow$ auch $f(x) \neq f(y)$. Sei n die Anzahl der Elemente von M. Also werden n verschiedene Elemente von f getroffen, also alle. Also ist f surjektiv. $\surd$.
$''(a) \Rightarrow (b)''$:
Sei f surjektiv. Das bedeutet: Zwischen jedem $y \in M$ existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Also gibt es keine 2 Elemente $x, y \in M$ mit $x \neq x'$, aber $f(x) = f(x')$ (sonst höchstens $n-1$ Bidler). Also ist f injektiv.
Dann: Gilt (a) oder (b), dann auch das Andere, also (c).

Folgende Abbildung zeigt, daß die oben bewiesene Äquivalenz nicht für unendliche Mengen gilt:
Sei $g : N \to N, x \mapsto x + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Aufgabe 5

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen den Mengen M und N.

(b) Zu zeigen:
Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = id_N$, dann ist f surjektiv.

Beweis: Sei $n \in N$ beliebig:
$f(g(n)) = n \Rightarrow n \in f(M) = f(M) = N \Rightarrow f$ surfjektiv

(c) Zu zeigen:
Wenn eine Abbildung: $N \to M$ existiert mit $g \circ f = id_M$, dann ist f injektiv.

Beweis: Seien $m, m' \in M$ beliebig mit $f(m) = f(m')$
$m = g(f(m)) \Rightarrow g(f(m')) = m' \Rightarrow f$ injektiv.

(a) Zu zeigen:
f ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$.

Beweis:
$'' \Leftarrow''$ Benutze (b) und (c) $\Rightarrow f$ injektiv und surjektiv, also f bijektiv.
$'' \Rightarrow''$ Sei f bijektiv, also injektiv und surjektiv.
Weil f surjektiv ist, enthält jede Faser $f^{-1}(\{n\})$ (für ein $n \in N$) mindestens ein Element.
Weil f zusätzlich injektiv ist, enthält $f^{-1}(\{n\})$ genau ein Element.

Definiere jetzt g:
$g(n)$ sei das Element $f^{-1}(\{n\})$ für alle $n \in N$. Dann ist $f(g(n)) = n$ für alle $n \in N$. Und $g(f(m)) = m$ für alle $m \in M$, weil m auf $f(m)$ abgebildet wird.

Aufgabe 6:

$$\text{LGS:} \quad \begin{array}{rcrcrcll} 5x_1 & + & 6x_2 & + & (a+15)x_3 & = & 7 & (I) \\ -x_1 & + & & + & (a-3)x_3 & = & 1 & (II) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 2 & (III) \\ 2_x1 & + & (a+2)x_2 & + & 7x_3 & = & 4 & (IV) \end{array}$$

$(I) = (II) + 3 \cdot (III)$. Damit kann Zeile (I) weggelassen werden.
Addiere $2 \cdot (II)$ auf (III) und (IV).

$$\begin{array}{rcrcll} -x_1 & & & + & (a-3)x_3 & = & 1 & \\ & & 2_x2 & + & 2a_x3 & = & 4 & (III') \\ & & (a+2)x_2 & + & 2(a+1)x_3 & = & 6 & (IV') \end{array}$$

Ziehe (III') vom (IV') ab.

$$\begin{array}{rcrcll} -x_1 & & + & (a-3)x_3 & = & 1 \\ & 2x_2 & + & 2ax_3 & = & 4 \\ & ax_2 & + & x_3 & = & 2 \Leftrightarrow x_3 = 2 - ax_2 \end{array}$$

Setze ein: $\begin{cases} -x_1 & + & (a-3)(2-ax_2) & = & 1 \\ 2x_2 & + & 2a(2-ax_2) & = & 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ausmultiplizieren

$$\begin{cases} -x_1 & + & (-a^2+3a)x_2 & = & -2a+7 \\ & & (2-2a^2)x_2 & = & 4-4a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 & + & (3a-a^2)x_2 & = & 7-2a \\ & & (1-a^2)x_2 & = & 2(1-a) \end{cases}$$

Es gibt 3 Fälle:

Fall 1:

Wenn a ungleich 1 und ungleich -1 ist:
$\Rightarrow x_2 = \frac{2\cdot(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{2}{1+a}(x_1, x_3$ bestimmbar.
$\Rightarrow$ Das LGS ist eindeutig lösbar.

Fall 2:

$a = 1 :\ 0 \cdot x_2 = 0 \quad x_2$ beliebig
$\Rightarrow$ as LGS hat unendlich viele Lösungen (da zu jeden x_2 gibt es ein x_1 und x_3).

Fall 3:

$a = 1 :\ 0 \cot x_2 = 4 \Rightarrow$ keine Lösung.

Aufgabe 5

(i)

Zu zeigen: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$

Beweis:

$$\begin{aligned}
0 \cdot a &\overset{(2)}{=} (0+0) \cdot a \overset{(9)}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a \\
&\Rightarrow -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) = -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) + (0 \cdot a) \\
&\overset{(3)}{\Rightarrow} 0 = \overset{(1)}{=} (-(0 \cdot a) + (0 \cdot a)) + 0 \cdot a \\
&\overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = 0 + 0 \cdot a \\
&\overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = \overset{(2)}{0} \ \cdot a \\
&\Rightarrow 0 = 0 \cdot a \overset{(8)}{=} a \cot 0
\end{aligned}$$

(ii)

Zu zeigen: $a + b = 0, a, b \in K \Rightarrow b = -a$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& a + b = 0 \\
\overset{+(-a)}{\Rightarrow}\ & (-a) + (a + b) = (-a) + 0 \\
\overset{(1)}{\Rightarrow}\ & (-(a) + a) + b = (-a) + 0 \\
\overset{(3),(2)}{\Rightarrow}\ & b- = -a
\end{aligned}$$

(iii)

Zu zeigen: $-a = (-1) \cdot a$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& a + (-1) \cot a \\
\overset{(6)}{=}\ & 1 \cdot a + (-1) \cdot 1 \\
\overset{(9)}{=}\ & (1 + (-1)) \cot a \\
\overset{(3)}{=}\ & 0 \cdot a \\
\overset{(ii)}{=}\ & 0 \\
\overset{(iii) fuer b=(-1)\cdot a}{\Rightarrow}\ & (-1) \cdot a = -a
\end{aligned}$$

(iv)

Zu zeigen: $-(-a) = a$ für alle $a \in K$

Beweis:

$(-a) + (-(-a)) \overset{(3)}{=} 0 = \overset{(3)}{=} -a + a \overset{(ii)}{\Rightarrow}$ Behauptung

(v)

Zu zeigen: $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = a^{-1} \quad a, b \in K$

Beweis:

$a \neq 0$ wegen (i) und (6)
$a \cdot b = 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 1 = a^(- 1)$
(vi)
Zu zeigen: $(a^{-1})^{-1} = a \quad 0 \neq a \in K$
Beweis:
$(a^{-1})^{-1} \stackrel{(6)}{=} (a^{-1})^{-1} \cdot 1 \stackrel{(6)}{=} (a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \stackrel{(5)}{=} ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a \stackrel{(7)}{=} 1 \cdot a \stackrel{(6)}{=} a$
(vii)
Zu zeigen: $a + b = a$ für alle $a \in K \Rightarrow b = 1$
Beweis:
Vorr. $\stackrel{a=0}{\Rightarrow} 0 + b = 0$
(viii)
Zu zeigen: $acdotb = a$ für alle $a \in K \Rightarrow b = 1$
Beweis:
Vorr. $\stackrel{a=1}{\Rightarrow} 1 \cdot 1 = 1$
(ix)
Zu zeigen: $a \cdot b = 0$ für $a, b \in K \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Beweis:
Sei $a \neq 0$ und $a \cdot b = 0$ Zeige: $b = 0$
$stackrel(7) \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$
(x)
Zu zeigen: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$
Beweis:

$$\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &\stackrel{(iii)}{=} ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) \\
&\stackrel{(5),(8)}{=} ((-1) \cdot (-1)) \cdot a \cdot b \\
&\stackrel{(iii}{=} (-(-1)) \cdot (a \cdot b) \\
&\stackrel{(iv)}{=} 1 \cdot (a \cdot b) \\
&\stackrel{(6)}{=} a \cdot b
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(ii)

Gibt es ein homogenes LGS mit Lösungmenge $\left\{ \binom{x}{y} \in R^2 | x = 0 \text{ oder } y = 0 \right\}$

Antwort: NEIN!

Angenommen es gäbe ein solches LGS:
$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = 0 \\ & \vdots & & \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & = 0 \end{array}$$

$\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ sind Lösung
$\binom{1}{1}$ ist Lösung
Wiederspruch!!!

0.1 (ii)

inhomogenes LGS und Lsg. Menge $\left\{ \binom{x}{y} \in R^2 | \binom{x}{y} \neq \binom{1}{1} \right\}$
Antwort: NEIN!

Angenommen es gäbe so ein LGS:
$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & = b_k \end{array}$$
Dann ist $\binom{0}{0}$
Lösung $\Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = 0$
Auch $\binom{0}{1}$ und$\binom{1}{0}$ sind Lösungen $\Rightarrow a_{11} = a_{12} = \ldots = 0 \Rightarrow \binom{1}{1}$ Lösung

Aufgabe 5

$K = \{0, 1\}$
$0 + 0 = 0 \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad 1 + 1 = 0$
$\cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$

Elementare Zeilenumformungen:

- t_{ij} vertausche Zeilen i und j
- $a_{ij}(c)$ addiere das c-fache von Zeile j zur Zeile i, heute $c = 1$
- $m_i(c)$: multipliziere Zeile i mit c

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right) \xrightarrow{a_{31}(1), a_{41}(1), a_{61}(1), a_{71}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right) \xrightarrow{a_{25}(1), a_{45}(1), a_{75}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right) \xrightarrow{t_{25}, t_{47}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \xrightarrow{a_{63}(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \xrightarrow{a_{65}(1), t_{45}}$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{Zeilen Stufen form Abhängige Variablen: } x_1, x_3, x_4, x_6, x_7$$

Unabhängige Variablen: x_2, x_5, x_8
$x_7 + x_8 = 1 \Leftrightarrow x_7 = 1 + x_8$
$x_6 = 1 + x_7 = 1 + 1 + x_8$
$x_4 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = x_5 + x_8 = x_5 + x_8 + 1 + x_8 + x_8 = 1 + x_5 + x_8$
$x_3 = x_4 + x_6 + x_7 = 1 + x_5 + x_8 + x_8 + 1 + x_8 = x_5 + x_8$
$x_1 = x_2 + x_3 + x_5 + x_7 + 1 = x_2 + x_5 + x_8 + x_5 + 1 + x_8 = x2$

$a : x_2 \quad b : x_5 \quad c : x_8$

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} a \\ a \\ b+c \\ 1+b+c \\ b \\ c \\ 1+c \\ c \end{array} \right) \in K^8 \middle| a, b, c \in K \right\} \Rightarrow 2^3 = 8 \text{ Lösungen}$$

Aufgabe 6

(i)

Ist L die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten über einem Körper K und $s \in K^n$ eine Lösung, dann gilt:

$$L = \{s + u | u \in L_0\},$$

wobei L_0 die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS ist.

Beweis:

$$\text{Sei} \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array} \quad \text{das LGS:}$$

Sei $s \in K^n$ eine Lösung, es gilt also:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}s_1 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}s_1 & + & \ldots & + & a_{mn}s_n & = & b_n \end{array}$$

Sei L die Lösungsmenge und L_0 die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems.

Zu zeigen: $L = \{s + u | u \in L_0\}$
$'' >''$: Sei dann $u \in L_0$ beliebig.

Es gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}u_1 & + & \cdots & + & a_{1n}u_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}u_1 & + & \ldots & + & a_{mn}u_n & = & 0 \end{array}$$

Also

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot(s_1+u_1) & + & \cdots & + & a_{1n}(s_n+u_n) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}\cdot(s_1+u_1) & + & \ldots & + & a_{mn}\cdot(s_n+u_n) & = & b_n \end{array}$$

$\Rightarrow s+u \in L$

$'' <''$ Sei also $s' \in L$ beliebig.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}s_1 & + & \cdots & + & a_{1n}s_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}s_1 & + & \ldots & + & a_{mn}s_n & = & b_n \end{array}$$

Ziehe LGS (mit s) ab:

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot(s_1'-s_1) & + & \cdots & + & a_{1n}\cdot(s_n'-s_n) & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}\cdot(s_1'-s_1) & + & \ldots & + & a_{mn}\cdot(s_n'-s_n) & = & b_n \end{array}$$

$\Rightarrow$ Also: $s'-s$ ist in L_0. Nenne $u := s'-s \Rightarrow s' = s+u$

(ii)

Ein inhomogenes Lineares Gleichungssystem über einem Körper K hat genau dann unendlich viele Lösungen, wenn das zugehörige homogene Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

FALSCH

$L = \{s+u | u \in L_0\}$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (ueber R) \\ L_0 = \left\{ \binom{a}{-a} | a \in R \right\} \end{array}$$

(iii)

Jedes lösbare inhomogene Lineare Gleichungssystem über eine Körper K, das mehr Unbekannte als Gleichungen hat, hat unendlich viele Lösungen.

FALSCH $\rightarrow$ Aufgabe 5

Aufgabe 5

R ein kommutativer Ring, $''0 \neq 1'', R^{nxn}, n \in \mathbb{N}$
Definition:
Ein Element $x \neq 0$ in einem Rin, für das ein Element $y \neq 0$ im selben Ring existiert mit $x \cdot y = 0$ heißt <u>Nullteiler</u>.

(i)

$n = 2$, zu zeigen: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2}$ ist eine Einheit genau dann wenn $ad - bc \in R$ eine Einheit ist.
$'' \Leftarrow''$: Sei zunächst $ad - bc \in R$ eine Einheit, d.h. $i := (ad - bc)^{-1}$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} i \cdot (ad - bc) & 0 \\ 0 & i \cdot (-bc + ad) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$'' \Rightarrow''$ Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Einheit, d.h. es gibt $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in R^{2x2}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
$= aecf + aedh + bgcf + bgdh - ceaf - cebh - dhaf - dgbh$
$= eh(ad - bc) + (-gf)(ad - bc) = (ad - bc)(eh - gf)$

(ii)

$GL_2(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{F}, ad - bc = 1 \right\}$ In $\mathbb{F}_2 : ad - bc = 1 \Leftrightarrow ((ad = 1)$ und $(bc = 0))$ oder $((ad = 0)$ und $(bc = 1)) \Rightarrow 6$ Möglichkeiten.

(iii)

Zu zeigen: Der Ring R^{nxn} ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ.
$n = 2:$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
allgemein:
$R^{nxn} \ni A = (a_{ij}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & fuer j = 2, i = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$

$R^{nxn} \ni B = (b_{ij}$ mit $b_{ij} = \begin{cases} 1 & fuer j = 1, i = 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$
$\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$

(iv)

Der Ring R^{nxn} hat für $n \geq 2$ Nullteiler:
$R^{nxn} \ni A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & fuer i = j = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$
$R^{nxn} \ni B = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \begin{cases} 1 & fuer i = j = 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$
$\Rightarrow A \cdot B = 0$

Aufgabe 6

$(\mathbb{Z}, +)$ Gruppe

(i)

Bestimmen sie alle Untergruppen $0 \cdot \mathbb{Z} = \{0\}$ ist Untergruppe.
Sei $\{0\} \neq U \leq \mathbb{Z}$ eine beliebige Untergruppe. Sei $n \in U$ das kleinste Elment von U, das > 0 ist.

Behauptung:$U = n \cdot \mathbb{Z} = \{nq | q \in \mathbb{Z}\}$
$'' \supset''$: Sei $k \in U$ beliebig.
Dividiere k mit Rest durch $n : k = q \cdot n + r$ mit $0 \leq r < n$
1. Fall: Sei $q \geq 0 : q \cdot n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{q \text{ mal}} \in U$

$\Rightarrow r = k - qn \in U$
$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow k = q \cdot n \in n \cdot \mathbb{Z}$

2. Fall: Sei $q < 0$:
$q \cdot n = (-q) \cdot (-n) = \underbrace{(-n) + \cdots + (-n)}_{(-q) \text{ mal}} \in U$
s.o.
$'' \subset''$ klar, da $n \cdot q = \begin{cases} \underbrace{n + \cdots + n}_{q \text{ mal}} & q \geq 0 \\ \underbrace{(-n) + \cdots + (-n)}_{-q \text{ mal}} & q < 0 \end{cases}$ Antwort: Alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind:
1.) $0 \cdot \mathbb{Z}$ 2.) $n \cdot \mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$, (Bem. n = 1)

(ii)

Wann ist $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}? n, m \in \mathbb{N}$
$0 \cdot \mathbb{Z}$ ist in jeder Untergruppe von $\mathbb{Z}$ enthalten.
Behauptung: $n \cdot \mathbb{Z} \supset m \cdot \mathbb{Z} \Leftrightarrow n|m$
$'' \Rightarrow''$: Sei $n\mathbb{Z} \supset m\mathbb{Z}$
$\Rightarrow m \in n\mathbb{Z}$, d.h. es gibt $q \in \mathbb{Z} : m = q \cdot n$
$'' \Leftarrow''$: Sei $n|m$, d.h. es gibt ein $q \in \mathbb{Z} : n \cdot q = m$
Ist aber $s \cdot m \in \mathbb{Z}$ beliebig, $s \cdot m = s \cdot n \cdot q = (sq) \cdot n \in n \cdot \mathbb{Z}$

(iii)

$0\mathbb{Z}$ ist die einzige, also eine! $\rightarrow$ (i)

(iv)

Eine Untergruppe $M \overset{<}{\neq} G$ heißt <u>maximal</u>, wenn es keine echte Zwischengruppe N gibt, aber $M \overset{<}{\neq} N \overset{<}{\neq} G$.
Also: $m\mathbb{Z}$ ist genau dann maximale Untergruppe von $\mathbb{Z}$, wenn m eine Primzahl ist.
Denn: m keine Primzahl $\Rightarrow$ es gibt $1 \leq n < m$ mit $n|m \Rightarrow n\mathbb{Z} \overset{>}{\neq} m\mathbb{Z}$ und $n\mathbb{Z} \overset{<}{\neq} \mathbb{Z}$

Aufgabe 5

(i)

$V =< v_1, \ldots, v_n >$
Setze $B_0 = \emptyset$.
Für $i = 1, \ldots, n$ sei $B_i = \begin{cases} B_{i-1} \cup \{v_i\}, & \text{falls } v_i \text{ l.u. von } B_{i-1} \\ B_{i-1} & \text{, sonst} \end{cases}$
Behauptung: B_n ist Basis von V
Beweis:
(a) Nach Vorraussetzung jedes $v \in V$ Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$. Nach Konstruktion von B_n ist jedes $v_i (i = 1, \ldots, n)$ Linearkombination der Elemente von B_n.
$\Rightarrow < B_n >= V$
(b)
Sei $B_n = \{v_{i_i 1}, \ldots, v_{i_k}\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k = |B_n|$.
Sei $a_{i_1} \cdot v_{i_1} + \ldots + a_{i_k} \cdot v_{i_k} = 0, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in K$.
Dann ist $a_{i_2} = 0$, denn sonst wäre $v_{i_2} = \frac{1}{a_{i_2}} \cdot \left(-a_{i_1} \cdot v_{i_1} - \ldots - a_{i_k} \cdot v_{i_{l-1}}\right)$ im Widerspruch zur Konstruktion von B_{i_l}
$\Rightarrow$ alle $a_{i_j} = 0 \Rightarrow (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ l.u.

(ii)

Algorithmus:
Konstruiere die B_i wie in (i), $i = 1, \ldots, n$:
Schreibe Zeilen $v_1 \ldots v_n$ in eine Matrix und führe den Gaußalgorithmus durch, allerdings ohne Zeilenvertauschungen und nur mit Addition von Vielfachen vorhergehender Zeilen.

(iii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -7 & -6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -10 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & * & * \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow (v1, v2, v4)$ geordnete Basis von $< v1, v2, v3, v4 > \leq \mathbb{Q}^{1x5}$

Aufgabe 6

(i)

Sei $U \cap W = \{0\}, U + W = V$ und $(u_1, \ldots, u_k)$ geordnete Basis von U und $(w_1, \ldots, w_m)$ geordenete Basis von W.
Behauptung:
$(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ ist geordnete Basis von V.
Beweis: Erzeugendensystem: klar, da $U + W = V$
Sei $a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k + b_1 w_1 + \ldots + b_m w_m = 0$
$\Rightarrow a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k = -b_1 w_1 - \ldots - b_m w_m = 0 \in U \cap W$
$\overset{(u_i) Basis, (w_i) Basis)}{\Rightarrow} a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und $b_i = 0$ für $i = 1, \ldots, m$.

$\Rightarrow (u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m)$ l.u.
Umgekehrt: Wenn $U + W \neq V \Rightarrow$ keine geordneten Basen von U, W haben die gesamte Eigenschaft.

Das kann auch schiefgehen:
Sei $U + W = V$, aber $U \cap W = S \neq \{0\}$
*****Dann wähle $(s_1, \ldots, s_e)$ geordnete Basis von $S, l \geq 1$
Ergänze durch $u_1, \ldots, u_{k-l}$ zu Basis von U
Ergänze durch $w_1, \ldots, w_{m-l}$ zu Basis von W
$\Rightarrow (u_1, \ldots, u_{k-l}, s_1, \ldots, s_l, w_1, \ldots, w_{m_l}, s_1, \ldots, s_l)$
ist <u>keine</u> geordnete Basis von V.

(ii)

z.Z: $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
Seien u_i, s_i, w_i wie in *****.
Behauptung: $(u_1, \ldots, u_{k-l}, s_1, \ldots, s_l, w_1, \ldots, w_{m-l})$ ist geordnete Basis von V.
Beweis:
Sei $U \ni x = a_1 u_1 + \ldots + a_{k-l} u_{k-l} + b_1 s_1 + \ldots + b_k s_l = c_1 w_1 + \ldots + c_{m-1} w_{m-l} \in W$
$\Rightarrow x \in U \cap W \overset{s_1, \ldots, s_l Basis von U, W}{\Rightarrow}$ es gibt eindeutige $b'_1, \ldots, b'_2 : b'_1 s_1 + \ldots + b'_l s_l = x$
Da $u_1, \ldots, u_{k-l}, s_1, \ldots, s_l$ Basis von U, sind $a_1, \ldots, a_{k-l}$ und $b_1, \ldots, b_l$ eindeutig bestimmt. $\Rightarrow a_1 = \ldots = a_{k-l} = 0$ und $b_i = b'_i$ fr $i = 1, \ldots, l$.
Genauso: $c_1, \ldots, c_{m-l} = 0$
$\overset{s_1, \ldots, s_l}{\Rightarrow}$ Basis von S, $b_1 = \ldots = b_l = 0$

$\Rightarrow$ dim-Formel folgt durch Zählen der Basen.

Aufgabe 5

(i)

$(v1, \ldots, v_n)$ mit $v_i \in V, 1 \leq i \leq n$, ist (geordnette) Basis, genau dann, wenn: Zu jedem Tupel $(w_1, \ldots, w_m)$ von Vektoren aus W existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W mit \varphi(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n$.

$'' \Rightarrow''$: Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V.

$\varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \quad (*)$

Ist $(w_1, \ldots, w_n)$ ein beliebiges Tupel von Vektoren aus W, dann:

Schreibe beliebiges $v \in V$ eindeutig als $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und setze $\varphi(v) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \in W$ fest.

$\Rightarrow \varphi : V \to W$ ist Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n$

φ **linear:** $v' \in V \Rightarrow v' = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ mit $\mu_i \in K, 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \varphi(v') = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i w_i, v + v' = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i$

$\Rightarrow \varphi(v + v') = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) w_i = \varphi(v) + \varphi(v') \surd$

$\lambda v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda \cdot \lambda_i \cdot v_i$

$\Rightarrow \varphi(\lambda v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda \cdot \lambda_i \cdot w_i = \lambda \cdot \varphi(v) \quad \surd$

$'' \Leftarrow''$: Es gelte rechte Seite.

z.Z. $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V

$i \neq j$, Beh.: $v_i \neq v_j$, da $w_i \neq w_j$ wählbar $(W \neq \{0\})$ $(v_1, \ldots, v_n)$ sind linear unabhängig. Angenommen $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig, d.h. einer von diesen lässt sich aus den anderen linear kombineren, (nach eventuellen umnummerieren) $v_1 = \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$ für gewisse $\lambda_i \in K, 2 \leq i \leq u$.

Wähle $w_1 \neq \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i w_i \Rightarrow Wiederspruchzur Annahme$

$\Rightarrow (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig. z.Z. $< v_1, \ldots, v_n >= V$

Angenommen: $< v_1, \ldots, v_n > \subset V$

Ergänze zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_n, v_n + 1, \ldots, v_m)$ von V. Sei $(w_1, \ldots, w_n)$ ein Tupel ovn Vektoren aus W. Dann gibt es verschiedene lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i \quad 1 \leq i \leq n$, da ich nach $'' \Rightarrow$ beliebige Bilder für $v_{n+1}, \ldots, v_m$ wählen kann.

$\Rightarrow V =< v_1, \ldots, v_n >$

(ii)

K ein endlicher Körper mit q Elementen. $\dim_K V = n$

Gesucht: anzahl der geordneten Basen? Wieviele Elemente hat V V hat q^n Elemente $[(v_1, \ldots, v_n)$ Basis, die Elemente von V lassen sich eindeutig als LK von v_i schreiben, für jeden Koeffizienten haben wir unabhängig q Möglichkeiten]

- Für den ersten Vektor der geordneten Basis gibt es $q^n - 1$ Möglichkeiten.
- Für den 2. Vektor der geordneten Basis gibt es für jede Wahl des ersten noch $q^n - q^1$ Möglichkeiten.
- Für den 3. Vektor gibt es für jede Wahl der beiden ersten noch $q^n - q^2$ Möglichkeiten.

  $\vdots$
- Für den n. Vektor gibt es für jede Wahlder $n-1$ ersten Vektoren noch $q^n - q^{n-1}$ Möglichkeiten.

$\Rightarrow (q^n - q^0)(q^n - q^1)\cdots(q^n - q^n - 1) = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{i=0}^{n-1}(q^{n-i} - 1)$

0.1 (iii)

$|GL_n(K)|$ K wie in (ii)
Gleiche Antwort wie (ii), denn: $GL_n(K) = \{M \in K^{nxn} | M \text{invertierbar}\}$
$V := K^{nx1}$ $\{\varphi : V \to V | \text{Bild}\varphi = V\}$
Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V.
Benutze (i):
Zu jedem Tupel $(w_1, \ldots, w_n)$ von Vektoren aus V gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(v_i) = w_i, 1 \leq i \leq n$. Bild φ einer solchen Abbildung ist genau dann gleich V, wenn $< w_1, \ldots, w_n >= V$, also wenn $(w_1, \ldots, w_n)$ Basis von V ist.
Also ist $|\{\varphi : V \to V | \varphi \text{linear, Bild } \varphi = V\}|$ = Anzahl der geordneten Basen von V.
Es gilt aber auch gleichviele invertierbaren Matritzen aus K^{nxn} wie geordnete Basen (betrachte die Spalten), weil Rang $M = n$, genau dann, wenn M invertierbar ist.

(Aufgabe 6)

K Körper, $A \in K^{kxm}, B \in K^{mxn}$

(i)

$m = 1, rang(A \cdot B)$
$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ $B = (b_1, \ldots, b_n)$
$A \cdot b = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_kb_1 & \cdots & a_kb_k \end{pmatrix}$ Jede Spalte ist ein Vielfaches von $A \Rightarrow$ rang $(A \cdot B) \leq 1$
Falls $A \neq 0$ und $B \neq 0$: $A \cdot B \neq \Rightarrow$ rang $A \cdot B = 1$
sonst rang $A \cdot B = 0$

0.2 (ii)

Behauptung: Die Zeilen von AB sind Linearkombinationen der Zeilen von B.
$\Rightarrow$ Der Zeilenraum AB ist im Zeilenraum von B enthalten
$\Rightarrow$ rang $AB \leq$ rang B
Genauso: Die Spalten von AB sind Linearkombinationen der Spalten von A

(iii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

R kommutativer Ring,
$D : R^{nxn} \to R$
$D((a_{ij_{1\leq i,j\leq n}})) = \sum\limits_{\pi \in S_n} sgn(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$

0.1 (i)

$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (s_1 s_2 \cdots s_n)$ mit $s_j \in R^{nx1}$
Zu zeigen:

$D(s_1, \ldots, s_{j-1}, as_j + bs'_j, s_j + 1, \cdots, s_n) \quad s'_j = \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{pmatrix} \in R^{nx1}$

$= aD(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_j + 1, \cdots, s_n) + = bD(s_1, \ldots, s_{j-1}, s'_j, s_j + 1, \cdots, s_n)$ ist multilinear

$\Rightarrow as_j + bs'_j = \begin{pmatrix} aa_{1_j} + ba_{1_j} \\ \vdots \\ aa_{n_j} + ba_{n_j} \end{pmatrix}$

Beweis:
$\ldots = \sum\limits_{\pi \in S_n} sgn(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdots a_{pi(j-1),j-1} \cdot (a \cdot a_{\pi(j),j} + b \cdot a'_{\pi(j),j}) \cdot a_{\pi(j+1),j+1} \cdots a_{\pi(n),n}$
$= \sum\limits_{\pi \in S_n} sgn(\pi) \cdot a \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(j-1),j-1} \cdot a_{\pi(j),j} \cdots a_{\pi(n),n}$
$+ \sum\limits_{\pi \in S_n} sgn(\pi) \cdot b \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(j-1),j-1} \cdot a'_{\pi(j),j} \cdots a_{\pi(n),n}$
$\surd$

(ii)

Wie ändert sich die Determinante einer Matrix bei elementaren Umformungen?
Spaltenumformungen: $D(s_1, \ldots, s_{j-1}, a \cdot s_i + s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)$
$= a \cdot D(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_n)(= 0)$
$+ D(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n) \Rightarrow$ Determinante ändert sich nicht bei Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen.

Multiplikation einer Spalte mit einer Konstanten: $D(s_1, \ldots, s_{j-1}, a \cdot s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)$
$= a \cdot D(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)$

Vertauschung von zwei Spalten: $D(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i + s_j, s_{i+1}, s_{j-1}, s_i + s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n) = 0$
$= D(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_n)\} = 0$
$+ D(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)$
$+ D(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_j, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_i, s_{j+1}, \ldots, s_n)$
$+ D(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_j, s_{i+1}, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)\} = 0$
$\Rightarrow$ Wenn man 2 Spalten in A vertauscht, ändert sich das Vorzeichen, der Determinante.
Laut Satz (3.15) gilt $\det(A) = \det(A^t)$ Deswegen:

- Addiert man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen, ändert sich die Determinante nicht.

- Multipliziert man eine Zeile mit einer Konst, so wird die Det. auch mit der Konstante multipliziert
- Vertauscht man 2 Zeilen von A, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Aufgabe 5

Sei K Körper, $A \in K^{n \times n}$
$\Rightarrow$ Es gibt Polynom $0 \neq f(x) \in K[x], degf \leq n^2$ und $f(A) = 0 \in K^{n \times n}$
Beweis: Betrachte das (n^2+1)-Tupel $(E_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$. Weil $dim_k K^{n \times n} = n^2$ ist, ist dieses linear unabhängig. $\Rightarrow$ Es gibt $(a_0, a_1, \ldots, a_{n^2})$ mit $a_i \in K, 0 \leq i \leq n^2$, nicht alle Null, mit $a_0 E_n + a_1 A + \ldots + a_{n^2} A^{n^2} = 0 \in K^{n \times n}$
$\Rightarrow$ Für das Polynom $f(x) = a_0 + a_1 X + \ldots a_{n^2} A^{n^2}$ gilt $f(A) = 0$

Aufgabe 6

Behauptung: $P(K)$ ist K-Algebra.
Beweis:
Zu zeigen:

1. P(k) ist K-VR
2. P(k) ist Ring (mit 1)
3. Für $a \in K, f, g \in P(K)$ gilt: $a \cdot (f \cdot g) = (a \cdot f) \cdot g = f \cdot (a \cdot g)$.

Zu (1.): UVR-Kriterium $P(k) \subseteq K^k \quad P(k) \neq \emptyset$
Seien $f, g \in P(K), a \in K$, etwa $f = (k \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i), g = (k \mapsto \sum_{i=0}^{n} b_i k^i)$
(ohne Einschränkung das gleiche n, durch Anfügen von Nullen.
$\Rightarrow (f - ag) = (k \mapsto \sum_{i=0}^{n} (a_i - a \cdot b_i) k^i) \in P(k)$.

Zu (2., 3.): Die Multiplikation ist punktweise definiert, d.h.: $(f \cdot g) = (k \mapsto f(k) \cdot g(k)) \Rightarrow$ AG, DG, (KG) und auch (3.) klar, wegen der entsprechenden Regeln in K.
$(K \mapsto 1) \in P(K) \Rightarrow$ Einselement $\in P(K)$

Noch zu zeigen: Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation Sei $f = (K \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i), g = (K \mapsto \sum_{i=0}^{m} b_i k_i) \Rightarrow (f \cdot g) = (K \mapsto \sum_{i=0}^{n+m} (\sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq l \leq m \\ j+l=i}}) k^i) \in P(K)$

(ii)

Behauptung: Es gibt ein surj. K-Algebra-Homorphismus $K[x] \to P(K)$
Beweis:
Ein solcher K-Algebra-Homorphismus ist eindeutig festgelgegt durch $\alpha(x)$ Wir können für α mit $\alpha(x) = (k \mapsto K)$ nehmen. Dann ist für jedes $f = (k \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i)$:
$\alpha(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = f$, also $f \in$ Bild α

(iii)

Behauptung: α aus (ii) ist bijektiv $\Leftrightarrow |K| = \infty$
Beweis: $'' \Rightarrow''$: Sei K endlich $\Rightarrow K^K$ endlich $\Rightarrow P(k)$ endlich $\Rightarrow \alpha$ nicht bijektiv, da $K[x]$ nicht endlich ist.

$'' \Leftarrow''$: Sei α nicht injektiv und $\alpha(x) = p = (k \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i k^i)$. $\Rightarrow$ Es gibt $0 \neq f \in K[x]$ mit $\alpha(f) = 0 \in P(K)$. Für $p\ (x) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[x]$ sind dann in $0 \neq f(p\ )(x) \in K[x])$ sämtliche k $\in$ K Nullstelle. $\Rightarrow |K| < \infty$ weil jedes Polynom $\neq 0$ hat endlich viele Nullstellen.

Aufgabe 6

K ein Körper, $A, B \in K^{n\times n}$, so dass A genau n verschiedene Eigenwerte hat und $AB = BA$ gilt.

Zu zeigen: Es gibt eine Invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$, so dass $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ Diagonalgestalt haben.

Beweis: (4.29)(b) $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar, d.h. es existiert ein $T \in K^{n\times n}$, invertierbar, so dass $T^{-1}AT =: D$ eine Diagonalmatrix ist.

$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$ mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$

Behauptung: $T^{-1}BT$ ist Dialogmalmatrix

Beweis: $C := T^{-1}BT \quad CD \stackrel{?}{=} DC$

$(T^{-1}BT)(T^{-1}AT) = T^{-1}BAT - T^{-1}ABT$

$C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

Betrachte i-te Zeile und j-te Spalte in $CD = DC$

$\Rightarrow c_{ij} \cdot d_j = d_i \cdot d_{ij} \Rightarrow c_{ij}(d_j - d_i) = 0$

$\Rightarrow$ für $i \neq j$ ist $c_{ij} = 0$

1 Aufgabe 5

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in Q^{4\times 4}$

Begleitmatrix !!! $\Rightarrow \chi_A = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$

$\Rightarrow$ 1 und -1 Nullstelle

$\Rightarrow (X-1)(X+1) = X^2 - 1 | \chi_A$ Polynomdivision... $X^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (X^2-1)(X^2+2X+1) = (X^2-1)(X+1)^2$

$\Rightarrow \chi_A = (X-1)(X+1)^3$

Eigenwerte von A: 1, -1

Vielfachheit der Nullstelle -1 ist 3

Vielfachheit der Nullstelle 1 ist 1

Eigenraum zum Eigenwert 1:

$(1 \cdot E_n - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß, addiere 2. Zeile zur 3. Zeile, addiere 3. Zeile zur 4. Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Zeilenstufenform!

$$\mathbb{L}\left\{\left.\begin{pmatrix} a \\ 3a \\ 3a \\ a \end{pmatrix}\right| a \in \mathbb{Q}\right\} = V(1,A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Eigenraum zum Eigenwert -1: $(-1 \cdot E_n - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Diese Matrix hat Rang 3.

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge des homogenen LGS hat Dim. 4-3=1.

rate: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = V(-1,A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe 5

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen den Mengen M und N.

(b) Zu zeigen:
Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = id_N$, dann ist f surjektiv.

<u>**Beweis:**</u> Sei $n \in N$ beliebig:
$f(g(n)) = n \Rightarrow n \in f(M) = f(M) = N \Rightarrow f$ surfjektiv

(c) Zu zeigen:
Wenn eine Abbildung: $N \to M$ existiert mit $g \circ f = id_M$, dann ist f injektiv.

Beweis: Seien $m, m' \in M$ beliebig mit $f(m) = f(m')$
$m = g(f(m)) \Rightarrow g(f(m')) = m' \Rightarrow f$ injektiv.

(a) Zu zeigen:
f ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$.

<u>**Beweis:**</u>
$'' \Leftarrow''$ Benutze (b) und (c) $\Rightarrow f$ injektiv und surjektiv, also f bijektiv.
$'' \Rightarrow''$ Sei f bijektiv, also injektiv und surjektiv.
Weil f surjektiv ist, enthält jede <u>Faser</u> $f^{-1}(\{n\})$ (für ein $n \in N$) mindestens ein Element.
Weil f zusätzlich injektiv ist, enthält $f^{-1}(\{n\})$ genau ein Element.

Definiere jetzt g:
$g(n)$ sei <u>das</u> Element $f^{-1}(\{n\})$ für alle $n \in N$. Dann ist $f(g(n)) = n$ für alle $n \in N$. Und $g(f(m)) = m$ für alle $m \in M$, weil m auf $f(m)$ abgebildet wird.

Aufgabe 6:

$$\text{LGS:}\quad \begin{array}{rcrcrcrr} 5x_1 & + & 6x_2 & + & (a+15)x_3 & = & 7 & (I) \\ -x_1 & + & & + & (a-3)x_3 & = & 1 & (II) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 2 & (III) \\ 2_x1 & + & (a+2)x_2 & + & 7x_3 & = & 4 & (IV) \end{array}$$

$(I) = (II) + 3 \cdot (III)$. Damit kann Zeile (I) weggelassen werden.
Addiere $2 \cdot (II)$ auf (III) und (IV).

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & (a-3)x_3 & = & 1 \\ 2_x2 & + & 2a_x3 & = & 4 \quad (III') \\ (a+2)x_2 & + & 2(a+1)x_3 & = & 6 \quad (IV') \end{array}$$

Ziehe (III') vom (IV') ab.

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & (a-3)x_3 & = & 1 \\ 2x_2 & + & 2ax_3 & = & 4 \\ ax_2 & + & x_3 & = & 2 \Leftrightarrow x_3 = 2 - ax_2 \end{array}$$

Setze ein: $\begin{cases} -x_1 & + & (a-3)(2-ax_2) & = & 1 \\ 2x_2 & + & 2a(2-ax_2) & = & 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ausmultiplizieren

$$\begin{cases} -x_1 & + & (-a^2+3a)x_2 & = & -2a+7 \\ & & (2-2a^2)x_2 & = & 4-4a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 & + & (3a-a^2)x_2 & = & 7-2a \\ & & (1-a^2)x_2 & = & 2(1-a) \end{cases}$$

Es gibt 3 Fälle:

Fall 1:

Wenn a ungleich 1 und ungleich -1 ist:
$\Rightarrow x_2 = \frac{2\cdot(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{2}{1+a}(x_1, x_3$ bestimmbar.
$\Rightarrow$ Das LGS ist eindeutig lösbar.

Fall 2:

$a = 1 : \ 0 \cdot x_2 = 0 \quad x_2$ beliebig
$\Rightarrow$ as LGS hat unendlich viele Lösungen (da zu jeden x_2 gibt es ein x_1 und x_3).

Fall 3:

$a = 1 : \ 0 \cot x_2 = 4 \Rightarrow$ keine Lösung.

Aufgabe 5

(i)

Zu zeigen: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
0 \cdot a &\overset{(2)}{=} (0+0) \cdot a \overset{(9)}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a \\
&\Rightarrow -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) = -(0 \cdot a) + (0 \cdot a) + (0 \cdot a) \\
&\overset{(3)}{\Rightarrow} 0 = \overset{(1)}{=} (-(0 \cdot a) + (0 \cdot a)) + 0 \cdot a \\
&\overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = 0 + 0 \cdot a \\
&\overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = \overset{(2)}{0} \ \cdot a \\
&\Rightarrow 0 = 0 \cdot a \overset{(8)}{=} a \cot 0
\end{aligned}
$$

(ii)

Zu zeigen: $a + b = 0, a, b \in K \Rightarrow b = -a$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& a + b = 0 \\
\overset{+(-a)}{\Rightarrow} \quad & (-a) + (a + b) = (-a) + 0 \\
\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad & (-(a) + a) + b = (-a) + 0 \\
\overset{(3),(2)}{\Rightarrow} \quad & b- = -a
\end{aligned}
$$

(iii)

Zu zeigen: $-a = (-1) \cdot a$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& a + (-1) \cot a \\
\overset{(6)}{=} \quad & 1 \cdot a + (-1) \cdot 1 \\
\overset{(9)}{=} \quad & (1 + (-1)) \cot a \\
\overset{(3)}{=} \quad & 0 \cdot a \\
\overset{(ii)}{=} \quad & 0 \\
\overset{(iii) fuer b=(-1) \cdot a}{\Rightarrow} \quad & (-1) \cdot a = -a
\end{aligned}
$$

(iv)

Zu zeigen: $-(-a) = a$ für alle $a \in K$

Beweis:

$(-a) + (-(-a)) \overset{(3)}{=} 0 = \overset{(3)}{=} -a + a \overset{(ii)}{\Rightarrow}$ Behauptung

(v)

Zu zeigen: $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = a^{-1} \quad a, b \in K$

Beweis:

$a \neq 0$ wegen (i) und (6)
$a \cdot b = 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 1 = a^(- 1)$
(vi)
Zu zeigen: $(a^{-1})^{-1} = a \quad 0 \neq a \in K$
Beweis:
$(a^{-1})^{-1} \stackrel{(6)}{=} (a^{-1})^{-1} \cdot 1 \stackrel{(6)}{=} (a^{-1})^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \stackrel{(5)}{=} ((a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a \stackrel{(7)}{=} 1 \cdot a \stackrel{(6)}{=} a$
(vii)
Zu zeigen: $a + b = a$ für alle $a \in K \Rightarrow b = 1$
Beweis:
Vorr. $\stackrel{a=0}{\Rightarrow} 0 + b = 0$
(viii)
Zu zeigen: $acdotb = a$ für alle $a \in K \Rightarrow b = 1$
Beweis:
Vorr. $\stackrel{a=1}{\Rightarrow} 1 \cdot 1 = 1$
(ix)
Zu zeigen: $a \cdot b = 0$ für $a, b \in K \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$
Beweis:
Sei $a \neq 0$ und $a \cdot b = 0$ Zeige: $b = 0$
$stackrel(7) \Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$
(x)
Zu zeigen: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$
Beweis:

$$
\begin{aligned}
(-a) \cdot (-b) &\stackrel{(iii)}{=} ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) \\
&\stackrel{(5),(8)}{=} ((-1) \cdot (-1)) \cdot a \cdot b \\
&\stackrel{(iii}{=} (-(-1)) \cdot (a \cdot b) \\
&\stackrel{(iv)}{=} 1 \cdot (a \cdot b) \\
&\stackrel{(6)}{=} a \cdot b
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

(ii)

Gibt es ein homogenes LGS mit Lösungmenge $\left\{ \binom{x}{y} \in R^2 | x = 0 \text{ oder } y = 0 \right\}$

Antwort: NEIN!

Angenommen es gäbe ein solches LGS: $\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = 0 \\ & \vdots & & \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & = 0 \end{array}$

$\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ sind Lösung
$\binom{1}{1}$ ist Lösung
Wiederspruch!!!

0.1 (ii)

inhomogenes LGS und Lsg. Menge $\left\{ \binom{x}{y} \in R^2 | \binom{x}{y} \neq \binom{1}{1} \right\}$
Antwort: NEIN!

Angenommen es gäbe so ein LGS: $\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & = b_k \end{array}$ Dann ist $\binom{0}{0}$
Lösung $\Rightarrow b_1 = b_2 = \ldots = 0$
Auch $\binom{0}{1}$ und $\binom{1}{0}$ sind Lösungen $\Rightarrow a_{11} = a_{12} = \ldots = 0 \Rightarrow \binom{1}{1}$ Lösung

Aufgabe 5

(i)

Behauptung: Jede Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Beweis: (Durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $n = 1 \qquad M = \{x\}$
M hat folgende Teilmengen:

- $\emptyset \subseteq M$
- $M \subseteq M$

$\rightarrow$ M hat $2 = 2^1$ Teilmengen $\surd$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Verwende: Jede Teilmenge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Zeige: Jede Menge mit $n + 1$ Elementen hat 2^{n+1} Teilmengen.

Sei M eine Menge, die man aus M erhält, indem man x weglässt. Sie hat n Elemente, also 2^n Teilmengen. Diese sind genau die Teilmengen von M, die x nicht mehr enthalten. Die anderen Teilmengen entstehen jeweils durch Hinzunahme von x.

Also: $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

(ii)

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis: (Induktion)

Induktionsanfang: $n = 1 \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \surd$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

Sei Behauptung für n richtig:
Zu zeigen für $n + 1$**:** $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) + (n+1) \overset{\text{Beh.}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \surd$$

(iii)

Bestimme die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis $2^n - 1$

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$
Beweis: (Induktion)
Induktionsanfang: $n = 1 : 1 = 1\surd$
Induktionsschritt: Sei Behauptung für n bewiesen:
Zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\surd$$

Aufgabe 6

M sei eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung.
Zu zeigen:
Es sind äquivalent:

(a) f surfjektiv

(b) f ist injektiv

(c) f ist bijektiv

Beweis:
$''(c) \Rightarrow (a)''$ und $''(c) \Rightarrow (b)''$
sind klar weil ("bijektiv" nach Def. dasselbe ist wie "surjektiv" und "injektiv").
$''(b) \Rightarrow (a)''$:
Sei f injektiv. Das bedeutet: Sind $x, y \in M$ und $x \neq y \Rightarrow$ auch $f(x) \neq f(y)$. Sei n die Anzahl der Elemente von M. Also werden n verschiedene Elemente von f getroffen, also alle. Also ist f surjektiv. $\surd$.
$''(a) \Rightarrow (b)''$:
Sei f surjektiv. Das bedeutet: Zwischen jedem $y \in M$ existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Also gibt es keine 2 Elemente $x, y \in M$ mit $x \neq x'$, aber $f(x) = f(x')$ (sonst höchstens $n-1$ Bidler). Also ist f injektiv.
Dann: Gilt (a) oder (b), dann auch das Andere, also (c).

Folgende Abbildung zeigt, daß die oben bewiesene Äquivalenz nicht für unendliche Mengen gilt:
Sei $g : N \to N, x \mapsto x + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.