1 LA-VDK 23.03.2002 Lösungsideen (A) v1.02

Bitte um Korrekturen und Ergänzungen an klaus.ridder@gmx.de.

Fragen bitte nach rwth.informatik.grunstudium.

1.1 Aufgabe 1

1.1.1 NEIN

Es könnten (bei 3 Unbekannten) z.B. 6 gleiche Zeilen sein.

1.1.2 JA

Sonst hätte es freie Variablen und damit unendlich viele Lösungen.

1.1.3 NEIN

Es könnte 2 Gleichungen mit einem Widerspruch haben, und so keine Lösung haben.

1.2 Aufgabe 2

1.2.1 JA

Bei einer injektiven Abbildung hat jeder Vektor ein anderes Bild. Durch die Linearität werden l.u. Vektoren auch wieder auf l.u. Vektoren abgebildet.

1.2.2 NEIN

Die Nullabbildung z.B. ist surjektiv, der Nullvektor ist l.u., die Vektoren, die auf 0 abgebildet werden, aber nicht unbedingt.

1.2.3 JA

2 beliebige gleich große Mengen von linear unabhängigen Vektoren kann man immer aufeinander abbilden. Man kann z.B. die Vektoren als Basisvektoren ansehen, und die anderen als Liearkombinationen dieser.

1.3 Aufgabe 3

1.3.1 JA

Durch Addition von Polynomen oder Multiplikation mit einem Skalar ändern sich die Potenzen nicht. Damit ist der Untervektorraum abgeschlossen.

1.3.2 JA

"beschränkt" bedeutet hier, dass die Funktion nach oben und unten beschrnkt ist. Bei Addition werden einfach die Schranken addiert, bei Multiplikation einfach mitum den entsprechenden Faktor erhht. klaus.ridder@gmx.de

1.3.3 JA

Die Addition von Matrizen mit dieser Eigenschaft, oder die Multiplikation mit einem Skalar, ändert nichts an dieser Eigenschaft.

1.4 Aufgabe 4

Hier visualisiere ich mir Gegenbeispiele anhand des folgenden Modells:

$\varphi\ V \to W$: Abbildung vom R2 in den R2: Projektion auf eine Linie nach rechts.

$\psi\ W \to V$: Abbildung vom R2 in den R2: Projektion auf eine Linie nach unten.

1.4.1 NEIN

Bei der Kombi-Abbildung geht letztendlich alles auf Null, bei Phi nur die Vektoren, die waagerecht liegen.

1.4.2 JA

Das Bild einer kombinierten Abbildung muss immer ein Teil des Bildes der zuletzt durchgeführten Abbildung sein.

1.4.3 NEIN

Der Kern sind hier alle Vektoren, das Bild der Nullvektor. Das gilt nie.

1.5 Aufgabe 5

1.5.1 JA

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante invertierbar ist. in Z sind nur 1 (inverses 1) und -1 (inverses -1). Beim invertieren einer Matrix wird auch ihre Determinante invertiert, was hier nichts ändert.

1.5.2 JA

Das ist ein ganz wichtiger Satz, daher nochmal: Eine Matrix über dem Körper K ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante invertierbar ist! (Also in R jedes Element außer 0; eine Matrix über R ist also genau dann invertierbar, wenn die Determinante ungleich 0 ist.

1.5.3 NEIN

Es gilt zwar: **det(AB) = det(A) * det(B)** , d.h. wenn die Determinante eines Matrixproduktes ungleich 0 ist, sind beide Einzeldeterminanten ungleich 0 $\rightarrow sindbeideMatrizeninvertierbar \rightarrow habenbeideMatrizenvollenRang, jedochlässtsichproblemloseineinvertierbareMatrixals2nichtinvertierbarenen$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 Aufgabe 6

1.6.1 JA

Das ist ein wichtiger Satz: Eine nxn-Matrix hat mindestens einen Eigenwert, wenn n ungerade ist! Der Grund liegt im charakteristischen Polynom: Deren maximaler Grad ist ja ungerade - und ein Polynom mit maximalem ungeradem Grad hat immer eine Nullstelle in R. (es geht ja von einem Unendlich ins gegensätzlich unendliche).

1.6.2 JA

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind immer linear unabhängig, d.h., der einzige Schnittpunkt der Eigenräume ist der Nullpunkt!

Zum gleichen Eigenwert hingegen können Eigenvektoren beliebig linear kombiniert werden; es bleiben Eigenvektoren.

1.6.3 NEIN

Das ist Unsinn.

1.7 Aufgabe 7

1.7.1

Die Basisvektoren aus B nach der Abbildungsvorschrift abbilden.

1.7.2

Die gefunden Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren des Zielraums abbilden, und die gefundenen Koeffizienten in die Spalten der Abbildungsmatrix schreiben. Abbildunsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 Aufgabe 8

1.8.1

Matrix invertieren, indem man rechts die Einheitsmatrix hinschreibt, links die Matrix auf Einheitsmatrix-Form bringt und rechts die gleichen Schritte parallel durchführt. Rechts steht dann die invertierte Matrix.

1.8.2

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}$ b

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.9 Aufgabe 9

Um den Vektor w$_i$ zu erhalten, muss mann ihn jeweils noch durch seine Länge teilen (normieren):

$x1 = v1$
$x2 = v2 - < v2, w1 > \cdot w1$
$x3 = v3 - < v3, w1 > \cdot w1 - < v3, w2 > \cdot w2$
$x4 = v4 - < v4, w1 > \cdot w1 - < v4, w2 > \cdot w2 - < v4, w3 > \cdot w3$
$x5 = v5 - < v5, w1 > \cdot w1 - < v5, w1 > \cdot w2 - < v5, w3 > \cdot v3 - < v5, w4 > \cdot w4$

$$w1 = \frac{x1}{||x1||}, w2 = \frac{x2}{||x2||}, w3 = \frac{x3}{||x3||}, w4 = \frac{x4}{||x4||}, w5 = \frac{x5}{||x5||}$$

$< v, w >$ ist hier die skalare Multiplikation (also komponentenweise multiplizieren und aufaddieren)

$||x1||$ ist der Betrag, also alles zum Quadrat, aufsummiert, und daraus die Wurzel ziehen.

$$w1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.10 Aufgabe 10

1.10.1 charakteristisches Polynom

det$(-A)$ ausrechnen, faktorisieren. hier: $\chi_A = (\lambda - 3)\ (\lambda - 2)$

1.10.2 Eigenwerte

sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. hier: 2 (doppelt) und 3 (doppelt). Die Vielfachheit (hier doppelt) ist die "algebraische Vielfachheit".

1.10.3 Dimesion der Eigenräume

det$((-A)(x) = (0)$ ausrechnen, wobei für λ der jeweilige Eigenwert ist. Die Dimension der Lösungsmenge dieser Gleichung (=Kern) ist die Dimension des Eigenraums:

dim(Eigenraum) = dim (Kern) = n - Rang(nE$_n$-A)
dim(V(3,A)) = 1 (da Rang der Matrix = 3)

dim(V(2,A)) = 1 (da Rang der Matrix = 3)

1.11 Aufgabe 11

Bei Eigenwert 0 ist das charakteristische Polynom die Determinante der folgenden Matrix (Beispiel 3x3):

$$\begin{pmatrix} a & ab & ac \\ ba & b & bc \\ ca & cb & c \end{pmatrix}$$

Wie leicht zu sehen ist, ist das charakteristische Polynom zum Eigenwert 0 hier Determinante (z.B. nach Sarrus) hier

$$abc + abc + abc - abc - abc = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & ... & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & ... & a_2a_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_na_1 & a_na_2 & ... & a_na_n \end{pmatrix}$$

Beim Eigenwert 0 wird von der Hauptdiagonalen 0 abzegogen, die Matrix bleibt also gleich.

Der Rang dieser Matrix ist 1: Addiere zur i-ten Zeile jeweils das $\left(-\frac{a_i}{a_1}\right)$ -fache der 1. Zeile, Durch das "austauschen" des ersten Faktors durch das Negative des entsprechenenden Faktors in der 1. Zeile ergeben sich bis auf die erste Zeile nur Nullzeilen. Somit hat die Matrix den Rang an.

Der Eigenraum zum EIgenwert 0 ist der Kern, und berechnet sich nach

$$n - dim(A) = \mathbf{n\text{-}1}$$

.

1.12 Aufgabe 12

Die gilt für 1x1-Matrizen. Für alle anderen findet sich z.B. folgendes Gegenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei allen anderen nxn-Matrizen einfach nach rechts und nach unten mit Nullen auffüllen, und A ist ebenfalls nicht gleich A^{T} .

1.13 Aufgabe 13

Da die Matrix invertierbar ist, besitzt sie ein charakteristischen Polynom (ungleich 0). Die Matrix A ist Nullstelle dieses Polynoms. Es gilt also:

$$a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 = 0$$

für passende a_i .

Nach einem Satz ist a_0 +-die Determinante von A, hier also ungleich 0. Bringen wir a0 auf die andere Seite, klammern A aus und multiplizieren das ganze von links mit A^{-1} :

$$a_n A^{n-1} + ... + a_1 = -A^{-1} a_0$$

. Nach Umformung ergibt sich:

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_0} A^{i-1}$$

1.14 Aufgabe 14

zu zeigen ist, dass eine diagonalisierbare Matrix, wenn man sie durch ein beliebiges Polynom schickt, immer noch diagonalisierbar ist.

(diagonalisierbar $\leftrightarrow$ Minimalpolynom zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren)

Nun, wenn die Matrix diagonalisierbar ist, tun wir es doch einfach. Eine Matrix, die nur auf der Diagonalen Elemente ungleich 0 besitzt, kann durch Potanzieren oder Addition nicht aus ihrer Diagonalgestalt gebracht werden. $\rightarrow q.e.d.$
(ist die Frage damit hinreichend beantwortet, oder müsste man das jetzt auch noch zeigen, dass das gilt, ohne die Matrix tatsächlich zu diagonalisieren? Vielleicht damit, dass das Minpoly gleich bleibt? Ideen?)