Scheinklausur 2. Teil, 15.02.2002 - Lösungsideen

1.1: JA,

$$\begin{pmatrix} \lambda-4 & & \\ & \lambda-4 & \\ & & \lambda-4 \end{pmatrix}$$ ergibt z.B. mindestens ein λ^3.

Wenn das μ von 2 Matrizen gleich ist, sind sie Gauss-überführbar. Die Begleitmatrix zum μ mit Grad 1 ist immer $K^{1\times 1}$, d.h. jede Matrix mit μ vom Grad 1 hat den Rang 1.

$\Rightarrow$ Kommutativität. (warum?)

1.2: $\mu_A = x(x^2-6x+9) = (x-0)(x-3)^2$

NEIN: zerfällt nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren. (muss gelten!)

1.3: A einsetzen $\rightarrow \mu = 0$: $\Rightarrow$ $A = 1 = E_n$ $\Rightarrow$ **JA.**

2.1: **JA,** z.B. $m=n$: A ist immer Nullstelle von χ und μ.

2.2: **NEIN**, man kann immer irgendwo eine 1 verstecken, die dann beim Quadrieren wegfällt, z.B.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - E_3\right]^2 = 0 \quad , \text{ da } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

also kann A auch etwas anderes als E_n sein.

2.3: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Sei $\chi_A = x^2 + a_1 x + a_0$.

Nach Vorlesung (4.39) gilt:

$\chi_A = X^n - Sp(A) \cdot X^{n-1} + \ldots + c_1 X + (-1)^n \cdot \det(A)$,

also ist in χ_A: $\boxed{\begin{array}{l} * \quad a_{n-1} = - Sp(A) \\ * \quad a_0 = (-1)^n \cdot \det A. \end{array}}$!

$a_{n-1} = 0$, also $\Rightarrow$ $\chi_A = x^2 + a_0$ ist $(a_0 < 0)$.

in $\mathbb{R}$ hat dies 2 Nullstellen, also 2 verschiedene Eigenwerte. Damit ~~zerfällt~~ hat A n verschiedene Eigenwerte, und ist somit diagonalisierbar.
(da $\chi_A = \mu_A$, und μ_A in paarweise versch. LF zerfällt).

---

ohne Satz (4.39):

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, Spur = 0 $\Rightarrow$ $\chi_A = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ c & \lambda + a \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda + a) - \overset{\neq 0}{\widetilde{bc}}$

$\chi_A = \lambda^2 - a - bc = 0$ Suche Nullstellen:

$\lambda^2 = a + bc \Rightarrow a + bc > 0$
$\Rightarrow$ 2 versch. Nullstellen. $\Rightarrow$ diag'bar.

3.1 JA, eine Basis bekommt auch durch Umsortierung keine doppelten Vektoren.

3.2 JA, jede l.u. Menge von Vektoren lässt sich zu einer Basis erweitern. (Basisergänzungssatz).

3.3 NEIN, man hat immer UW'e aller Dimensionen, zumindest in $\mathbb{R}$. (Begründung?)

4.1 JA: ~~A diagonalisierbar $\Rightarrow$ n versch. EW~~ ~~$\Rightarrow \chi_A = \mu_A$~~

$$
\begin{aligned}
A \text{ diagonalisierbar} &\Leftrightarrow \mu_A \text{ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren} \\
&\Rightarrow \mu_A \text{ ist Teiler von } \chi_A \quad \Downarrow \\
&\Rightarrow \text{nur } 1 \text{ EW} \Rightarrow \mu_A = (X-1) \\
&\Rightarrow A = E_n \quad (\text{siehe } 1.3)
\end{aligned}
$$

4.2 NEIN: $\mu_A = \chi_A$ bedeutet noch lange nicht, daß μ_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

4.3: NEIN: $\mu_A = \chi_A$ heißt nicht, daß χ_A überhaupt in Linearfaktoren zerfällt.

5.1 **JA:** Bei nur 1en und 0en und −1en in der Matrix kann $\det(A)$ nur $\{-1, 0, 1\}$ sein.
Da wir vollen Rang haben, ist $\det(A) \neq 0$.

5.2: **JA** $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

~~Beide Determinanten müssen $\neq 0$ sein, (also beide Matrizen invertierbar)~~

$\det(A \cdot B) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$
$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0$
$\Rightarrow A, B$ beide invertierbar, da

$\boxed{\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertierbar.}}$ in $\mathbb{R}$. und allen anderen Körpern.

$\boxed{\det A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow A \text{ invertierbar.}}$

5.3 **JA**, da $\boxed{\mathrm{sgn}(\pi \circ \pi) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\pi)}$ $\Rightarrow$ positiv.

6.1 **NEIN**, Polynome können durchaus unendlichen Grad haben. (Definition).

6.2 (?) **JA**, Vor. K-Algebren-Homomorphismus:
1.) $\varphi(1) = 1$
2.) $\varphi(v \cdot v') = \varphi(v) \cdot \varphi(v')$

(Weg?) (Begründung?)

6.3 JA, „Primfaktorzerlegung" für Polynome,
Weg: Polynomdivision.

7.1 JA, immer dann, wenn sie nicht orthogonal sind.

7.2 NEIN das Skalarprodukt ist positiv definit $\Rightarrow \beta(v,v) > 0$.
(klar, z.B. $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 1+1+0=2$.) Negative heben sich auf.

7.3 JA orthogonal $\Rightarrow$ l.u.

8.1 JA Eigenvektoren abgebildet bleiben immer im Raum dieser abzubildenden Eigenvektoren!

$\varphi(v) = \underbrace{a}_{\text{nur skalare Multiplikation}} \cdot v$ (a Eigenwert)

8.2 JA „größer 1" = „mindestens 2",
dim (Kern) = dim (Eigenraum zum Eigenwert 0) := dim(V(0,A))
:= dim (V(0,A)) (Schreibweise)

8.3: NEIN nur in $\mathbb{C}$, bzw.
alle ungerade dimensionierte Abbildungen haben einen Eigenwert (auch in $\mathbb{R}$).

8.4. JA Nullstellen von χ_A sind gerade die Eigenwerte, ~~und μ_A ist Teiler von χ_A~~ und μ_A besitzt auch alle diese Nullstellen (ggf. nicht in der gleich hohen Vielfachheit wie χ.)

9.

$$
\begin{array}{ccc|ccc l}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot 3 \quad \cdot 3 \\
3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & \cdot(-2) \oplus \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \cdot(-2) \oplus \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & -5 & 3 & -2 & 0 & \\
0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 & \cdot(-3) \oplus \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & -5 & 3 & -2 & 0 & \oplus \\
0 & 0 & -2 & -6 & -2 & 6 & \cdot(-\tfrac{1}{2}) \quad (-\tfrac{5}{2}) \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & 0 & 18 & 3 & -15 & \cdot(\tfrac{1}{3}) \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 & \\
\hline
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & :2 \\
0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -5 & \ominus \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 & \ominus \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 4 & \\
0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -5 & \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

10. F_3:

$$\chi_A = \det(\lambda E_n - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+1) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(i) $\boxed{\chi_A = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2 - 1)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{array}}$ $\boxed{\chi_A = (\lambda+1)^2 (\lambda-1)^2}$

$\Rightarrow$ Nullstellen $(1, -1)$ mit jeweils ~~einfacher~~ zweifacher Vielfachheit.

(ii) dim(Eigenraum) = $n -$ Rg $(\lambda E_n - A)$ zu diesem Eigenwert:

1.) $x_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} = 3$$

dim Eigenraum $= n - \text{Rg} = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$

2.) $x_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{Rg} = 2 \quad \Rightarrow \dim ER = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$

(iii) Minimalpolynom:

Prüfe folgende Gleichungen, nimm die erste, die $= 0$ ist:

a) $(X-1)(X+1) = 0$

b) $(X-1)^2(X+1) = 0 \qquad (X-1)\cdot(X+1)\cdot(X-1)$

c) $(X-1)(X+1)^2 = 0$

d) $(X-1)^2(X+1)^2 = 0$

zu a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ↯$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mu = (X-1)^2 \cdot (X+1).}}$

(iv) Nein, da das Minimalpolynom nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

11. Falsch: Gegenbeispiel:

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ l.u.}\\[2ex] \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ l.u.}\end{array}\right\} \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ l.a.,}$$

da $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

12.

(i) z.z.: $\varphi(aM+M') = a\,\varphi(M)+\varphi(M')$

$\varphi(aM+M') = (aM+M')\cdot A = aMA + M'A = a\,\varphi(M)\cdot\varphi(M')$

(ii) Bilder der B-Basisvektoren:

$$\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \Rightarrow M_C^B(\varphi)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&1&-1&1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

In den Spalten der Abbildungsmatrix $M_C^B(\varphi)$ stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren von B, dargestellt in der Basis C.

(iii) Basis von Kern(φ):

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}b=d\\a=-c\end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Basis: } \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

(iv) Basis von Bild φ:

Spalten-Gauss auf $M_C^B(\varphi)$:
die l.u. Vektoren bilden das Bild

$M_C^B(\varphi)$ Zeilen-Gauss $\Rightarrow$ l.u. Zeilen = Kern (φ)

$M_C^B(\varphi)$ Spalten-Gauss $\Rightarrow$ l.u. Spalten = Bild (φ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$ ist Basis von Bild (φ).

13. $A \in K^{n \times n}$ $(n \geq 2)$

$\mu_A = X^{n-1}$

z.z: $\chi_A = X^n$

klar ist: $\chi_A = X^{n-1} \cdot (X - k)$ für passendes k, da μ_A Teiler von χ_A ist.

zeige: k muß 0 sein.

1.) Da χ_A in Linearfaktoren zerfällt, ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. Auf deren Diagonale stehen die Eigenwerte: Bis auf einen sind alle 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & * \\ & 0 & & & & \\ & & k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man diese Matrix in μ_A einsetzt, <u>muss</u> 0 herauskommen. Dies gilt nur für $k = 0$ (da sonst an dieser Stelle k^{n-1} stände). $\Rightarrow k = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\chi_A}} = X^{n-1} \cdot (X - 0) = \underline{\underline{X^n}}$$

Denn die Eigenwerte einer Matrix / eines Polynoms stehen immer ~~mit ihr~~ so oft auf der Diagonalen, wie ihre algebraische Vielfachheit ist.

$$(X-2)^3 (X-1)^4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$