Nachholklausur, 4.4.2002

LA 1, Prof. Hiß

1.1 NEIN: Grad ≥ 2, normiert:

$$\mu = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \text{Begleitmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mu = x^2 + 2x + 3$ zerfällt nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren

$\Rightarrow$ ~~nicht~~ Matrix nicht diagonalisierbar.

1.2 NEIN: Satz: diag'bar $\Leftrightarrow D = T^{-1}AT$ mit T invertierbar.

T ist hier aber nicht ~~n~~ zwingend invertierbar.

1.3 JA: $0 \cdot A = A$ gilt nur für die Nullmatrix, und diese ist bereits diagonal (d.h. außerhalb der Hauptdiagonale nur Nullen).

2.1 JA: $\varphi(v) = a \cdot v$; z.B. Diagonalmatrix mit a auf der Diagonalen.

2.2 NEIN: nur ungerade dimensionierte Abbildungsmatrizen haben in jedem Fall einen Eigenwert.

2.3 NEIN: ~~gi~~ 0 einziger Eigenwert kann auch eine lineare Abb. mit einem Kern sein.

3.1 JA, klar.

3.2 NEIN, sie ist $\in \{-1, 0, 1\}$.

3.3 JA Rang nicht voll $\Leftrightarrow$ det = 0.

4.1 NEIN

z.B. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

4.2 JA rg (A) muß gleich Rg (A,b) sein, da sich b als LK von A darstellen lassen muß.

4.3 JA nicht invertierbar $\Leftrightarrow$ 2 Zeilen l.a.
$\Rightarrow$ Widerspruch herstellbar.

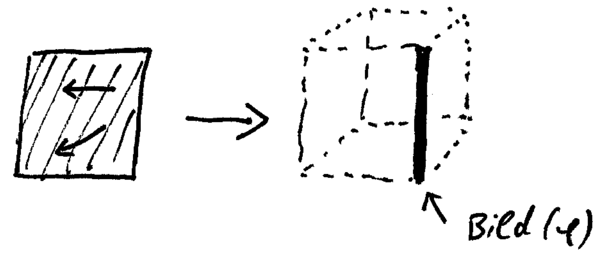
5.1 JA Eine l.a. Gruppe von Vektoren bleibt auch nach Hinzunahme eines Vektors l.a.

5.2 NEIN, sondern nur ein Erzeugendensystem von V: eine Basis muß aus l.u. Vektoren bestehen!

5.3 JA

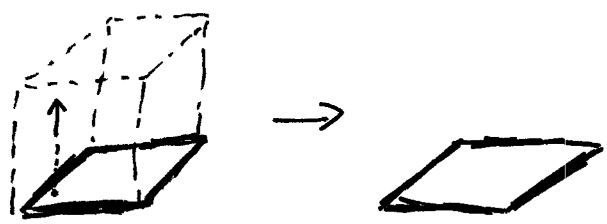
6.* Betrachte als Beispiel:

$\varphi: V \to W \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Projektion nach rechts



φ: Kern sind alle waagerechten Vektoren.

$\psi: W \to V \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: Projektion nach unten,



ψ: Kern sind hier alle senkrecht stehenden Vektoren.

Kern $\psi \circ \varphi$ (zuerst φ, dann ψ) ist offensichtlich der Nullvektor.

6.1 NEIN: Fläche $\notin$ Nullraum.

6.2 JA: Die erste Abbildung kann immer nur maximal den gesamten Zielraum erreichen, damit kann das Bild $(\psi \circ \varphi)$ nie größer sein als das Bild der letzten Abbildung (ψ).

6.3 NEIN: Hier stimmen nicht einmal die Dimensionen.

7.1 JA: $(E-1)=0 \Rightarrow$ charakteristische Polynom. Da es nicht weiter zerlegbar ist, ist es auch das Minimalpolynom.

7.2: NEIN: es kann z.B. $(X-3)(X-4)^2$ sein.

7.3: JA: denn $X(X-1)$ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

8.1 NEIN: $\varphi(0)=1$, muss aber 0 sein.

8.2 NEIN: $\varphi\begin{pmatrix} a x_1 + x_2 \\ a y_1 + y_2 \end{pmatrix} \neq a \cdot \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

8.3 JA

8.4 JA

9.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (n \geq 2)$

$\mu_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)$

(also: μ_A zerfällt in paarweise versch. Linearfaktoren
$\Rightarrow A$ diagonalisierbar)

$\Rightarrow$ Wenn die Matrix diagonalisiert ist, stehen die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen. Diese sind alle Einheitswurzeln, d.h. oft genug potenziert (mit n_a) ergeben sie 1.

z.z: diese Diagonalmatrix oft genug potenziert ergibt die Einheitsmatrix.

Beweis: $\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{pmatrix}^{n_a \cdot n_b \cdot n_c \cdot n_d} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$

da $a^{n_a} = 1$, $k \cdot 1 = 1$.

$x := A$

10.

$f, g \in K[X] \qquad A \in K^{n\times n}$

z.z: $f(A)\cdot g(A) = g(A)\cdot f(A)$

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$g(A) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

$$f(A)\cdot g(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i x^i b_j x^j$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j \underbrace{x^i x^j} \qquad | \; i+j = k$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j X^k$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j X^j X^i$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_j x^j a_i X^i$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

$$= g(A)\cdot f(A)$$

q.e.d.

11.

$A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ $\quad (n \geq 2)$

$\det(A) \neq 0$

$\det(A) \in \mathbb{Z}$ $\quad \Rightarrow$ A ganzzahlig in $\mathbb{Z}$ invertierbar (das Inverse hat auch nur Einträge in $\mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow \det(A) \in \{-1, 0, 1\}$

$\Rightarrow \det(A) = \{-1, 1\}$

da -1 und 1 beide in $\mathbb{Z}$ invertierbar sind, ist auch die Matrix invertierbar.

c_{ij} teilt $\det(A)$, also ist $c_{ij} \in \{-1, 1\}$.

Somit sind die b_{ij}'s unsere Einträge der Matrix, die c_{ij} das Vorzeichen.

A12 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $A^3 = E_n$

z.z: A diagonalisiebar.

Weg: $\Leftrightarrow \mu_A$ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren

$$A^3 = E_n \Rightarrow \underbrace{A^3 - E_n = 0}_{\text{ist Minimalpolynom einer Matrix } A.}$$

Diese stellen wir jetzt auf:
(Begleitmatrix)

$\mu_A = X^3 - 1$

dieses hat 3 versch. Nullstellen:

a) 1

b) $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

c) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

zerfällt in 3 p.v.L.F. $\Rightarrow$ Diagonalmatrix

13.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(nicht verifiziert !!!)