1. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Seien $X, Y \subseteq M$ Mengen. Zeige: $X = Y \iff X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

Aufgabe 2. Sei M eine Menge. Dann heißt $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ eine *Partition* von M, falls gilt:

i) Für alle $X, Y \in \mathcal{P}$ mit $X \neq Y$ gilt $X \cap Y = \emptyset$,

ii) $\bigcup\limits_{X \in \mathcal{P}} X = M$.

Für $m \in M$ sei dann $[m]_{\mathcal{P}}$ definiert als das $X \in \mathcal{P}$ mit $m \in X$.

Bestimme alle Partitionen der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Aufgabe 3. Sei M eine Menge und $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ eine Teilmenge der Potenzmenge mit der Eigenschaft:

$$X \in \mathcal{P} \Longrightarrow M - X \in \mathcal{P}.$$

Zeige: Zu $\mathcal{P}$ gibt es genau eine Partition $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ mit $[x]_{\tilde{\mathcal{P}}} = \bigcap\limits_{\substack{X \in \mathcal{P} \\ x \in X}} X$.

Zeige weiter: Falls $\mathcal{P}$ aus $2n$ Teilmengen ($\neq M, \emptyset$) besteht, dann besteht $\tilde{\mathcal{P}}$ aus m Mengen mit $m \leq 2^n$. (Hinweis: Zerreißen Sie ein Blatt Papier n mal).

Aufgabe 4. Sei M eine Menge mit m Elementen, und N eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Mächtigkeiten (= Anzahl der Elemente) der folgenden Mengen: (i) $\mathrm{Pot}(M)$, (ii) $M \times N$, und (iii) M^N.

Abgabe: Mittwoch, 25.10.2000, in den Übungsgruppen

2. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Seien $f : N \to O$, $g : M \to N$ Abbildungen. Zeige:

i) Sind f und g injektiv, so ist $f \circ g$ injektiv.

ii) Sind f und g surjektiv, so ist $f \circ g$ surjektiv.

iii) Sind f und g bijektiv, so ist $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Aufgabe 2. (σ-Algorithmus, Vertiefung)
Sei M eine endliche Menge, $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeige:

i) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^{n+1}(M) = f^n(M)$. Setze $N := f^n(M)$.

ii) $f_{|N} : N \to N$ ist bijektiv.

iii) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(f_{|N})^m = \mathrm{id}_N$.

Aufgabe 3. Zeige mit Hilfe von Satz 1.22, daß $\mathbb{Z}$ unendlich ist.

Aufgabe 4. Berechne $f \circ g$, $g \circ f$ für folgende Funktionen:

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + x + 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + x - 1$.

ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x + z, -z)$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x, x + y, 3x - y + 2z)$.

Abgabe: Donnerstag, 02.11.2000, nach der Vorlesung

3. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Bilde alle möglichen Matrixprodukte der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4},\ D := \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}.$$

Was hat diese Aufgabe mit der Aufgabe 4 des 2. Übungsblattes zu tun?

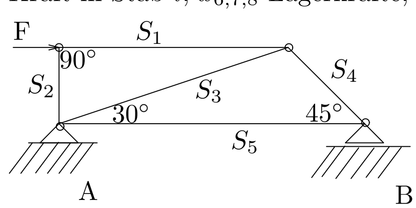
Aufgabe 2. Erinnerung: Für eine Matrix $D \in R^{l\times k}$ sei $D_{i,j}$ der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte, $D_{-,j}$ die j-te Spalte von D, und $D_{i,-}$ die i-te Zeile.
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, und $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Beweise:

1. $C_{i,j} = A_{i,-} \cdot B_{-,j}$.
2. $C_{-,j} = A \cdot B_{-,j}$.
3. $C_{i,-} = A_{i,-} \cdot B$.
4. $C = A_{-,1} \cdot B_{1,-} + A_{-,2} \cdot B_{2,-} + \cdots + A_{-,n} \cdot B_{n,-}$.

Aufgabe 3. Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Physiker: es handelt sich um ein Gleichungssystem, um die Kräfte in dem folgenden Fachwerk zu berechnen: (x_i = Kraft in Stab i, $x_{6,7,8}$ Lagerkräfte, F auf 1 normiert)



Aufgabe 4. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

1. Ein lineares Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist nicht lösbar.
2. Ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten ist lösbar.
3. Ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten ist nicht eindeutig lösbar.

Abgabe: Mittwoch, 08.11.2000, in den Übungsgruppen

4. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Berechne Rechtsinverse für die folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}, C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Welche der Matrizen haben auch ein Linksinverses? Gib eine nichtlineare rechtsinverse Funktion für $\overline{C}$ an.

Aufgabe 2. Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ Matrizen. Zeige:

1. $(A \cdot B)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}$.
2. Sei $n = m = p$ und A, B invertierbar. Zeige: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. (Hinweis: benutze die zugehörigen linearen Abbildungen).

Aufgabe 3.(Interpolation)

1. Bestimme alle Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 5$.
2. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \sin x + b \cos x + c \cos 2x$ mit $f(0) = 1,\ f(\pi/4) = 1,\ f(\pi/2) = -1$.

Aufgabe 4. Seien N, M Mengen, und $\varphi : M \to N$ eine Abbildung. Definiere eine Abbildung $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M : f \mapsto f \circ \varphi$.

1. Zeige: $\widetilde{\varphi}$ ist eine lineare Abbildung.
2. Betrachte für $n, m \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\mathbb{1} : \underline{m} \times \{1\} \to \underline{n} \times \{1\} : (i, 1) \mapsto (1, 1)$. Wie sieht die zu $\widetilde{\mathbb{1}}$ gehörende Matrix aus?
3. Sei $\varphi : \underline{m} \times \{1\} \to \underline{n} \times \{1\}$ eine Abbildung, und A die zu $\widetilde{\varphi}$ gehörende Matrix. Zeige: $A_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ falls } \varphi((j,1))=(i,1) \\ 0 \text{ falls } \varphi((j,1))\neq(i,1) \end{cases}$.
4. Sei $\varphi : \underline{n} \to \underline{n}$ bijektiv. Zeige: $\widetilde{\varphi}$ ist bijektiv mit inverser Abbildung $\widetilde{\varphi}^{-1} = \widetilde{\varphi^{-1}}$.
5. Zeige: unter den Voraussetzung von 3.) und 4.) hat A in jeder Zeile und Spalte genau einen von 0 verschiedenen Eintrag, der 1 ist.

Abgabe: Mittwoch, 15.11.2000, in den Übungsgruppen

5. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Gauß-Algorithmus Gib eine Version des Gauß-Algorithmus für einen beliebigen Körper K an.

Aufgabe 2. Berechne das Inverse der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -2+2i & -i \\ 5+5i & 5 & 2i \\ 2+2i & 2 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, B := \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{5\times 5}, C := \begin{pmatrix} 2&1&1&1 \\ 1&2&0&2 \\ 0&0&0&2 \\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{4\times 4}$$

Aufgabe 3. (Elementare Matrizen) Sei K ein Körper, $\lambda, \gamma \in K$ mit $\gamma \neq 0$. Definiere für $i, j \in \underline{n}$, $i \neq j$ die folgenden Matrizen aus $K^{n\times n}$

$$M_i(\gamma) := \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \gamma && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}, A_i^j(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 && \lambda & \\ &&& \ddots && \\ &&&& 1 & \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}, V_i^j := \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 &&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& 1 &&&& 0 && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}.$$

(wobei $M_i(\gamma))_{i,i} = \gamma$, $(A_i^j(\lambda))_{i,j} = \lambda$ und $(V_i^j)_{i,j} = (V_i^j)_{j,i} = 1$. Nicht markierte Einträge sind 0)

1. Sei $B \in K^{n\times m}$. Interpretiere die Linksmultiplikation $M_i(\lambda)\cdot B, A_i^j(\lambda)\cdot B, V_i^j \cdot B$ als elementare Zeilenoperation auf B. Die Matrizen $M_i(\gamma)$, $A_i^j(\lambda)$, und V_i^j heißen *Elementarmatrizen.*
2. Zeige: $M_i(\gamma), A_i^j(\lambda), V_i^j \in \mathrm{GL}_n(K) := \{X \in K^{n\times n} |$ es existiert $Y \in K^{n\times n}$ mit $XY = I_n\}$.
3. Zeige: $\mathrm{GL}_n(K)$ ist Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation.

Aufgabe 4.

1. Sei $A \in K^{n\times m}$, und N_A die strikte Stufenform von A. Zeige: es gibt ein $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $N_A = g \cdot A$.
2. Zeige: seien $A, B \in K^{n\times m}$ mit strikter Stufenform $N_A = N_B$, so gibt es ein $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $gA = B$.
3. Sei von nun an $K = \mathbb{R}$, und $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Zeige: Für $g \in GL_n(\mathbb{R})$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ gleich der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(g \cdot A)b = g \cdot b$. Insbesondere ändert sich durch Linksmultiplikation von Elementen aus $GL_n(\mathbb{R})$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ nicht.
4. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimme alle möglichen strikten Stufenformen N_A von A.
5. Gib für die Stufenformen aus 4.) die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $N_A x = 0$ an.
6. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Zeige mit Hilfe von 5.) und 3.): $A \sim_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})} B$ (d.h. es gibt ein $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $gA = B$) genau dann, wenn $N_A = N_B$.

Abgabe: Mittwoch, 22.11.2000, in den Übungsgruppen

6. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. (Euklidischer Algorithmus)

1. Kürze $\frac{14568917340}{14568917350}$ vollständig von Hand.

2. Berechne $\mathrm{ggT}(a,b)$ und ein $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = \alpha a + \beta b$ für die folgenden Werte: $a = 17,\ b = 91$; $a = 42,\ b = 101$; $a = 668,\ b = 1001$.

3. Invertiere die folgenden Zahlen: $17 + 101\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$, $39 + 113\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/113\mathbb{Z})$, $83 + 167\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/167\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2. (lineare Codes)

1. Zeige: $\iota : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^{n\times 1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist Isomorphismus.

2. Sei $C \leq \mathbb{F}_2^n$ ein linearer Code. Definiere für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in C$ den Abstand $d(x,y) := |\{i \in \underline{n} | x_i \neq y_i\}|$, und $d(C) := \mathrm{Minimum}(\{d(x,y) | x, y \in C, x \neq y\})$. Zeige: $d(C) = \mathrm{Minimum}(\{d(x,0) | x \in C, x \neq 0\})$. Sowohl d als auch $d(C)$ heißen der Hamming-Abstand von C.

3. Berechne $d(C)$ für $C := \{\alpha(1,0,1,0,1,0,1) + \beta(0,1,1,0,0,1,1) + \gamma(0,0,0,1,1,1,1) \\ |\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_2\}$.

4. Finde eine Matrix $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 7}$ mit $\mathrm{Kern}\bar{A} = \iota(C)$.

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Vektorräume über K.
Zeige: $\mathrm{Hom}(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}) := \{\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W} | \varphi \text{ K-linear}\}$ ist Teilraum von $\mathfrak{W}^{\mathfrak{V}}$.

Aufgabe 4. Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Vektorräume über K, und $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ ein Isomorphismus. Zeige: φ^{-1} ist Isomorphismus.

Aufgabe 5. (Operation) Zeige:

1. Die $S_{\underline{4}}$ operiert auf $\underline{4}^{\underline{4}}$ durch: $S_{\underline{4}} \times \underline{4}^{\underline{4}} : (\nu, f) \mapsto \nu \circ f \circ \nu^{-1}$, d.h. $(\nu f)(i) := \nu(f(\nu^{-1}(i)))$.

2. Die Abbildungen $f : \underline{4} \to \underline{4} : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 2$ und $g : \underline{4} \to \underline{4} : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 3$ liegen in einer Bahn unter dieser Operation.
Hinweis: Betrachte die Visualisierung von f, g gemäß Beispiel 1.14 4) (σ-Algorithmus) und beachte Beispiel 1.17 4).

Abgabe: Mittwoch, 29.11.2000, in den Übungsgruppen

7. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1.(Polynomdivision)

1. Sei $f := x^7 + x^5 + x^3 + 1,\ g := x^5 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Führe Polynomdivision an f und g durch, d. h. berechne $q, r \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} g$ und $f = qg + r$.
2. Sei $f := x^8 + x^5 + x^2 + 1,\ g := x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_{13}[x]$. Berechne den Rest von f mod g, d. h. nur r aus Aufgabenteil 1).
3. Berechne $\operatorname{ggT}(f, g)$ für f, g aus Aufgabenteil 2.).

Aufgabe 2.(Kern und Bild) Bestimme Kern und Bild der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{5\times 5},\ B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{5\times 4},\ C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{4\times 3}$$

Wie ist jeweils die Anzahl der Elemente von Kern und Bild?

Aufgabe 3. Beweise Folgerung 2.50 der Vorlesung, d. h. sei K ein Körper, $K[x]$ der Polynomring in x über K, und $0 \neq p \in K$ vom Grad n. Zeige:

1. $pK[x] := \{pq | q \in K[x]\}$ ist ein Teilraum von $K[x]$.
2. Der Faktorraum $K[x]/pK[x]$ hat $K[x]_{\mathrm{Grad}<n}$ als Vertretersystem.
3. $K[x] = K[x]_{\mathrm{Grad}<n} \oplus pK[x]$.
4. Sei $p = x^5 - 1 \in \mathbb{F}_5[x]$. Zerlege $x^6 - 1$ in eine Zerlegung gemäß 3.).

Aufgabe 4. Sei $\pi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ linear mit $\pi^2 = \pi$.

1. Zeige: $\mathrm{Kern}\pi \cap \mathrm{Bild}\pi = \{0\}$.
2. Zeige: $\mathfrak{V} = \mathrm{Kern}\pi \oplus \mathrm{Bild}\pi$, d. h. jedes $V \in \mathfrak{V}$ läßt sich eindeutig schreiben als $V = V_K \oplus V_B$, mit $V_K \in \mathrm{Kern}\pi$, $V_B \in \mathrm{Bild}\pi$.
3. Sei $\mathfrak{V} = \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ und $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zerlege $V := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gemäß 2.) als $V = V_K \oplus V_B$.
4. Sei K unendlich, und $\mathfrak{V} = K^{3\times 1}$. Gib unendlich viele π an mit $\mathrm{Bild}\pi = K\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\pi^2 = \pi$. Gib unendlich viele π an mit $\mathrm{Kern}\pi = K\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\pi^2 = \pi$.

Sonderaufgabe für Physiker. Betrachte $\partial_x : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x] : \sum a_i x^i \mapsto \sum i a_i x^{i-1}$. Zeige zunächst, daß ∂_x linear ist. Sei $m_p : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x] : f \mapsto pf$ für $p \in \mathbb{C}[x]$ die Multiplikation mit p. Zeige: $\partial_x \circ m_x - m_x \circ \partial_x = m_1 = id_{\mathbb{C}[x]}$. Interpretation: Es handelt sich um eine Darstellung der Heisenberg-Algebra und ist eine embryonale Version der Heisenberg-Unschärfe-Relation der Quantenmechanik.

Abgabe: Mittwoch, 6.12.2000, in den Übungsgruppen

Lösung zum 1. Test: T1: JNJNN, T2: JNN, T3: NJNJN, T4: NNJ, T5: JJN, T6: JJN.

8. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Bestimme die Dimension der folgenden Vektorräume:

1. $\langle (2,3,4),(3,2,0),(0,0,1)\rangle \leq \mathbb{Q}^3$
2. $\langle (2,3,4),(3,2,0),(0,0,1)\rangle \leq \mathbb{F}_5^3$
3. $\langle (0,\sqrt{2},0),(0,1,1),(0,0,2),(1,0,0)\rangle \leq \mathbb{R}^3$
4. $\langle (0,\sqrt{2},0),(0,1,1),(0,0,2),(1,0,0)\rangle \leq \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Aufgabe 2. Seien $\mathfrak{V},\mathfrak{W}$ Vektorräume über K, $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ linear. Weiter sei $X = (X_1,\ldots,X_n) \in \mathfrak{V}^n$ linear unabhängig. Zeige: $\langle X\rangle \cap \operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$ genau dann, wenn $\varphi \circ X = (\varphi(X_1),\ldots,\varphi(X_n))$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3. (Lagrange-Interpolation) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und $s_1,\ldots,s_n \in K$ paarweise verschieden.

1. Zeige: $\varphi : K[x] \to K^n : p \mapsto (p(s_1),\ldots,p(s_n))$ ist linear.
2. Sei $\lambda_i := \prod_{\substack{j\in \underline{n} \\ j\neq i}} (x - s_j) \in K[x]$. Zeige: $\operatorname{Grad}\lambda_i = n-1$, und $\lambda_i(s_k) = a_k\delta_{ik}$ für ein $a_k \neq 0$.
3. Zeige: Die Einschränkung $\varphi_{|K[x]_{\mathrm{Grad}<\mathrm{n}}}$ ist surjektiv.
4. Zeige: $\varphi_{|K[x]_{\mathrm{Grad}<\mathrm{n}}}$ ist injektiv.
5. Zeige: $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ist Basis von $K[x]_{\mathrm{Grad}<\mathrm{n}}$.
6. Gib ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$, $\operatorname{Grad} p < 4$ an mit $p(0)=3, p(1)=2, p(2)=-1, p(3)=4$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K. Für $p \in K[x]$ sei $m_p : K[x] \to K[x] : g \mapsto pg$.

1. Zeige: Für $q \in K[x]$ ist die Abbilddung $\overline{m_p} : K[x]/qK[x] \to K[x]/qK[x] : g+qK[x] \mapsto m_p(g)+qK[x]$ wohldefiniert und linear.
2. Zeige: $\overline{m_p}$ ist Isomorphismus genau dann, wenn $ggT(p,q) = 1$.
3. Betrachte $q := x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{Q}[x]$. Stelle $(\overline{m_{x^2+1}})^{-1}$ als $\overline{m_g}$ dar für $g \in \mathbb{Q}[x]$.
4. Betrachte $q := x^4+x^2+2 \in \mathbb{F}_3[x]$. Stelle $(\overline{m_{x^3+x^2+1}})^{-1}$ als $\overline{m_g}$ dar für $g \in \mathbb{F}_3[x]$.

Abgabe: Mittwoch, 13.12.2000, in den Übungsgruppen

9. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1.(Rang) Bestimme den Rang der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3},\ B := \begin{pmatrix} 1\,3\,0\,2 \\ 2\,5\,2\,1 \\ 6\,7\,1\,0 \\ 3\,4\,5\,6 \\ 1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{5\times 4},\ C := \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{6\times 6},$$

Aufgabe 2.(Zassenhausalgorithmus) Seien $\mathfrak{V} = \langle (1,2,3,4),(3,1,2,0),(1,1,1,1)\rangle \leq \mathbb{F}_5^4$ und $\mathfrak{U} = \langle (0,1,2,3),(2,1,2,1)\rangle \leq \mathbb{F}_5^4$. Bestimme Basen für $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}+\mathfrak{V}$. Ist $\mathbb{F}_5^4 = \mathfrak{U}\oplus\mathfrak{V}$?

Aufgabe 3. In **dieser** Aufgabe identifizieren wir **ausnahmsweise** die Polynome mit den durch sie induzierten Polynomabbildungen! Sei $C^\infty(\mathbb{R}) := \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | y \text{ ist beliebig oft differenzierbar}\}$. Sei $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) : y \mapsto y'' + y' + y$. Betrachte $B = (1, x, x^2, x^3, x^4) \in C^\infty(\mathbb{R})^5$. Zeige: B ist linear unabhängig, $\varphi(\langle B\rangle) \subseteq \langle B\rangle$ und berechne ${}^B(\varphi_{|\langle B\rangle})^B$.
Gib eine Lösung der (linearen, gewöhnlichen) Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten) $y'' + y' + y = x^4 + 2x + 3$ an.
Bemerkung: Dies ist eine rudimentäre Version des "Ansatz in Form der rechten Seite".

Aufgabe 4. Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ Vektorräume über K, $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ lineare Abbildung, und $\operatorname{Rang}\varphi = k$, $\operatorname{Dim}\mathfrak{V} = n$, $\operatorname{Dim}\mathfrak{W} = m$. Zeige: Es gibt Basen C von $\mathfrak{W}$ und B von $\mathfrak{V}$ mit:

$${}^C\varphi^B = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{m-k,k} & 0_{m-k,n-k} \end{pmatrix},$$

wobei I_k die k-dimensionale Einheitsmatrix ist, und $0_{i,j} \in K^{i\times j}$ die Nullmatrix mit i Zeilen und j Spalten ist.
Hinweis: (Wähle und ergänze geeignete Basen von $\operatorname{Bild}\varphi$ und $\operatorname{Kern}\varphi$.).
Sei $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ gegeben durch

$${}^C\varphi^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{13}^{3\times 4}$$

Bestimme B', C' durch Angabe von ${}^B\mathrm{id}^{B'}$, ${}^C\mathrm{id}^{C'}$, so daß ${}^{C'}\varphi^{B'}$ obige Gestalt hat.

Abgabe: Donnerstag, 21.12.2000 nach der Vorlesung
Lösung von Test 3: T1: JJNNJ, T2: NNJNJN, T3: JJJNN, T4: NNNJNN

10. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Sei $\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1+3x_2, x_1+x_2+x_3+x_4, x_2+x_4, x_1)$. Seien $C = ((1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,1,-1,1),(2,-3,2,2))$, $D = ((0,-1,0,0),(0,-1,-1,0),(3,1,2,1),(2,-1,1,1)) \in (\mathbb{Q}^4)^4$. Zeige: C und D sind Basen des $\mathbb{Q}^4$, und berechne ${}^C\varphi^C$, ${}^C\varphi^D$, ${}^D\varphi^C$ und ${}^D\varphi^D$.

Aufgabe 2. Sei $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ gegeben bezüglich der Basen $B = (V_1, \ldots, V_4)$ von $\mathfrak{V}$ und $C = (W_1, \ldots, W_5)$ von W mit

$$ {}^C\varphi^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{5\times 4} $$

Bestimme eine lineare Abbildung $\psi : \mathfrak{W} \to \mathbb{F}_2^{(5-\mathrm{Dim\,Bild}\,\varphi)\times 1}$, so daß Kern ψ = Bild φ. Bestimme die Mächtigkeit der Menge $\{W_1+\mathrm{Bild}\,\varphi, W_1+W_3+W_4+\mathrm{Bild}\,\varphi, W_1+W_2+W_5+\mathrm{Bild}\,\varphi\} \subseteq \mathfrak{W}/\mathrm{Bild}\,\varphi$.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{V}$, gegeben durch

$$ {}^B\varphi^B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}. $$

Berechne das Minimalpolynom von φ. Bestimme die Eigenwerte von φ und eine Eigenvektorbasis C. Wie sieht dann ${}^C\varphi^C$ aus?

Aufgabe 4. (Bemerkung 3.46 der Vorlesung) Beweisen Sie: Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, und sei $n \in \mathbb{N}$.

1. GL($\mathfrak{V}$) operiert auf $\mathfrak{V}^n$ durch

$$ \mathrm{GL}(\mathfrak{V}) \times \mathfrak{V}^n : (a, X) \mapsto a \circ X = (a(X_1), \ldots, a(X_n)). $$

2. Sei für $X \in \mathfrak{V}^n$

$$ \varphi_X : K^{n\times 1} \to \mathfrak{V} : a \mapsto Xa = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n. $$

   Dann ist die surjektive Abbildung A (wie Abhängigkeiten)

$$ A : \mathfrak{V}^n \to \left\{\mathfrak{U} \le K^{n\times 1} | \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{U}) \ge n - \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{V})\right\} : X \mapsto \mathrm{Kern}\,\varphi_X $$

   eine trennende Invariante der Operation aus 1.). Insbesondere gibt es eine Bijektion zwischen

$$ \mathfrak{V}^n/\sim_A = \mathfrak{V}^n/\sim_{\mathrm{GL}(\mathfrak{V})} \text{ und } \left\{\mathfrak{U} \le K^{n\times 1} | \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{U}) \ge n - \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{V})\right\}. $$

Abgabe: Mittwoch, 10.1.2001 in der Übung
Wir wünschen frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2001!

11. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Minimalpolynome μ_{A_i} für die folgenden Matrizen A_i.

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{5\times 5},\ A_2 := \begin{pmatrix} 2&0&0\\ 2&2&1\\ -2&0&1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ A_3 := \begin{pmatrix} -1&0&0\\ 5&2&1\\ 4&0&1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

Welche der Matrizen sind diagonalisierbar? Welche Diagonalformen ergeben sich in diesen Fällen? Kann man diese immer alleine am Minimalpolynom erkennen?

Aufgabe 2. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4&0&4&1&0\\ 1&2&2&4&3\\ 2&0&2&2&4\\ 1&1&1&0&3\\ 2&2&4&3&3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{5\times 5}$$

Es ist $\mu_{\overline{A}} = (x^2+x+1)(x^2+x+2)(x+2)$ (Dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Berechnen Sie analog zu Satz (3.65) aus der Vorlesung eine Zerlegung von $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2 \oplus \mathfrak{V}_3$, mit $\overline{A}(\mathfrak{V}_i) = (\mathfrak{V}_i)$. Berechnen Sie die Minimalpolynome $\mu_{\overline{A}_{|\mathfrak{V}_i}}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie Begleitmatrizen M_{p_i} der folgenden Polynome

$$\begin{aligned} p_1 &:= x^5 - 3x^4 - 4x + 12 \in \mathbb{R}[x],\\ p_2 &:= x^5 - 4x^4 + x^3 + 8x^2 - 6x \in \mathbb{R}[x],\\ p_3 &:= x^5 - 4x^4 + x^3 + 8x^2 - 6x \in \mathbb{Q}[x]. \end{aligned}$$

Welche der Begleitmatrizen sind diagonalisierbar? Auf welche Diagonalgestalt?

Aufgabe 4. (vgl. Beispiel 3.59) Sei $\mathfrak{V}$ ein 2-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $B = (b_1, b_2)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$, und $\alpha : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ eine lineare Abbildung mit ${}^B\alpha^B = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte von α, und eine Eigenvektorbasis B'.

Wir betrachten jetzt verschiedene Konkretisierungen des vorangegangenen Sachverhaltes:

1. (formal analytisches Beispiel) Sei $\partial : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]] : \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$. Suchen Sie einen ∂-invarianten Teilraum $\mathfrak{V} \leq \mathbb{C}[[x]]$ (d.h. $\partial(\mathfrak{V}) \subseteq \mathfrak{V}$), so daß α die Einschränkung von ∂ auf $\mathfrak{V}$ ist. Ist $\mathfrak{V}$ eindeutig bestimmt? Geeignet normiert nennt man die Vektoren der ursprünglichen Basis B sin und cos.

2. (kombinatorisches Beispiel) Sei $\sigma : \mathbb{C}[[x]] \to \mathbb{C}[[x]] : \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^{j-1}$. Suchen Sie einen σ invarianten Teilraum $\mathfrak{V}$ von $\mathbb{C}[[x]]$, so daß α die Einschränkung von σ auf $\mathfrak{V}$ ist. Ist $\mathfrak{V}$ eindeutig bestimmt?

Abgabe: Mittwoch, 17.1.2001 in der Übung

12. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Minimalpolynom, die Eigenwerte und eine Eigenvektorbasis von $\overline{A}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{V} := \mathbb{R}[x]_{\text{Grad}<3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad < 3, und $\Phi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathbb{R} : (p_1, p_2) \mapsto \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$. Zeige zunächst, daß Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{V}$ ist. Ist Φ auch inneres Produkt? Sei $B := (1, x, x^2)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$. Berechen Sie ${}_B\Phi^B$, $\Phi(B_1 + 2B_2 + B_3, B_1 + B_3)$, und eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{V}$.

Aufgabe 3. (vgl. Beispiel 3.67) Sei $\mathfrak{V}$ ein K-Vektorraum, $\varphi \in \text{End}(\mathfrak{V})$ mit Minimalpolynom $\mu_\varphi = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$, wobei die $p_i \in K[x]$ normiert, irreduzibel und paarweise verschieden seien. Zeige:

1. $\mathfrak{V}_i := \text{Kern}\,(p_i(\varphi)^{\alpha_i})$ ist φ invarianter Teilraum von $\mathfrak{V}$, d.h. $\varphi(\mathfrak{V}_i) \subseteq \mathfrak{V}_i$.
2. Setze $q_j := \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{l} p_i^{\alpha_i}$, dann ist $\mathfrak{V}_i = \text{Bild}\,(q_i(\varphi))$.

Nach Vorlesung ist nun $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{V}_l$, und man kann die $\mathfrak{V}_i$ wahlweise über 1.) oder 2.) berechnen. Sei $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ gegeben durch

$${}^B\varphi^B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{5\times 5}.$$

Es ist $\mu_\varphi = (x-1)(x+1)^4$. Berechne eine Zerlegung von $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2$ mit $\varphi(\mathfrak{V}_i) = \mathfrak{V}_i$, und $\text{Dim}\,\mathfrak{V}_i > 0$.

Aufgabe 4. Beweise Folgerung 3.70 der Vorlesung: Sei $\mathfrak{V}$ ein K-Vektorraum, $\alpha \in \text{End}(\mathfrak{V})$. Sei $\mu_\alpha = \Pi_{i=1}^l p_i(x)$ mit $p_i(x) \in K[x]$ normiert und irreduzibel. Genau dann existiert eine Basis B von $\mathfrak{V}$ mit

$${}^B\alpha^B = \text{Diag}(I_{r_1} \otimes M_{p_1}, \ldots, I_{r_l} \otimes M_{p_l}),$$

wenn die p_i paarweise verschieden sind.

Sei nun $\mathfrak{V} = \mathbb{F}_2^{5\times 1}$, und $\alpha = \overline{A}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mu_\alpha = (x-1)(x^2+x+1)$. Berechne eine Basis B von $\mathbb{F}_2^{5\times 1}$, so daß ${}^B\alpha^B$ die obige Gestalt hat, und gib ${}^B\alpha^B$ an.

Abgabe: Mittwoch, 24.1.2001 in der Übung

13. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein 3-dimensionaler euklidischer Raum mit ${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ für eine Basis B von $\mathfrak{V}$. Zeige, daß die folgenden linearen Abbildungen selbstadjungiert sind:

$$
{}^B\varphi^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad {}^B\psi^B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 2.(Hauptachsentransformation) Sei

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.
$$

Bestimme eine orthogonale Matrix $O \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ so, daß $O^{-1}AO$ Diagonalgestalt hat.
Hinweis für Physiker: Es handelt sich um den Trägheitstensor eines starren Körpers. Die Eigenwerte heißen die Hauptträgheitsmomente.

Aufgabe 3. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ selbstadjungiert. Weiter sei Φ_α positiv definit, d.h. alle Eigenwerte von α sind positiv. Zeige: es gibt genau ein positiv definites, selbstadjungiertes $\gamma \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$, so daß $\gamma^2 = \alpha$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^{n\times 1}$ der n-dimensionale euklidische Vektorraum mit dem Standartskalarprodukt. Zeige: $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R}^{n\times n} | x^{tr}x = I_n\}$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation (also eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$).
Zeige weiter: sind B und C Orthonormalbasen von $\mathfrak{V}$, so ist ${}^B(id_{\mathfrak{V}})^C$ eine orthogonale Matrix. Genauer: Schränkt man die Operation von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf $\mathfrak{V}^n$ auf $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ ein, so bilden die Orthogonalbasen genau eine Bahn unter dieser Operation.

Abgabe: Mittwoch, 31.1.2001 in der Übung
Lösung zum Test 4: T1: JNJNN, T2: JNNJJNNJ, T3:NJ x^3 N

14. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. (Polarzerlegung) Sei

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme ein $g \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ und ein positiv definites, symmetrisches $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß $B = A \cdot g$ ist. Sind A und g eindeutig?
Zeige weiter: ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ normal, so gibt es (genau) ein $g \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ und ein positiv definites, symmetrisches $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B = Ag$, und es gilt $Ag = gA$.

Aufgabe 2. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein Euklidischer Vektorraum. Zeige: $\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}^* : V \mapsto \{W \mapsto \Phi(V, W)\}$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 3. (Transponierte) Sei $\mathfrak{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum, $\mathfrak{W}$ ein 3-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum, und B und C Basen von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$. Sei $\alpha : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ linear mit

$${}^{C}\alpha^{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $\psi_1 : \mathfrak{W} \to \mathbb{F}_3 : aC_1 + bC_2 + cC_3 \mapsto a+b+c$, $\psi_2 : \mathfrak{W} \to \mathbb{F}_3 : aC_1 + bC_2 + cC_3 \mapsto 2a+b+2c$, $\psi_3 : \mathfrak{W} \to \mathbb{F}_3 : aC_1 + bC_2 + cC_3 \mapsto a+b$. Zeige: $C'^* := (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ist Basis von $\mathfrak{W}^*$, und berechne ${}^{B^*}(\alpha^{tr})^{C'^*}$

Aufgabe 4. Seien $\mathfrak{V} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum differenzierbarer, 2π periodischer Funktionen mit der Eigenschaft, daß $f' \in \mathfrak{V}$ für alle $f \in \mathfrak{V}$.
Zeige $\mathfrak{V}$ wird durch $\Phi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$ zu einem Euklidischen Vektorraum.
Sei $\alpha : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V} : f \mapsto f' \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$. Zeige mit Hilfe der Produktregel (partielle Integration), daß α schiefsymmetrisch ist. Sei $\mathfrak{V} =< 1_{\mathbb{R}}, s_1, s_2, s_3, c_1, c_2, c_3 >$, wobei $1_{\mathbb{R}} : R \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$. $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(kx)$, $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cos(kx)$. $\mathfrak{V}$ ist ein Vektorraum wie oben beschrieben, und $B = (1_{\mathbb{R}}, s_1, s_2, s_3, c_1, c_2, c_3)$ ist eine Basis von $\mathfrak{V}$ (dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Berechnen Sie ${}^{B}\alpha^{B}$, μ_α, und eine Orthonormalbasis B' von $\mathfrak{V}$, so daß ${}^{B'}\alpha^{B'}$ die Form aus Satz 4.30 hat.

Abgabe: Mittwoch, 7.1.2001 in der Übung

15. Gruppenübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1. Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} x+2 & 1 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3(x)^{3\times 3},\ B := \begin{pmatrix} 0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0 \\ 0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1 \\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{5\times 5},\ C := \begin{pmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{V} = \langle s_1, s_2, c_1, c_2, id_{\mathbb{R}} \rangle \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, wobei $s_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(kx)$, $c_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(kx)$. Seien $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^{\pi/2} f(x)dx$, $\psi : \mathfrak{V} \to \mathbb{R} : f \mapsto f'(0)$.

1. Zeige: $\varphi, \psi \in \mathfrak{V}^*$.

2. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Bestimme alle $f \in \mathfrak{V}$ mit $\varphi(f) = a$, $\psi(f) = b$. Zeige: Die Lösungsmenge ist eine Restklasse nach $\langle \varphi, \psi \rangle^{\intercal}$.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $X \in \mathfrak{V}^{n-1}$. Definiere: $\varphi_X := \mathfrak{V} \to K : Y \mapsto \det(X, Y)$, wobei $(X, Y) : \underline{n} \to \mathfrak{V} : i \mapsto \begin{cases} X_i & \text{für } i<n \\ Y & \text{für } i=n \end{cases}$. Zeige:

1. $\varphi_X \in \mathfrak{V}^*$,

2. $\varphi_X = 0$ genau dann, wenn X linear abhängig.

3. Ist X linear unabhängig, so ist $\operatorname{Kern} \varphi_X = \langle \varphi_X \rangle^{\intercal} = \langle X \rangle$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{V}$ ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End}(\mathfrak{V})$. Sei $0 \neq \Delta \in \Lambda^n(\mathfrak{V}^*)$, dann definiere $\det(\varphi) := \frac{\Delta(\varphi \circ C)}{\Delta(C)}$ für eine Basis C von $\mathfrak{V}$. Zeige: det ist unabhängig von der Wahl von Δ und C, und $\det \varphi = \det({}^C\varphi^C)$ für jede Basis C von $\mathfrak{V}$.
Sei nun $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein Euklidischer Vektorraum, und $\alpha \in \mathrm{O}(\mathfrak{V}, \Phi)$. Zeige:

1. $\det \alpha = \pm 1$.

2. Ist $\dim \mathfrak{V} = 2$ und $\det \alpha = 1$, so gibt es ein $\gamma \in [0, 2\pi)$ mit ${}^B\alpha^B = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} := d_\gamma$ für jede Orthonormalbasis B von $\mathfrak{V}$.

3. Ist $\dim \mathfrak{V} = 3$, und $\det \alpha = 1$, so gibt es eine Orthonormalbasis B von $\mathfrak{V}$ und ein $\gamma \in [0, 2\pi)$ mit ${}^B\alpha^B = \operatorname{diag}(1, d_\gamma)$. Hinweis: Zeige zunächst $\det({}^B\alpha^B - I_3) = \det(({}^B\alpha^B - I_3)({}^B\alpha^B)^{-1}) = (-1)^3 \det({}^B\alpha^B - I_3)$. Folgere hieraus, daß α den Eigenwert 1 hat.

Abgabe: Donnerstag, 15.1.2001 nach der Vorlesung

Ferienübung zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS00/01)**

Aufgabe 1.(Algorithmus zur Berechnung des charakteristischen Polynoms) Sei K ein Körper, und $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$. Zeige:

1. Ist $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ ein Teilraum von $\mathfrak{V}$ mit der Eigenschaft, daß $\alpha(\mathfrak{U}) \leq \mathfrak{U}$, so ist $\overline{\alpha} : \mathfrak{V}/\mathfrak{U} \to \mathfrak{V}/\mathfrak{U} : V + \mathfrak{U} \mapsto \alpha(V) + \mathfrak{U}$ eine wohldefinierte lineare Abbildung. Also ist $\alpha_{|\mathfrak{U}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{U})$ und $\overline{\alpha} \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}/\mathfrak{U})$.
2. $\chi_\alpha = \chi_{\overline{\alpha}} \cdot \chi_{\alpha_{|\mathfrak{U}}}$. Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von $\mathfrak{U}$ zu einer Basis B von $\mathfrak{V}$, und betrachten Sie die Gestalt von ${}^B\alpha^B$.
3. Erweitern Sie die Aussage von 2.) auf die Situation $\mathfrak{U}_1 \leq \mathfrak{U}_2 \leq \ldots \leq \mathfrak{V}$, $\alpha(\mathfrak{U}_i) \leq \mathfrak{U}_i$.
4. Geben Sie einen Algorithmus zur iterativen Bestimmung des charakteristischen Polynoms an, analog zur Bestimmung des Minimalpolynoms. Wo unterscheiden sich die beiden Algorithmen?

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basen B und C, und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ mit:

$$ {}^B\alpha^C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; {}^B\mathrm{id}^C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. $$

Berechnen Sie die Determinante von α.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, B eine Basis von $\mathfrak{V}$, $\Phi \in \mathrm{Bifo}(\mathfrak{V})$ gegeben durch:

$$ {}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. $$

Zeige:

1. $\Phi \in \mathrm{Bifo}_-(\mathfrak{V})$.
2. Φ ist nicht ausgeartet.
3. Ist $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$, so ist $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} + \mathrm{Dim}\,\mathfrak{U}^\perp = 4$.
4. Ist $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ mit $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} = 1$, so ist $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{U}^\perp$.
5. Für $\mathfrak{U} = \langle B_1 + 2B_2 + 3B_3 + 4B_4, B_1 - B_2 + B_3 - B_4 \rangle$ ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}^\perp$.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis B, und $\Phi_i \in \mathrm{Bifo}_+(\mathfrak{V})$ gegeben durch

$$ {}_B\Phi_1^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, {}_B\Phi_2^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{pmatrix}. $$

Berechnen Sie die Signatur von Φ_1 und Φ_2.

Abgabe: In der ersten Übung zur Vorlesung Lineare Algebra II
Eine Musterlösung zur Klausur (wesentliche Teile) befindet sich im Internet unter
http://wwwb.math.rwth-aachen.de/WS00/LA_I/LA_I.html