

LA Zusammenfassung

4. Februar 2001

Vom Minimalpolynom bis Multilinearformen

1 3.50 Def Minimalpolynom

1. Für $A \in K^{n \times n}$ und $P = p(x) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in K[x]$ Sei $p(A)$ definiert als $p(A) := a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_dA^d$ weiter heisst $K[x] \rightarrow K^{n \times n} : p \mapsto p(A)$ der Einsetzungshomomorphismus zu A und das normierte Polynom $\mu_A(x) = p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$ minimalen Grades mit $p(A) = 0$ heisst das Minimalpolynom von A.

2 3.51 Bemerkung

1. Der Grad des Minimalpolynoms von A ist das kleinste $d \in \mathbf{N}$ mit (I_n, A, \dots, A^d) linear abhängig. Insbesondere ist das Minimalpolynom wohldefiniert.
2. Das Minimalpolynom, genauer $\mu : K^{n \times n} \rightarrow K[x] : A \mapsto \mu_A(x)$ ist eine Invariante der Konjugationsoperation von $GL(n, K)$ auf $K^{n \times n}$.
3. Sei $\alpha \in \text{End}(V), b \in V^n$ Basis von V und $A = {}^B \alpha^B \Rightarrow \mu_\alpha(x) = \mu_A(x)$
4. Ist $p \in K[x]$ das Minimalpolynom von α bzw. von A. so ist der Kern des Einsetzungshom. gleich $pK[x]$. Insbesondere ist das Bild des Einsetzungshomomorphismus von der Dimension = Grad $p(x)$

3 3.53 Begleitmatrix

Eine Begleitmatrix zu einem Minimalpolynom $P = p(x) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in K[x]$ wird nach dem folgenden Schema aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in K^{d \times d}$$

4 3.55 Def Eigenvektor

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$, (V e.e. K-VR)

1. Ein $a \in K$ heisst Eigenwert von α falls ein Vektor $v \neq 0$ ex. mit $\alpha(v) = av$.
In diesem Fall heisst v Eigenvektor und $E_\alpha(a) = E(a) := \text{Kern}(\alpha - a\text{Id}_V)$
der Eigenraum vom Eigenwert a von α
2. Ist E eine Basis von V aus Eigenvektoren von α , so heisst E eine α -
eigenvektorbasis oder einfach Eigenvektorbasis von V .
3. Entsprechend für Matrizen $A \in K^{n \times n}$

5 3.57 Lemma

$\alpha : V \rightarrow V$ lin., V e.e. K-VR $\{0\} \neq U \leq V$ mit $\alpha(U) \leq U$ Setze $\beta : U \rightarrow U : u \mapsto \alpha(u)$
 $\Rightarrow \mu_\beta(x) | \mu_\alpha(x)$

6 3.58 Satz

$\alpha \in \text{End}(V)$, (V e.e. K-VR) $a \in K$ EW von $\alpha \Leftrightarrow a$ Wurzel des Minimalpolynoms $\mu_\alpha(x)$
($\mu_\alpha(a) = 0$)

7 3.61 Def

1. Seien U_1, \dots, U_n K-VR Die äussere dir. Summe der U_i ist definiert als $U_1 \oplus \dots \oplus U_n = \bigoplus_{i=1}^n U_i = \{(u_1, \dots, u_n) | u_i \in U_i, i = 1, \dots, n\}$ mit $a(u_1, \dots, u_n) := (au_1, \dots, au_n), a \in K, u_i \in U_i$
2. Der K-VR V heisst (inner) direkte Summe der Teilräume $U_1, \dots, U_n \leq V$ falls $\bigoplus_{i=1}^n U_i \rightarrow V : (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n$ ein Isomorphismus ist, d.h. jedes $v \in V$ kann eindeutig als $V = u_1 + \dots + u_n$ mit $u_i \in U_i$ geschrieben werden.
3. $\pi \in (\text{End}(V))^n$ heisst eine Zerlegung der Identität (in orthogonale Projektionen), falls gilt
 $\pi_i \circ \pi_j = \delta_{ij} \pi_i, 1 \leq i, j \leq n$ und $\text{Id}_V = \pi_1 + \dots + \pi_n$ Ist $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$
 $B^i \in (U_i)_{d(i)}$ Basis von $U_i \forall i \Rightarrow B = (B_1^{(1)}, \dots, B_{d(1)}^{(1)}, B_1^{(2)}, \dots, B_{d(2)}^{(2)}, \dots, B_{d(n)}^{(n)}) \in V^l$ mit $l = d(1) + \dots + d(n)$ ist eine Basis von V , eine solche Basis heisst angepasst.

8 3.62. Lemma

1. Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$. Dann definiert $\pi_i : V \rightarrow V : u_1 + \dots + u_n \mapsto u_i (u_i \in U_i)$ mit $i = 1 \dots n$ eine Zerlegung der Identität mit $U_i = \text{Bild} \pi_i$

(π_1, \dots, π_n) heisst die zur direkten Summenzerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ assoziierte Zerlegung der Identität.

2. Ist $\pi \in (\text{End}(V))^n$ eine Zerlegung der Identität, so gilt $V = \bigoplus_{i=1}^n \text{Bild}(\pi_i)$ und π ist die zur dieser direkten Summenzerlegung assoziierte Zerlegung der Identität.

9 3.63. Satz

Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ eine dir. Summenzerlegung mit assoz. Zerl. $\pi \in (\text{End}(V))^n$ der Identität und $\alpha \in \text{End}(V)$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) $\alpha(U_i) \leq U_i \forall i = 1, \dots, n$
- (b) $\alpha \circ \pi_i = \pi_i \circ \alpha \forall i = 1, \dots, n$ (In diesem Fall : α ist verträglich mit der Zerlegung)

1. Ist α verträglich mit der Zerlegung und ist $B = (B_1^{(1)}, \dots, B_{d(1)}^{(1)}, B_1^{(2)}, \dots, B_{d(2)}^{(2)}, \dots, B_{d(n)}^{(n)})$ eine angepasste Basis mit $B^{(i)} \in (U_i)^{d(i)} \forall i$
 $\Rightarrow \alpha = \text{Diag}(B_1^{(1)}, \dots, B_{d(1)}^{(1)}, B_1^{(2)}, \dots, B_{d(2)}^{(2)}, \dots, B_{d(n)}^{(n)})$
wobei $\alpha_i : U_i \rightarrow U_i : u \mapsto \alpha(u)$

10 3.64. Satz

Sei V ein e.e. K -VR und $\alpha \in \text{End}(V)$ mit Minimalpolynom $\mu(x) = \mu_\alpha(x)$ vom Grad d .

Genau dann existiert eine Basis aus EV, wenn μ genau d verschiedene Wurzeln s_1, \dots, s_d hat.

11 3.65 Satz

Sei V ein e.e. K -VR und $\alpha \in \text{End}(V)$ mit Minimalpolynom $\mu_\alpha(x) \in K[x]$

1. ist $\mu_\alpha(x) = p_1(x)p_2(x)$ mit $p_1, p_2 \in K[x]$ teilerfremd und normiert ($ggT(p_1, p_2) = 1$)
 \Rightarrow es existiert eine mit α verträgliche dir. Summenzerlegung $V = T_1 \oplus T_2$, so dass $\alpha_i : T_i \rightarrow T_i : T \mapsto \alpha(T)$ MinPol $p_i(x)$ hat.
Insbesondere hat ${}^B \alpha^B$ Blockdiagonalgestalt für angepasste Basen.
2. Ist $\mu_\alpha(x) = \prod_{i=1}^n p_i, p_i \in K[x]$ paarweise teilerfremd und normiert \rightarrow ex. eine mit α verträgliche dir. Summenzerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^n T_i$, so dass $\alpha_i := \alpha|_{T_i} : T_i \rightarrow T_i$ Minimalpolynom p_i hat.

12 3.66 Lemma

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ mit irreduziblem Minimalpolynom $\mu_\alpha(x) \in K[x]$ vom Grad $d = \text{Dim } V$.

Ist $v \in V - \{0\}$

$\Rightarrow B := (v, \alpha(v), \dots, \alpha^{d-1}(v))$ ist eine Basis von V und ${}^B\alpha^B =$ Begleitmatrix von $\mu_\alpha(x)$

13 3.68 Algorithmus

Gegeben : $\alpha \in \text{End}(V)$, V e.e. K -VR.

Gesucht : Das Minimalpolynom $\mu_\alpha(x)$

Algorithmus:

1. Wähle $v \in V - \{0\}$
2. Bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\alpha,v}(x)$ von v durch Testen wann $((v), (v, \alpha(v)), (v, \alpha(v), \alpha^2(v), \dots))$ erstmals l.a. wird.
Ist $a \in K^{(n+1) \times 1}$ die erste lin. Abhängigkeit mit $a_{n+1} = 1$ also $(v, \alpha(v), \dots, \alpha^n(v)) \cdot a = 0$
 $\Rightarrow \mu_{\alpha,v}(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + x^n$
Setze $W = \langle v, \alpha(v), \dots, \alpha^n(v) \rangle$ und $\mu(x) = \mu_{\alpha,v}(x)$.
3. Solange $W \neq V$, wähle $v \in V - W$
Bestimme das MinPol $\mu_{\alpha,v}(x)$
Ersetze $\mu(x)$ durch $\text{KGV}(\mu(x), \mu_{\alpha,v}(x)) = \frac{\mu(x) \cdot \mu_{\alpha,v}(x)}{\text{ggT}(\mu(x), \mu_{\alpha,v}(x))}$ und W durch $W + \langle v, \alpha(v), \alpha^2(v), \dots \rangle$
Falls $W \neq V$, wiederhole Schritt 3.
4. Sobald $W=V$ ist, gilt $\mu(x) = \mu_\alpha(x)$.

14 3.69 Satz

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ mit irreduziblem Minimalpolynom $\mu_\alpha(x)$

$\Rightarrow \text{Grad}(\mu_\alpha(x)) \mid \text{Dim } V$

weiter ex. eine Basis B von V mit ${}^B\alpha^B = I_r \otimes M_p := \text{Diag}(\underbrace{M_{\mu_\alpha}, \dots, M_{\mu_\alpha}}_r)$

wobei $r \cdot \text{Grad}(\mu_\alpha) = \text{Dim } V$ und M_{μ_α} die Begleitmatrix zu μ_α ist.

15 3.70 Folgerung

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ mit MinPol $\mu_\alpha(x) = \prod_{i=1}^l p_i(x)$ mit $p_i(x) \in K[x]$ irred. und normiert. Genau dann existiert eine Basis B mit

${}^B\alpha^B = \text{Diag}(I_{r_1} \otimes M_{p_1}(x), \dots, I_{r_l} \otimes M_{p_l}(x))$

wenn die p_i paarweise verschieden sind. Siehe Ü 12.

16 3.71 Lemma

Ein normiertes Polynom $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ ist genau dann irreduzibel (in $\mathbf{R}[x]$) falls $p(x) = x - a$ für ein $a \in \mathbf{R}$ oder $p(x) = x^2 + ax + b$ für $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a^2 - 4b < 0$

17 4.1 Def Inneres Produkt

Sei V ein \mathbf{R} -VR

1. Eine symmetrische Bilinearform Φ auf V ist eine Abb
 $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ mit
 $\Phi(v, w) = \Phi(w, v) \forall v, w \in V$ und
 $\Phi(v, aw_1 + bw_2) = a\Phi(v, w_1) + b\Phi(v, w_2) \forall v, w_1, w_2 \in V$ Die Abb. $V \rightarrow \mathbf{R} : v \mapsto \Phi(v, v)$ heisst die von Φ induzierte quadratische Form.
2. Ein inneres Produkt oder eine positiv definite Bilinearform oder ein pos.def. Skalarprodukt auf V ist eine symm. Bilinearform Φ auf V mit $\Phi(v, v) > 0 \forall v \in V - \{0\}$
3. Ist $\dim V < \infty$ und Φ ein inneres Produkt auf V , dann heisst (V, Φ) ein Euklidischer VR oder ein endlich dim. Hilbertraum.
4. $\mathbf{R}_{sym}^{n \times n} = \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} | A^{tr} = A\}$ bezeichnet die Menge der symmetrischen Matrizen über \mathbf{R} . $A \in \mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$ heisst positiv definit falls $x^{tr} Ax > 0 \forall x \in \mathbf{R}^{n \times 1} - \{0\}$

Klar: symm. Bilinearform ist in beiden Komponenten linear.

18 4.2 Beispiel

1. $V = \mathbf{R}^n$
 $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R} : (v, w) \mapsto v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ ist ein inneres Produkt, Standardskalarprodukt.
Allg. $V = \mathbf{R}^{m \times n}$
 $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R} : (A, B) \mapsto \text{Spur}(AB^{tr})$ inneres Produkt, genannt Standardskalarprodukt auf $\mathbf{R}^{m \times n}$
2. Sei $V \leq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ein VR von stetigen Funktionen.
 $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R} : (f, g) \mapsto \int_{-1}^2 f(x)g(x)dx$.
Falls $\int_{-1}^2 f(x)^2 dx > 0 \forall f \in V, f \neq 0$, dann ist Φ ein inneres Produkt (z.B. wenn V aus Polynomfunktionen besteht.)
3. Sei V ein \mathbf{R} -VR, e.e und $B \in V^n$ Basis von V .
Für $A \in \mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$ ist $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R} : (v, w) \mapsto (v^B)^{tr} A w^B$ eine symm. Bilinearform.
 Φ inneres Produkt $\Leftrightarrow A$ positiv definit, (z.B. $A = I_n$)

19 4.3 Satz

Sei V ein \mathbf{R} -VR mit Basis $B \in V^n$ und $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ symm. Bilinearform

Notation: ${}_B\Phi^B : \underline{n} \times \underline{n} \rightarrow \mathbf{R} : (i, j) \mapsto \Phi(B_i, B_j)$

heisst die Grammatrix von Φ bez. B

Es gilt: ${}_B\Phi^B \in \mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$ und für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\Phi(v, w) = v_B \cdot {}_B\Phi^B \cdot w \text{ mit } v_B := (v^B)^{tr}.$$

20 4.4 Folgerung

Sind $B, C \in V^n$ Basen von V , und Φ Bilinearform auf V

$$\Rightarrow {}_C\Phi^C = ({}^B id_V^C)^{tr} \cdot ({}_B\Phi^B) \cdot ({}^B id_V^C)$$

21 4.5 Definition

Sei (V, Φ) Eukl. VR.

1. Das Paar $(x, y) \in V^2$ heisst orthogonal falls $\Phi(x, y) = 0$
2. Eine Basis $B \in V^n$ von V heisst Orthogonalbasis, falls $\Phi(B_i, B_j) = 0 \forall i \neq j$ d.h. ${}_B\Phi^B$ ist eine Diagonalmatrix.
3. Eine Basis $B \in V^n$ heisst Orthonormalbasis, kurz ON-Basis, falls $\Phi(B_i, B_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \underline{n}$, d.h. ${}_B\Phi^B = I_n$.

22 4.6 Satz

Sei $B \in V^n$ eine ON-Basis des Eukl.VR (V, Φ)

Für $v \in V$ gilt:

$$v = \Phi(B_1, v)B_1 + \dots + \Phi(B_n, v)B_n$$

$$\text{d.h. } v^B = \begin{pmatrix} \Phi(B_1, v) \\ \vdots \\ \Phi(B_n, v) \end{pmatrix}$$

$\Phi(B_i, v)$ heisst der i -te Fourierkoeffizient von V bez. ON-Basis B .

Beweis: Sei $V = a_1B_1 + \dots + a_nB_n = B \cdot a$

$$\Rightarrow \Phi(B_i, V) = a_1 \underbrace{\Phi(B_i, B_1)}_0 + \dots + a_i \underbrace{\Phi(B_i, B_i)}_1 + \dots + a_n \underbrace{\Phi(B_i, B_n)}_0 = a_i, \text{q.e.d}$$

Ist $B \in V^n$ Orthogonalbasis $\Rightarrow B' \in V^n$ ON-Basis, wobei $B'_i := \Phi(B_i, B_i)^{-1/2} \cdot B_i$

23 4.7 Satz

Ist (V, Φ) ein Eukl.VR mit Basis $B \in V^n \Rightarrow \exists$ ON-Basis B' von V mit

$$\langle B'_1, \dots, B'_i \rangle = \langle B_1, \dots, B_i \rangle \forall i \in \underline{n}$$

Beweis(Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren):

Es genügt, eine Orthogonalbasis zu konstruieren, die später normiert werden kann.

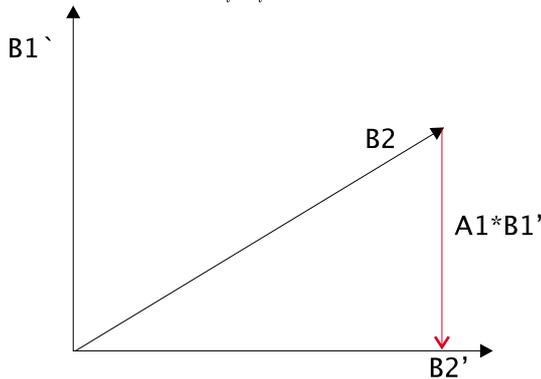
Setze $B'_1 := B_1$. Angenommen, B'_1, \dots, B'_{k-1} schon konstruiert.

Ansatz: $B'_k = a_1 B'_1 + \dots + a_{k-1} B'_{k-1} + 1 \cdot B_k$ (damit $\langle B'_1, \dots, B'_k \rangle = \langle B_1, \dots, B_k \rangle$ automatisch erfüllt)

Bestimme $a_1 : 0 = \Phi(B'_1, B'_k) = a_1 \Phi(B'_1, B'_1) + 0 + \dots + 0 + \Phi(B'_1, B_k)$

$$\text{d.h. } a_1 = -\frac{\Phi(B'_1, B_k)}{\Phi(B'_1, B'_1) > 0}$$

$$\text{analog } a_i = -\frac{\Phi(B'_i, B_k)}{\Phi(B'_i, B'_i) > 0}$$



24 4.9 Folgerung :Chalesky - Zerlegung

25 4.10 Satz Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Sei (V, Φ) ein Eukl. VR und $v, w \in V \Rightarrow \Phi(v, v)\Phi(w, w) - (\Phi(v, w))^2 \geq 0$ mit Gleichheit \Leftrightarrow wenn (v, w) l.a.

26 4.11 Definition

1. Für $v \in V$ heisst $|v| := \sqrt{\Phi(v, v)}$ die Länge von v .
2. Für $(v, w) \in V^2$ mit $v \neq 0$ und $w \neq 0$ ist der Winkel $\angle(v, w)$ mit $0 \leq \angle(v, w) \leq \pi$ durch $\cos(\angle(v, w)) = \frac{\Phi(v, w)}{|v||w|}$ definiert.

27 4.12 Satz Dreiecksungleichung

Sei (V, Φ) ein Eukl. VR und $v, w \in V \Rightarrow |v + w| \leq |v| + |w|$

28 4.13 Definition

(V, Φ) ein Eukl. VR. Für $M \subseteq V$ heisst $M^\perp := \{v \in V \mid \Phi(w, v) = 0 \forall w \in M\}$ der Orthogonalraum von M .

29 4.14 Satz

Sei (V, Φ) ein Eukl. VR und $U \leq V \Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

Insbesondere $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Die Projektionen π_U und π_{U^\perp} in der Zerlegung von V in Orthogonalräume werden Orthogonalprojektionen genannt (auf U bzw. auf U^\perp). Ist $v \in V \Rightarrow |\pi_{U^\perp}(v)| = \min\{\|v-u\| \mid u \in U\}$ wird durch genau einen Vektor angenommen, nämlich $\pi_U(v)$ (=: Beste Approximation von V an U).

30 4.16 Satz

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ Dann ex. ein eindeutiges $\alpha^{ad} \in \text{End}(V)$ mit $\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\alpha^{ad}(v), w) \forall v, w \in V$.

α^{ad} heisst die zu α adjungierte lineare Abbildung.

Ist $B \in V^n$ Basis von V , so gilt:

$${}^B(\alpha^{ad})^B = ({}^B\Phi^B)^{-1} ({}^B\alpha^B)^{tr} ({}^B\Phi^B)$$

31 4.17 Definition

$\alpha \in \text{End}(V)$ heisst selbstadjungiert oder symmetrisch, falls $\alpha^{ad} = \alpha$
 $\Phi(\alpha(v), w) = \Phi(v, \alpha(w))$.

32 4.18 Beispiel

Eine Orthogonalprojektion, also ein $\pi \in \text{End}(V)$ mit $\pi^2 = \pi$ eind. $(\text{Kern}(\pi))^\perp = \text{Bild}(\pi)$ ist selbstadjungiert. Umgekehrt klar: jede selbstadjungierte Projektion $\pi \in \text{End}(V)$ ist eine Orthogonalprojektion. Dann sei $v \in \text{Kern}(\pi), w \in \text{Bild}(\pi) \Rightarrow$

$$\Phi(w, v) = \Phi(w, \pi(v)) = \Phi(\pi(w), v) = \Phi(0, v) = 0$$

33 4.19 Bemerkung

Ist $\alpha \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert $\Rightarrow \Phi_\alpha : V \times V \rightarrow \mathbf{R}(v, w) \mapsto \Phi(v, \alpha(w))$ ist eine symmetrische Bilinearform.

α heisst positiv definit falls Φ positiv definit.

Umgekehrt: $\psi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ symm. Bilinearform

$\Rightarrow \exists$ ein eind. $\alpha = \alpha^{ad} \in \text{End}(V)$ mit $\psi = \Phi_\alpha$.

Für eine Basis $B \in V^n$ gilt: ${}^B\Phi_\alpha^B = {}^B\Phi^B \cdot {}^B\alpha^B$

insbesondere B ON-Basis $\Rightarrow {}^B\Phi_\alpha^B = {}^B\alpha^B$

34 4.20

$\in \mathbf{R}^{n \times n}$ heisst orthogonal, falls $g^{tr}g = I_n$, d.h. g ist invertierbar mit $g^{-1} = g^{tr}$. Die Menge aller orthogonalen Matrizen von Grad n wird mit $O_n(\mathbf{R})$ bezeichnet

und heisst die orthogonale Gruppe vom Grad n über \mathbf{R} .

35 4.21 Hauptsatz - Reeller Spektralsatz

1. Ist $\alpha \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert, (V, Φ) Eukl. VR, so ex. eine ON-Basis aus Eigenvektoren von α .
2. (Matrixversion): Ist $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ symmetrisch, so ex. orthogonale Matrix $g \in O(n, \mathbf{R})$ mit $g^{tr} A g = g^{-1} A g$ diagonal.

Beweis :Matrixversion folgt sofort aus der Nichtmatrixversion.

1. Schritt: Das Minimalpolynom $\mu_\alpha(x)$ von α ist vielfachheitenfrei.
 Genügt zu zeigen: $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ mit $p(\alpha)^2 = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$. [$p(\alpha)^{tr} = p(\alpha^{tr})$]
 . Aber mit α ist auch $p(\alpha)$ selbstadj: $\Rightarrow p(\alpha)^2 = p(\alpha)^{ad} \circ p(\alpha)$
 In Matrixform bez. ON-Basis B: $A = {}^B \alpha^B (= A^{tr})$
 $p(A)^2 = p(A)^{tr} \cdot p(A)$
 Also $p(\alpha)^2 = 0 \Rightarrow p(A)^{tr} p(A) = 0 \Rightarrow p(A) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$.
 Konsequenz : (π_1, \dots, π_k) Zerlegung der Id_V in orthogonale Projektionen π_i mit $\pi_i = p_i(\alpha)$.
 $\alpha|_{\text{Bild}\pi_i} = \alpha_i$ hat irreduzibles MinPol $p_i(x) \in \mathbf{R}[x] | p_i$ paarw. verschieden.
 $V = \text{Bild}\pi_1 \oplus \dots \oplus \text{Bild}\pi_k$
2. Schritt: Hat ein selbstadj Endomorphismus irred. Minimalpolynom \Rightarrow Grad=1 (insbesondere Grad $p_i = 1$).
 Irreduzible Polynome in \mathbf{R} haben grad 1 oder 2.
 Schliesse Grad 2 aus:
 Angenommen, Grad=2 \Rightarrow ex. $v \in VR$ mit $\underbrace{(v, \alpha(v))}_{2\text{-diminvar. Teilraum}}$ l.u und
 $(v, \alpha(v), \alpha^2(v))$ l.a.
 Wähle ON-Basis von $\langle v, \alpha(v) \rangle$
 $\alpha|_{\langle v, \alpha(v) \rangle}$ liefert symmetrische Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$
 $\Rightarrow x^2 - (a^2 + b^2)$ ist das MinPol zur Irreduzibilität.
 Widerspruch, da zerlegbar in $(x - \sqrt{a^2 + b^2})(x + \sqrt{a^2 + b^2})$
3. Schritt (Zusammenfassung):
 Wir haben eine Zerlegung von V in die Eigenräume $\text{Bild}(\pi_i)$ von α . Indem wir von jedem $\text{Bild}(\pi_i)$ eine ON-Basis hernehmen und zu einer Basis von V zusammenfügen, bekommen wir eine ON-Basis aus Eigenvektoren von α , denn $\text{Bild}\pi_i$ ist orthogonal zu $\text{Bild}(\pi_j) | (I \neq j)$.
 Bew: mit α ist auch $q_i(\alpha = \pi_i$ selbstadjungiert, q.e.d
 Die Hauptachsen sind die Eigenvektoren.

36 4.22 Bemerkung

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ selbstadj und B eine ON-Basis aus Eigenvektoren von α .

Die Einheitskugel $S^{n-1} := \{x_1 B_1 + \dots + x_n B_n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$

wird durch α auf das Ellipsoid $(S^{n-1}) = \{x_1 B_1 + \dots + x_n B_n \mid \sum_{a_i \neq 0} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1\}$, $x_i = 0$ falls $a_i = 0$

Beachte: $\alpha = \sum_i a_i \pi_i$

37 4.24 Definition

$\alpha \in \text{End}(V)$

1. α heisst normal, falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{ad}$
2. α heisst orthogonal, falls $\alpha^{tr} \circ \alpha = Id_V$ d.h. $\alpha^{tr} = \alpha^{-1}$. Die Menge der orthogonalen Abbildungen von V wird mit $O(V, \Phi)$ bezeichnet und heisst die orthogonale Gruppe von (V, Φ)
3. α heisst schiefsymmetrisch, falls $\alpha^{ad} = -\alpha$
 Klar: selbstadj, orthogonale, schiefsymmetrische Endomorphismen sind allesamt normal. (:o)
 normal: Sowohl $\alpha^{ad} \circ \alpha$ als auch $\alpha \circ \alpha^{ad}$ sind selbstadj. (gilt immer).
 anormal: beide sind gleich.

38 4.25 Bemerkung

Sei $\alpha \in \text{End}(V)$

Dann gilt:

1. $\alpha_{sym} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{ad})$ ist symmetrisch
 $\alpha_{schief} = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{ad})$ ist schiefsymmetrisch und $\alpha = \alpha_{sym} + \alpha_{schief}$
2. α normal $\Leftrightarrow \alpha_{sym} \circ \alpha_{schief} = \alpha_{schief} \circ \alpha_{sym}$

39 4.26 Bemerkung

1. $\alpha \in \text{End}(V)$ orthogonal $\Leftrightarrow \Phi(\alpha(v), \alpha(w)) = \Phi(v, w) \forall v, w \in V$

Es genügt sogar, dass v,w, eine Basis B von V durchläuft:

$$\left({}^B \alpha^B \right)_B^{tr} \Phi^B \cdot \left({}^B \alpha^B \right) =_B \Phi^B$$

(Beachte B ON-Basis)

2. $O(V, \Phi)$ ist eine Gruppe bez. der Komposition, d.h. eine Untergruppe von $GL(V)$
3. Ist $B \in V^n$ eine ON-Basis von V, so ist $O(V, \Phi) \rightarrow O(n, \mathbf{R}) : \alpha \mapsto^B \alpha^B$ ein Isomorphismus von Gruppen.

4. Bei der Operation von $O(V, \Phi)$ auf V ist die Länge eine trennende Invariante (d.h. Bahnen sind Sphären mit Mittelpunkt 0)
5. Sei Einheitskugel $S^{n-1} := \{v \in V \mid \Phi(v, v) = 1\}$
 Bei der Operation von $O(V, \Phi)$ auf $S^{n-1} \times S^{n-1} : O(V, \Phi) \times (S^{n-1} \times S^{n-1}) \rightarrow S^{n-1} \times S^{n-1} : (\gamma, (v, w)) \mapsto (\gamma(v), \gamma(w))$
 ist der Winkel eine trennende Invariante.

40 4.28 Lemma

Sei $\dim V = 2, B \in V^2$ eine ON-Basis, $\alpha \in \text{End}(V)$ normal mit irred. MinPol

Dann gilt: ${}^B\alpha^B \in \langle I_2; i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \leq \mathbf{R}^{2 \times 2}$ (und umgekehrt).

Genauer: Ist $(x - a)^2 + b^2$ das Minimalpolynom, so ist ${}^B\alpha^B = aI_2 + bi$

ist $x - a$ das Minimalpolynom, so ist ${}^B\alpha^B = aI_2$. Mit anderen Worten:

Jede Normale Abb $\neq 0$ mit irred. MinPol lässt sich eindeutig als positives vielfaches einer Orthogonalen Drehung schreiben. (Polarzerlegung komplexer Zahlen)

41 4.29 Lemma

Ist $\pi \in \text{End}(V)$ eine normale Projektion, also $\pi^{ad} \circ \pi = \pi \circ \pi^{ad}$ und $\pi^2 = \pi$
 $\Rightarrow \pi$ selbstadjungiert.

Beweis: π Proj. $\Rightarrow V = \text{Kern}(\pi) \oplus \text{Bild}(\pi)$

Zeige diese Zerlegung ist orthogonal.

Klar: $\pi^{ad} \circ \pi = \pi \circ \pi^{ad}$ ist selbstadj. Projektion.

Fertig, falls wir zeigen $\text{Kern}(\pi) = \text{Kern}(\pi \circ \pi^{ad})$

$\text{Bild}(\pi) = \text{Bild}(\pi \circ \pi^{ad})$

Klar: $\text{kern}(\pi) \subseteq \text{Kern}(\pi \circ \pi^{ad})$.

$v \in V, \pi(v) = 0 \Rightarrow \pi^{ad}(\pi(v)) = 0$

. Andererseits: $\text{Rg}(\pi) = \text{Rg}(\pi^{ad} \circ \pi)$

$\Rightarrow \text{Kern}(\pi) = \text{Kern}(\pi^{ad} \circ \pi)$

$\text{Bild}\pi \subseteq \text{Bild}(\pi \circ \pi^{ad})$ wie oben (Dimension). q.e.d

42 4.30

Satz Sei $\alpha \in \text{End}(V)$ normal. Dann ist das Minpol von $\alpha \mu_\alpha(x)$ vielfachheitenfrei.

Ist $\mu_\alpha(x) = \prod_i (x - c_j) \prod_l \underbrace{(x - a_l)^2 + b_l}_{\text{Quadratische Ergänzung}}$ die Zerlegung von $\mu_\alpha(x)$ in ir-

reduzible Faktoren \Rightarrow ex. eine ON-Basis $B \in V^n$ von V , so dass ${}^B\alpha^B$ Blockdiagonalgestalt hat mit Diagonalblöcken $c_j \in \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^{1 \times 1}$ und $a_l I_l + b_l i$ mit

$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei jeder Block mit einer wohlbestimmten Vielfachheit > 0

vorkommt

Spezialfälle:

1. selbstadj: Irred. Teiler vom Grad 2 kommen nicht vor.
2. schiefsymmetrisch: alle $c_j = 0$ und alle $a_l = 0$.
3. orthogonal: alle $c_j^2 = 1$ und alle $a_l^2 + b_l^2 = 1$ (sin u. cos Blöcke)

43 k4.30 Satz Polarzerlegung

Sei $\beta \in GL(V)$. Dann gibt es eindeutig bestimmmte $\gamma \in O(V, \Phi)$ und $\alpha \in End(V)$ selbstadj. und positiv definit mit $\beta = \alpha \circ \gamma$ (Folgerung aus Spektralsatz, allgemeine lin. Abbildung).

Beweis: (mit Matrizen)

$B \in GL(n, \mathbf{R})$

Eindeutigkeitsbeweis: Sei $B = Ag = A'g'$

$A, A' \in \mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$, positiv definit $g, g' \in O(n, \mathbf{R})$.

$$\Rightarrow a^2 = Agg^{tr}A^{tr} = Bb^{tr} = (A')^2$$

$$\Rightarrow A = A' \Rightarrow g = g'$$

Existenz: A sei die eind. positiv definite Wurzel aus BB^{tr} . ($A^2 = BB^{tr}$), $A \in$

$\mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$, pos.def

Beh: $g := A^{-1}B$ orthogonal:

$$tr \underbrace{A^{-1}}_{A^{tr}=A} = a^{-1}A^2A^{-1} = I_n,$$

$$gg^{tr} = A^{-1}BB^{tr} \quad ,q.e.d.$$

Kochrezept:

1. berechne A, positiv definit, symmetrisch mit $A^2 = AA^{tr} = C$
 Berechne das MinPol von C sowie ON-Basen der ER.
 $\rightarrow O = (v'_1 \ v'_2 \ \dots \ v'_n), v_{1n} = \text{ON-Basen der ER}$
 $C = O^{tr} \cdot \text{Diag}(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \cdot O$
 $A := O^{tr} \cdot \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1} \ \dots \ \sqrt{\lambda_n}) \cdot O$
 $a^2 = O^{tr} \cdot \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1} \ \dots \ \sqrt{\lambda_n}) \cdot \underbrace{O \cdot O^{tr}}_{Id} \cdot \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1} \ \dots \ \sqrt{\lambda_n}) \cdot O$
 $= O^{tr} \cdot \text{Diag}(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n) \cdot O$
2. $g \in O(n, \mathbf{R})$ berechnen:
 $Ag = B \Leftrightarrow g = A^{-1}B$
 $A^{-1} = \underbrace{O^{-1}}_{O^{tr}} \cdot \text{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ \dots \ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \cdot \underbrace{O^{-tr}}_O$

44 5.1. Def. Linearform

: Sei V ein K-VR Eine *Linearform* (lineares Funktional, Kovektor) auf oder von V ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow K$ von V nach K.

Der *Dualraum* V^* von V ist der VR aller Linearformen von V.

45 5.2 Beispiel

1. Sei $V = K^{n \times 1}$. der Spaltenraum von K n-dimensional.
 Dann kann man V^* mit $K^{1 \times n}$ Zeilenraum identifizieren,

denn jedes $\phi \in V^*$ kann durch seine Matrix bez. der Standardbasis von $K^{n \times 1}$ und der Standardbasis (1) von K , also eine Zeile $A \in K^{1 \times n}$, $\bar{A} = \phi - | \in K$

2. Ist $V \leq K^M$ (M Menge) so liefert jedes $m \in M$ eine Linearform:
 $V \rightarrow K : f \mapsto f(m)$
3. Ist $V \leq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ VR integrierbarer Funktionen, so ist $V \rightarrow \mathbf{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ ein Element von V^* .
4. $\alpha : V \rightarrow W$ lin, $B \in V^n, C \in W^m$ Basen von V und W .
 Früher: $\underbrace{Hom(V, W)}_{\text{von Babb.}} \rightarrow W^n : \alpha \mapsto \alpha \circ B = \underbrace{(\alpha(B_1), \dots, \alpha(B_n))}_{\text{Spalten der Matrix}}$
 Jetzt :
 $\underbrace{(V^*)^m}_{\text{von Cabb.}} \rightarrow Hom(V, W) : (\delta_1, \dots, \delta_m) \mapsto \delta$
 $\delta(v) = \underbrace{\delta_1(v)C_1 + \dots + \delta_m(v)C_m}_{\text{Zeilen der Matrix}}$
5. $V = \mathbf{C} \mathbf{R} - VR$
 RE: $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R} : a + ib \mapsto a$ Linearform
6. (V, Φ) Eukl. VR, Für jedes $v_0 \in V$
 ist $\Phi(v_0, \cdot) : V \rightarrow \mathbf{R} : w \mapsto \Phi(v_0, w)$ linear,
 also $\Phi(v_0, \cdot) \in V^*$

46 5.3 Satz

V ein e.e. K -VR.

1. Es gilt $Dim(V^*) = Dim(V)$
2. Sei $B \in V^n$ eine Basis von $V \Rightarrow \exists B^* \in (V^*)^n$ definiert durch $B_i^* \in V^*$ mit $B_i^*(B_j) = \delta_{ij}$, so dass B^* eine Basis von V^* ist, genannt die *Dualbasis* von V^* zu B .

Für alle $v \in V$ gilt:

$$v = B_1^*(v)B_1 + \dots + B_n^*(v)B_n$$

47 5.4 Satz

Seien $B, C \in V^n$ Basen von V

$$\Rightarrow^{C^*} Id_{V^*}^{B^*} = ({}^B Id_V^C)^{tr}$$

$$\text{d.h. } {}^{B^*} Id_{V^*}^{C^*} = (({}^B Id_V^C)^{tr})^{-1}$$

48 5.5 Satz

1. Ist $U \leq V$ so ist der *Annihilator* (oder so ähnlich)

$U^\perp := \{\phi \in V^* \mid \phi(u) = 0 \forall u \in U\}$ ein Teilraum von V^*

2. Ist V e.e., so gilt:

$T(V) := \{U \mid U \leq V\} \rightarrow T(V^*)$

$U \mapsto U^\perp$

ist eine *Galloiskorrespondenz*, d.h. eine bijektive Abbildung mit

$U \subseteq T \Leftrightarrow U^\perp \supseteq T^\perp$

weiterhin gilt: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ besser $U^* \cong V^*/_{U^\perp}$.