[1]Tilman Schulz Disku vom 25.Januar 2001

Definition. *Adjungierte*

$(\mathcal{V}, \Phi)$ euklidischer VR ($\mathcal{V}$ endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-VR, Φ inneres Produkt)

$\alpha \in End(\mathcal{V})$

Es gibt genau eine *Abbildung* α^{ad} mit $\Phi(\alpha(V), W) = \Phi(V, \alpha^{ad}(W))$

$\forall\, V, W \in \mathcal{V}$, welche man die *Adjungierte* zu α nennt.

Example. Sei B eine Basis von $\mathcal{V}$, dann gilt für alle $V, W \in \mathcal{V}$

$\Phi(\alpha(V), W) = ({}^B\alpha(V))^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot B_W = ({}^B\alpha^B \cdot {}^BV)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^BW$

$= ({}^BV)^{tr} \cdot ({}^B\alpha^B)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^BW$

Beachte: $(A \cdot B)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}$

$\Phi(V, \alpha^{ad}(W)) = ({}^BV)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^B(\alpha^{ad})^B \cdot {}^BW$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$ gilt:

$({}^BV)^{tr} \cdot ({}^B\alpha^B)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^B W = ({}^BV)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^B(\alpha^{ad})^B \cdot {}^BW$

$\Rightarrow ({}^BV)^{tr} \cdot ({}^B\alpha^B)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B = ({}^BV)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B \cdot {}^B(\alpha^{ad})^B \Rightarrow ({}^B\alpha^B) \cdot {}_B\Phi^B$

$= {}_B\Phi^B \cdot {}^B(\alpha^{ad})^B$

${}_B\Phi^B$: Produkt von 3 Matrizen mit vollem Rang

${}_B\Phi^B = T^{tr} \cdot D \cdot T$

$\Rightarrow {}^B(\alpha^{ad})^B = ({}_B\Phi^B)^{-1} \cdot ({}^B\alpha^B)^{tr} \cdot {}_B\Phi^B$

Remark. : Spezialfall

${}_B\Phi^B = I_n \Leftrightarrow$ B ist *OrthoNormal*-Basis

${}^B(\alpha^{ad})^B = ({}^B\alpha^B)^{tr}$

[1]File by: *www.infoSpender.de*

Definition. *Selbstadjungiertheit*

$\alpha^{ad} = \alpha \Rightarrow {}^{B}(\alpha^{ad})^{B} = {}^{B}\alpha^{B}$

α selbstadjungiert $\Leftrightarrow ({}^{B}\alpha^{B})^{tr} \cdot {}_{B}\Phi^{B} =_{B} \Phi^{B} \cdot {}^{B}\alpha^{B}$,bzw.

${}^{B}\alpha^{B} = ({}_{B}\Phi^{B})^{-1} \cdot {}^{B}\alpha^{B} \cdot {}_{B}\Phi^{B}$

Example. Gegeben: B, B' Basen von $\mathcal{V}$, $\alpha \in End(\mathcal{V})$

${}^{B}\alpha^{B} = {}^{B}(id \circ \alpha \circ id)^{B} = {}^{B}id^{B'} \cdot {}^{B'}\alpha^{B'} \cdot {}^{B'}id^{B}$

Transponieren bringt Buchstaben von oben nach unten und

vertauscht Links und Rechts, bzw. umgekeht.

$({}^{B'}id^{B})^{tr} \cdot {}_{B'}\Phi^{B'} \cdot {}^{B'}id^{B} = ({}^{B'}id^{B})^{tr} \cdot {}_{B'}\Phi^{B} = {}_{B}id_{B'} \cdot {}_{B'}\Phi^{B} = {}_{B}\Phi^{B}$

$I_n = {}^{B}id^{B} = {}^{B}(\varphi \circ \varphi^{-1})^{B} = {}^{B}\varphi^{B} \cdot {}^{B}(\varphi^{-1})^{B}$

Definition. *Cholesky Verfahren*

$$({}_{B}\Phi^{B} \vdots I_n) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n & & & 1 \end{array}\right) \text{ oder } ({}_{B}\Phi^{B} \big| ({}^{B}id^{B'})^{tr})$$

${}_{B}\Phi^{B} = ({}^{B'}id^{B})^{tr} \cdot {}_{B}\Phi^{B'} \cdot {}^{B'}id^{B}$

Zeilen- und Spaltenoperationen gleichzeitig durchführen!

Definition. *Gram-Martrix*

Alle möglichen Skalarprodukte zwischen den Basisvektoren.

Alle Infos über die Bilinearform.

${}_{B}\Phi^{B}_{i,j} = \Phi(B_i, B_j) \Rightarrow \Phi(V, W) = ({}^{B}V)^{tr} \cdot_{B} \Phi^{B} \cdot {}^{B}W$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot_{B} \Phi^{B} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = \ldots$$

Für ${}_{B}\Phi^{B}$ Einheitsmatrix

Definition. *Algorithmus zur Haupt-Achsen-Transformation*

$(\mathcal{V}, \Phi)$ ist Euklidischer VR, $\alpha \in End(\mathcal{V})$ selbstadjungiert

(1) Berechne das Minimalpolynom.

$\mu_\alpha = (x-\lambda_1)\cdot(x-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r) \quad \forall\, \lambda_i \neq \lambda_j$ und $i \neq j$

$\rightsquigarrow$ λ_i sind EigenWerte von α

α ist diagonalisierbar

(2) Bestimme Basen $B^{(i)}$von $E_\alpha(\lambda_i)$ (die Eigenwerte)

Da $\alpha = \alpha^{ad}$, folgt $E_\alpha(\lambda_i) \subseteq E_\alpha(\lambda_j)^\perp$ für $i \neq j$

(3) Bestimme *ON-Basen* $B^{(i)'}$ von $E_\alpha(\lambda_i)$ mit Gram-Matrix

(4) $B = (B^{(1)'}, \ldots, B^{(r)'})$ ist *ON-Basis* von $\mathcal{V}$,

und $$^{B'}\alpha^{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

und $^{B'}\alpha^B$ ist die Transformationsmatrix.

Wenn B auch *ON-Basis* war $\Rightarrow$ $^{B'}id^B \in O(n,\mathbb{R})$ oder $(^{B'}id^B)^{-1} = (^{B'}id^B)^{tr}$

Definition. *Schreibweise* ^BW

$$W = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 + \ldots + a_n \cdot B_n \;\Leftrightarrow\; {}^BW = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definition. *Spur*

Ist nur bei quadratischen Matrizen definiert.

$A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{nxn}$

$Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

$$Spur \begin{pmatrix} [13] & 101 & 216 \\ 57 & [19] & 12 \\ 103 & 2 & [18] \end{pmatrix} = 13 + 19 + 18 = 50$$

$Spur(A \cdot B) = Spur(B \cdot A) \Rightarrow Spur((B^{-1} \cdot A) \cdot B) = Spur(B(B^{-1} \cdot A)) = Spur(A)$

Spur ist invariant gegenüber Basiswechsel

$\mathcal{V}$ ist K-VR, $\alpha \in End(\mathcal{V})$

$Spur(\alpha) := Spur({}^{B}\alpha^{B})$

$Spur(\alpha) = \sum EW$ von α