lineare Algebra I
für Informatiker
(erstes Semester)

Inhaltsverzeichnis:

I. Kapitel: Grundlagen

§1 Mengen und Abbildungen

Grundbegriff Menge M

$x \in M$	x ist Element von M
$x \notin M$	x ist nicht Element von M

Es darf niemals gleichzeitig gelten: $x \in M$ und $x \notin M$

$\mathbb{N} :=$ Menge aller natürlichen Zahlen = {1, 2, 3, 4, 5, ... }
$\mathbb{Z} :=$ Menge der ganzen Zahlen = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
$\mathbb{Q} :=$ Menge der rationalen Zahlen = $\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \}$
$\mathbb{R} :=$ Menge der reellen Zahlen

M	:=	{2, 3, 5, 7, 11}	← eine Menge
	=	{11, 7, 2, 5, 3}	
	=	$\{2, 2, 5, 5, 7, 11, \frac{22}{2}\}$	← auch M!
P	:=	{x | x ist Primzahl}	← das ist auch eine Menge
	=	$\{x \in \mathbb{N} \mid$ x ist Primzahl$\}$	

$2^{2^{101}} \in P$ **?** (unbekannt, trotzdem ist P eine Menge)

weitere Beispiele für Mengen

M	=	$\{x \in P \mid x \leq 11\}$
$2\mathbb{Z}$	=	$\{x \in \mathbb{Z} \mid$ x ist Gerade $\}$
	=	$\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$

<u>A, B seien Mengen</u>

$A \subseteq B$ bedeutet »A ist Teilmenge (Untermenge)« von B,
(»wenn $a \in A$, dann ist auch $a \in B$«)
$a \in A \Rightarrow a \in B$
»$A \subseteq B$« wird manchmal auch »$A \subset B$« geschrieben. (Schreibeweise nicht festgelegt)

Bem.: A = B gilt genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

$$|A| = \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, \text{ wenn } A \text{ endlich} \\ \infty, \text{ sonst} \end{cases}$$

$\lvert\{1, 2, \frac{4}{2}\}\rvert$	= 2	
$\lvert\{1, \{1\}\}\rvert$	= 2	← weil 1 = {1} (Wer versteht diese Begründung???)
$\emptyset$	ist die »leere Menge« (für alle x gilt: $x \notin \emptyset$) Bem.: Für jede Menge A gilt: $\emptyset \subseteq A$	

Operationen für Mengen

$A \cap B$	=	$\{a \mid a \in A$ und $a \in B\}$	
$A \cup B$	=	$\{a \mid a \in A$ und/oder $a \in B\}$	
$A \cap B$	=	$\emptyset$	← kann passieren, dann nennt man A und B »disjunkt«
$A \setminus B$	=	$\{a \in A \mid a \in B\}$	(Mengensubtraktion)

ADB	=	{(a,b) | a g A, b g B}	(»kartesisches Produkt« / »Paarmenge«)
(a,b)	=	(a',b')	bedeutet a=a' und b=b'
(1,2)	@	(2,1)	(ein sog. »Paar« ist »sortiert«)
(aber: {1,2}	=	{2,1}	eine Menge ist nicht sortiert!)

Bem.: (unwichtig) Man kann definieren: (a,b) = {{a}, {a,b}}

Funktion

Def.: Sind X und Y Mengen und ist f a XD Y, so heißt (X,Y,f) eine Abbildung von X nach Y wenn zu jedem x g X genau ein y g Y existiert mit (x,y) g f
In diesem Fall schreiben wir: y = f(x)
Schreibweise:
f: x $_{x\,\}}$ }$_{f(x)}$ y
(f ist eine Abb. von X nach Y, x g X wird y g Y wie gezeigt zugeordnet.)

Bem.: Zwei Abbildungen f: X } Y und g: A } B sind gleich genau dann, wenn

1. *X = A (Definitionsbereich)*
2. *Y = B (Werte-Vorrat, »Zielbereich«)*
3. *für jedes x g X=A*
   ist f(x) = g(x)

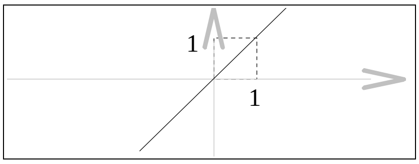
Funktion und Abbildung sind synonyme Begriffe.

f: X } Y heißt

1. ***injektiv***, wenn aus f(x) = f(x') folgt
   (Es gibt zu jedem Element aus X genau ein Bildelement in Y. In Y dürfen aber auch »überschüssige« Elemente sein.)
2. ***surjektiv***, wenn es zu jedem y g Y (mindestens) ein x gibt mit y = f(x)
3. ***bijektiv***, wenn f injektiv UND surjektiv ist.

Beispiele

a. $id_x = X \ \}\ X$ $_{x\ \}\ x}$ »identische Abbildung« (ist bijektiv)
   z.B.:
   f(x) = x
   f = {(x,x) | x g X} g XDY



b. $f_2 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$f_2 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ⇐ Dies ist eine Funktion, zu jedem x gibt es ein Bildelement, x^2

$f_2(-2) = 4 = f_2(2)$ ⇐ Nicht injektiv (keine eindeutigen Abbildungen), nicht surjektiv (negative Zahlen sind keine Bildelemente, es gibt z.B. kein x mit $x^2 = -1$)

(Die Grafiken hier habe ich mir gespart, die benötigen viel zu viel Zeit zum Erstellen... ;-) Es kann sie ja einer von euch freiwillig beisteuern...)

c. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ $:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Dies ist jetzt surjektiv: Die vorher nicht »belegten« negativen Werte der Zielmenge fehlen nun, jedes Element von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist mindestens einmal Bildelement.

d. f_4: definiert $\{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \cdot y = 1\}$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x abgebildet auf $\frac{1}{x}$ ist keine Funktion, denn zu x=0 existiert kein y ∈ ℝ mit $(x,y) \in f_4$ $x \cdot y = 1$

e. $f_5 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ⇐ Dies ist eine Abb. (injektiv, nicht surjektiv)

f. $f_6 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, x^2 abgebildet auf x ist keine Funktion, 1 würde auf 1 UND -1 abgebildet ($1=1^2=(-1)^2$)

$f_6 = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $(1, 1) \in f_6$

$(1, -1) \in f_6$

Man sagt, »die Funktion/Abbildung ist nicht wohldefiniert« (mehrdeutige Funktion)

Def.: *Es sei f: X→Y eine Abbildung und $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$*

$f(X') = \{f(x') \mid x' \in X'\}$ Bild von X' unter f

$f(X)$ = Bild f

$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$ *Urbild von Y' unter f*

$y \in Y$ $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ *»Faser von y unter f«*

??? Das habe ich ja nun überhaupt nicht verstanden... Kann mich mal einer erleuchten?

Bem.:

1. f: x→y injektiv ⇔ $|f^{-1}(y)| \leq 1$ *für alle $y \in Y$*

2. f: x→y surjektiv ⇔ $|f^{-1}(y)| \geq 1$ *für alle $y \in Y$*

3. f: x→y injektiv ⇔ $|f^{-1}(y)| = 1$ *für alle $y \in Y$*

Def.: *Sind f: X→Y und g: Y→Z Abbildungen, so sei* $g \circ f : X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$ *die Abbildung mit*

x→g(f(x)) ∈ Y

»verkettete Abbildung« *$g \circ f = g(f(x))$*

Bem.: Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ und $h: Z \to A$ Abbildungen:

$$\underbrace{h \circ (g \circ f)}_{X \to Z} = \underbrace{(h \circ g)}_{Y \to A} \circ f$$

1. *Definitionsbereich* $= X$
2. *Zielbereich* $= A$
3. $x \in X$ $\quad (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$
   $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$

§2 Äquivalenzrelation

M sei eine Menge

Def.: Eine Teilmenge $R \subseteq M \times M = \{(a,b) \mid a,b \in M\}$ heißt auch Relation auf M
dann schreibt man: $a\,R\,b$ statt $(a,b) \in R$
R heißt

1. *reflexiv, wenn $a\,R\,a$ gilt (oder $(a,a) \in R \mid a \in M$)*
2. *symmetrisch, wenn aus $a\,R\,b$ folgt $b\,R\,a$, $a,b \in M$*
3. *transitiv, wenn aus $a\,R\,b$ und $b\,R\,c$ folgt $a\,R\,c$*
4. *Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Beispiele

a) $R_= \subseteq M \times M \qquad R_= = \{(a,a) \mid a \in M\}$
   $a\,R_=\,b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$

b) $M = \mathbb{Z} \qquad q \in \mathbb{N}$
   $R_q = \{(a, a+qx) \mid x \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$
   $a\,R_q\,b \quad \Leftrightarrow \quad b = a+qx \quad$ für ein $x \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow b-a \in q\mathbb{Z}$
   reflexiv: $(a-a \in q\mathbb{Z})$
   symmetr.: $(a-b = q \cdot x$, dann $b-a = q \cdot (-x) \in q\mathbb{Z}$
   trans.: auch, angebl. leicht zu zeigen. (Wer macht's??? ;-)

Def.: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so sei für $a \in M$
$[a]_\sim = \{b \in M \mid a \sim b\}$
»Äquivalenzklasse von a bezüglich $\sim$«

Lemma 1: Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M

(a) $a \sim b \Leftrightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$

(b) (Zwei) Äquivalenzklassen bezüglich gleicher Relationen sind gleich oder disjunkt.
Es gilt also stehts:
$[a]_\sim = [b]_\sim$ oder $\quad [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$

(c) Jedes $a \in M$ liegt in einer Äquivalenzklasse

Beweise

zu (a): Es sei aXb in M. Wir zeigen zunächst:

$[a]_X R [b]_X$

Es sei x g $[a]_X$ (zu zeigen: x g $[b]_X$ (Definition der Teilmenge)
d.h. aXx, aus aXb folgt wegen Symmetrie:
bXa
bXa und aXx (Transitivität): bXx,
das bedeutet, dass x g $[b]_X$

Da auch bXa ist (Symmetrie), folgt aus dem oben bewiesenen
$[b]_X R [a]_X$
1 $[b]_X = [a]_X$

Sei $[b]_X = [a]_X$, da bXb, ist b g $[b]_X$ (Dies beweist gleichzeitig (c)!),
da $[b]_X = [a]_X$, ist b g $[b]_X$, d.h. aXb

zu (b): Wir zeigen:

$[a]_X O [b]_X @ Ÿ$ 1 $[a]_X = [b]_X$

logisch Äquivalent:
$[a]_X @ [b]_X$ 1 $[a]_X O [b]_X$
(Kontraposition, statt A 1 B zeige: nichtB 1 nichtA) (Müßte dann nicht hinter $[a]_X O [b]_X$ ein »= Ÿ «?)

logisch Äquivalent:
Widerspruchsbeweis: A und nichtB 1 Widerspruch
Unbedingt vermeiden! Extrem fehleranfällig!

zu (c): Siehe oben (Beweis zu (a))

Def.: *M sei eine Menge*
P(M) = {A | A a M} *»Potenzmenge von M«*
P a P(M) heißt Partition von M, wenn

1. *M =* $\bigcup_{A g P}$ *A*
2. *A O A' = Ÿ für A @ A', A, A' a P*

(1) bedeutet: zu jedem x g M existiert ein A g P mit x g A

($\bigcup$ *= Vereinigung von mehreren Mengen)*

(Partitionen kann man sich eigentlich prima durch den PC merken: (1) sagt aus, dass der gesamte Festplatteninhalt in Partitionen aufgeteilt ist, (2) sagt, dass sich verschiedene Partitionen auf derselben Festplatte nicht überschneiden. (Außer, man hat einen mächtigen Fehler in der Partitionstabelle... ;-)
Die Erläuterung ((1) bedeutet) besagt: Eine Datei, die auf der Festplatte ist, MUSS in einer der Partitionen stecken.)

Bem.:

1. *Aus Lemma 1 folgt:*
   Ist X Äquivalenzrelation auf M, so bilden die Äquivalenzklassen bezügl. X eine Partition.
   M/X = {$[a]_X$ | a g M}
2. *Ist umgekehrt P a P(M) eine Partition, so kann man die Äquivalenzrelation X wie folgt definieren:*
   aXb 3 Es gibt ein A g P mit a,b g A

Beispiel

$M=\mathbb{Z}$ $\quad a \equiv_m b \Leftrightarrow b-a = x\cdot m$ für ein $x\in\mathbb{Z}$, $b-a \in m\cdot\mathbb{Z}$ $\quad m\in\mathbb{N}$ und ist fest gewählt
Äquivalenzrelation

$[0]_m = [0]_{\equiv_m} = \{0, m, 2m, 3m, ..., -m, -2m, ...\}$ $\quad (b-0 = x\cdot m \Leftrightarrow b = x\cdot m)$

$= m\cdot\mathbb{Z} = \{mx \mid x\in\mathbb{Z}\}$ $\quad$ ($=\mathbb{Z}$ für $m=1$)

sei $m>1$

$[1]_m = \{1, 1+m, 1+2m, 1+3m, ..., 1-m, ...\}$ $\quad (b-1 = xm \Leftrightarrow b = xm + 1)$

$= m\cdot\mathbb{Z}+1 = \{mx+1 \mid x\in\mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}/\equiv_m = \{[0]_m, [1]_m, ..., [m-1]_m\}$

§3 Körper und Ringe

Ein lineares Gleichungssystem ist z.B.:

$a_1x_1+a_2x_2=a_3$, $\quad a_1, a_2, a_3$ gegeben

$b_1x_1+b_2x_2=b_3$, $\quad b_1, b_2, b_3$ gegeben

x_1, x_2 gesucht

Def.: *Eine Menge K zusammen mit einer »Addition« genannten Abbildung*

$+: \underset{\langle a,b\rangle \text{ abgebildet auf } a+b}{K\times K \to K}$ *und einer »Multiplikation« genannten Abbildung*

$\cdot: \underset{\langle a,b\rangle \text{ abgebildet auf } a\cdot b}{K\times K \to K}$ *heißt ein Körper, wenn folgende Regeln gelten:*

(Körperaxiome)

(K1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *für alle* $a,b,c \in K$ *(Assoziativgesetz)*

(K2) Es gibt genau ein Element $O\in K$ *mit der Eigenschaft*
$O+a = a+0 = a$ *für alle* $a\in K$ *(neutrales Element der Addition)*

(K3) Zu jedem $a\in K$ *existiert genau ein Element* $(-a)\in K$ *mit*
$a+(-a) = (-a)+a = O$ *(inverses Element der Addition)*

(K4) $a+b = b+a$ *für alle* $a,b\in K$ *(Kommutativgesetz)*

(K5) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ *für alle* $a,b,c \in K$ *(Assoziativgesetz)*

(K6) Es gibt genau ein Element $I\in K$, *mit*
$I\cdot a = a\cdot I = a$ *für alle* $a\in K$ *(neutrales Element der Multipl.)*

(K7) Zu jedem $a\in K\backslash\{O\}$ *gibt es genau ein* $a^{-1}\in K$ *mit*
$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = I$ *(inverses Element der Multipl.)*

(K8) $a\cdot b = b\cdot a$ *(Kommutativgesetz)*

(K9) $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ *für alle* $a,b,c \in K$
und
$(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ *für alle* $a,b,c \in K$

Beispiele

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist Körper
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist KEIN Körper, da z.B. kein 2^{-1}, da $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

II. Kapitel: über das Dokument

Hier folgt ein bißchen geprolle: (Was sein muss, muss sein! ;-)

§1 allgemeine Infos

- Titel: lineare Algebra - Mengen und Abbildungen
- Autor: Klaus Ridder, info@ridder-multimedia.de
- Datei: E:\Dokumente und Einstellungen\Me\Eigene Dateien\Studium\Studium - Skripte Self\LA1 - Zusammenfassung Kapitel 1 (GO).sdw
- Stand: 20. Oktober 1999, 00:28:33   (Ja, ich habe das mit der Zeitzone endlich hinbekommen!!! ;-)

§2 Statistik

- Bearbeitungsdauer: 15:14:28
- Seiten: 8, Absätze: 165, Wörter: 1914, Zeichen: 9871, Grafiken: 1, Objekte: 26, prollige Sätze: 1
- Erstellt mit StarOffice 5.1 auf einem Linux 2.2.10-System.

§3 Weitergabe des Dokumentes (wichtig)

»lineare Algebra - Mengen und Abbildungen«, im folgenden Text genannt, unterliegt der GNU General Public License (GPL), unabhängig davon, in welcher Form der Text vorliegt (Als Textdokument, PostScript-Datei, Bilddatei, auf Papier, etc.).
Weitere Details können der GPL entnommen werden, die ich auch Platzgründen nicht hier im Text aufgenommen habe. Die GPL ist im Internet unter http://www.gnu.org/ und bei jedem Programm, dass der GPL unterliegt, als Textdatei zu finden.

Im Groben beinhaltet die GPL folgendes: Jeder darf diesen Text verändern, WENN er ihn wieder für die Öffentlichkeit FREI ZUGÄNGLICH macht, angibt, dass der Text von ihm modifiziert wurde und den Original-Copyrightvermerk nicht verändert. AUF JEDEN FALL trotzdem die GPL lesen.

Am besten wäre es natürlich, alle gefundenen Fehler / Unstimmigkeiten / Verbesserungsvorschläge an mich weiterzuleiten.

Ich hoffe, dieses Dokument hilft einigen etwas; es war viel Arbeit, es zu erstellen und die soll nicht umsonst gewesen sein. **!**

Wer schenkt mir einen 64 MB oder 128 MB SDRAM DIMM 66 MHz??? ;-)