Probeklausur Computeralgebra

Prof. Dr. G. Nebe - SS 2015

Aufgabe 1: Es sei $G := \langle a := (1,2,3,4,5,6,7), b := (2,3,5)(4,7,6)\rangle \leq S_7$.

1. Bestimmen Sie $|G|$.
2. Liegt die Permutation $g := (1,3,4)(2,7,6)$ in G?
3. Liegt die Permutation $h := (1,3,2,5,4,6,7)$ in G?

Aufgabe 2:

1. Definieren Sie den Begriff der transitiven G-Menge.
2. Definieren Sie Äquivalenz von G-Mengen.
3. Formulieren Sie den Klassifikationssatz über transitive G-Mengen.
4. Wieviele Äquivalenzklassen transitiver G-Mengen gibt es für $G = A_4$.

Aufgabe 3:

1. Formulieren Sie das Burnsidesche Fixpunktlemma.
2. Wieviele echt verschiedene Graphen auf 4 Punkten gibt es?

Aufgabe 4:

1. Formulieren Sie die Sylowsätze.
2. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 99.

Aufgabe 5:

1. Definieren Sie die folgenden Begriffe: Normalteiler einer Gruppe, charakteristische Untergruppe, Kommutatoruntergruppe.

2. Es sei G eine Gruppe und $U \leq G$ mit $G' \leq U$. Zeigen Sie, dass $U \trianglelefteq G$. Ist U sogar stets charakterisch in G?

Aufgabe 6: Es sei $G := \langle a, b \mid a^4, b^3, a^2b = ba^2 \rangle$.

1. Bestimmen Sie die Invariantenteiler von G/G'.

2. Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $G \to S_3$ gibt.

Aufgabe 7:

1. Formulieren Sie den chinesischen Restsatz.

2. Bestimmen Sie die Lösung kleinsten Grades des folgenden Kongruenzensystems über $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{aligned} f &\equiv -x + 1 \quad && (\mathrm{mod}\ x^2 + 1) \\ f &\equiv x + 1 \quad && (\mathrm{mod}\ x^2 - 1) \\ f &\equiv 3x - 1 \quad && (\mathrm{mod}\ x^2 + x - 2) \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

1. Definieren Sie den Begriff Primelement in einem Ring R.

2. Definieren Sie den Begriff irreduzibles Element in einem Ring R.

3. Zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel aber nicht prim ist.

Aufgabe 9:

1. Formulieren Sie Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium.

2. Zeigen Sie, dass $f(x) = x^8 + 13x^3 - 169x^2 + 26 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist.

3. Zeigen Sie, dass $f(x) = x^5 + 9x^3 - 27x^2 + 9 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 10:

1. Formulieren Sie einen Algorithmus, der zu einem gegebenen Polynom $f \in \mathbb{F}_p[x]$ das Produkt g aller irreduziblen Teiler von f vom Grad i bestimmt.

2. Bestimmen Sie alle irreduziblen Teiler von $f := x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ vom Grad kleiner oder gleich 2.

Aufgabe 11:

1. Definieren Sie den Begriff der Termordnung.

2. Ordnen Sie die folgenden Monome in $\mathrm{Mon}(K[x_1, x_2])$ bezüglich der lexikographischen Termordnung mit $x_1 > x_2$:

$$x_1^3 x_2^4,\ x_1 x_2^7,\ x_1^3 x_2^5,\ x_1^2 x_2$$

Aufgabe 12:

1. Definieren Sie die Hilbertreihe eines graduierten Moduls.

2. Bestimmen Sie eine disjunkte Kegelzerlegung der vielfachenabgeschlossenen Teilmenge von $\mathrm{Mon}(\mathbb{C}[x_1, x_2])$, welche von $x_1^2 x_2^3,\ x_2^4,\ x_1^3 x_2$ erzeugt wird.

3. Bestimmen Sie die Hilbertreihe der Menge aus (2).

Aufgabe 13: Es sei $R = \mathbb{C}[x, y]$ und $J \trianglelefteq R$, das Ideal, welches von

$$\begin{aligned} f_1 &:= x^2 - y^2 \\ f_2 &:= y^3 - 1 \\ f_3 &:= xy^3 - x \end{aligned}$$

erzeugt wird.

1. Zeigen Sie, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ mit multiplikativen Variablen $(x, y), (\bullet, y)$ und $(\bullet, y)$ eine Janetbasis von J bezüglich der lexikographischen Monomordnung (mit $x > y$) ist.

2. Bestimmen Sie die verallgemeinerte Hilbertreihe von $S(J, <)$.

3. Bestimmen Sie $J \cap \mathbb{C}[y]$.

Aufgabe 14:

1. Bestimmen Sie die Hilbertreihe des Invariantenrings $\mathbb{C}[x, y]^{D_{10}}$, wobei

$$D_{10} := \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_5 & 0 \\ 0 & \zeta_5^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 15:

1. Definieren Sie den Begriff einer Ultrametrik.

2. Zeigen Sie: Ist K ein bezüglich einer translationsinvarianten Ultrametrik vollständiger Körper und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, so gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}} \text{ konvergent } \Leftrightarrow (a_n)_n \text{ ist Nullfolge.}$$

3. Es sei (A, d) ein ultrametrischer Raum, $x \in A$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie: Für alle $y \in B_r(x) := \{z \in A \mid d(x, z) < r\}$ gilt $B_r(y) = B_r(x)$.

Aufgabe 16:

1. Formulieren Sie das Henselsche Lemma für das Liften von Nullstellen von Polynomen über vollständigen diskret bewerteten Körpern.

2. Bestimmen Sie alle $p \in \{5, 11, 13\}$, sodass ein $a \in \mathbb{Z}_p$ existiert mit $a^2 + a + 1 = 0$. Falls ein solches a existiert, so bestimmen Sie darüber hinaus ein $a_0 \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 \equiv a \pmod{p^3}$.