

NAME _____

MATRIKELNUMMER _____

STUDIENGANG _____

Prof. Dr. Eva Zerz

SS 2008

Computeralgebra – Klausur am 23.9.2008
Gruppe B

- Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden
- Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	12	
2	18	
3	20	
4	20	
5	15	
6	15	

Viel Glück!

1. (12 Pkt) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ über \mathbb{Q} .

2. (18 Pkt) Gegeben sei der Körper $L = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + 1 \rangle$. Sei $\alpha := [x] \in L$. Finden Sie $g \in L[y]$, so dass $g^2 = f$, wobei

$$f = (\alpha^2 + \alpha)y^8 + \alpha y^4 + \alpha^3 y^2 + \alpha + 1 \in L[y].$$

3. (16+4 Pkt)

(a) Berechnen Sie die reduzierte Gröbnerbasis von

$$I = \langle x^2y - y^3 + x - y - 1, 2x^2y + 3xy^2 + y^3 + 2x + y + 1 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$$

bezüglich der graduiert-lexikographischen Termordnung.

(b) Bestimmen Sie eine \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}[x, y]/I$ und die Dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/I$.

\mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}[x, y]/I$:		$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/I$:	
--	--	--	--

4. (7+5+8 Pkt) Sei G eine Gruppe der Ordnung 28.
- (a) Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.
- (b) Wieviele Elemente der Ordnung 7 enthält G ? Begründen Sie Ihre Aussage!
- (c) Geben Sie für \mathbb{Z}_{28} und für $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$ (jeweils mit der Addition als Verknüpfung) alle Elemente der Ordnung 7 an.

(b):		(c), \mathbb{Z}_{28} :		(c), $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$:	
------	--	--------------------------	--	--	--

5. (7+8 Pkt) Es seien L/K eine Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$ und $f, g \in K[x]$ irreduzible Polynome, so dass $f(\alpha) = 0 = g(\beta)$.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\dim_K K(\alpha, \beta) = \text{grad}(f) \cdot \dim_{K(\alpha)} K(\alpha, \beta) = \text{grad}(g) \cdot \dim_{K(\beta)} K(\alpha, \beta).$$

- (b) Beweisen Sie, dass $f \in K(\beta)[x]$ genau dann irreduzibel ist, wenn $g \in K(\alpha)[x]$ irreduzibel ist.

Hinweis: Mit " $f \in K(\beta)[x]$ " ist gemeint: f aufgefasst als Element von $K(\beta)[x]$. Analog für g .

6. (15 Pkt) Berechnen Sie die quadratfreie Faktorisierung von

$$f = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 108x - 135 \in \mathbb{Q}[x].$$

f_1	f_2	f_3	f_4

Vergessen Sie nicht, durch simples Ausmultiplizieren eine Probe zu machen.

7. **Bonusaufgabe** (5+5 Pkt)

- (a) Das Polynom $f = x^3 - x + 1$ ist als Element von $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} L_f$, wobei L_f ein Zerfällungskörper von f sei.
- (b) Was ändert sich in (a), wenn man f als Element von $\mathbb{R}[x]$ auffasst?

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die entsprechenden Kästchen ein.

Geben Sie unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!