NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

STUDIENGANG ______________________________

Prof. Dr. Eva Zerz SS 2008

Computeralgebra – Klausur am 23.9.2008
Gruppe A

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	12	
2	18	
3	20	
4	20	
5	15	
6	15	

Viel Glück!

1. *(12 Pkt)* Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}$.

2. *(18 Pkt)* Gegeben sei der Körper $L = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x+1\rangle$. Sei $\alpha := [x] \in L$.
   Finden Sie $g \in L[y]$, so dass $g^2 = f$, wobei

$$f = (\alpha+1)y^8 + \alpha y^4 + \alpha^3 y^2 + \alpha^2 + \alpha \in L[y].$$

3. *(16+4 Pkt)*

   (a) Berechnen Sie die reduzierte Gröbnerbasis von

$$I = \langle x^2y - 2xy^2 + x - 2y - 1,\ 2x^2y - xy^2 + 2x - y + 1\rangle \subset \mathbb{C}[x,y]$$

   bezüglich der graduiert-lexikographischen Termordnung.

   (b) Bestimmen Sie eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}[x,y]/I$ und die Dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y]/I$.

$\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}[x,y]/I$:		$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y]/I$:	

4. *(7+5+8 Pkt)* Sei G eine Gruppe der Ordnung 20.
   (a) Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.
   (b) Wieviele Elemente der Ordnung 5 enthält G? Begründen Sie Ihre Aussage!
   (c) Geben Sie für $\mathbb{Z}_{20}$ und für $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$ (jeweils mit der Addition als Verknüpfung) alle Elemente der Ordnung 5 an.

(b):		(c), $\mathbb{Z}_{20}$:		(c), $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10}$:	

5. *(7+8 Pkt)* Es seien L/K eine Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$ und $f, g \in K[x]$ irreduzible Polynome, so dass $f(\alpha) = 0 = g(\beta)$.
   (a) Zeigen Sie, dass

$$\dim_K K(\alpha,\beta) = \operatorname{grad}(f) \cdot \dim_{K(\alpha)} K(\alpha,\beta) = \operatorname{grad}(g) \cdot \dim_{K(\beta)} K(\alpha,\beta).$$

   (b) Beweisen Sie, dass $f \in K(\beta)[x]$ genau dann irreduzibel ist, wenn $g \in K(\alpha)[x]$ irreduzibel ist.

   Hinweis: Mit "$f \in K(\beta)[x]$" ist gemeint: f aufgefasst als Element von $K(\beta)[x]$. Analog für g.

6. *(15 Pkt)* Berechnen Sie die quadratfreie Faktorisierung von

$$f = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 108x - 135 \in \mathbb{Q}[x].$$

f_1	f_2	f_3	f_4

Vergessen Sie nicht, durch simples Ausmultiplizieren eine Probe zu machen.

7. **Bonusaufgabe** *(5+5 Pkt)*
   (a) Das Polynom $f = x^3 + x + 1$ ist als Element von $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} L_f$, wobei L_f ein Zerfällungskörper von f sei.
   (b) Was ändert sich in (a), wenn man f als Element von $\mathbb{R}[x]$ auffasst?

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die entsprechenden Kästchen ein.

Geben Sie unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!