Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

(a) Bei einem Minigolfturnier traten 6 Spieler gegeneinander an. Die Anzahlen der von ihnen über das gesamte Turnier hinweg benötigten Schläge betrugen

$$x_1 = 24\ , \quad x_2 = 27\ , \quad x_3 = 28\ , \quad x_4 = 22\ , \quad x_5 = 24\ , \quad x_6 = 31.$$

Berechnen Sie zu diesem metrischen Datensatz den Mittelwert, die empirische Varianz, den Median, den Quartilsabstand und den Rang von x_5.

(b) Gegeben sei folgender bivariater Datensatz (x_i, y_i), $i \in \{1, 2, 3\}$:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
x_i	1	3	2
y_i	4	0	1

(i) Bestimmen Sie die Regressionsgerade $\hat{f}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$ mittels der Methode der kleinsten Quadrate.

(ii) Berechnen Sie das Bestimmheitsmaß der linearen Regression aus (i). Was lässt sich über die Güte der Approximation der Regressionsgeraden an die Daten sagen?

Aufgabe 2 (4+2+4=10 Punkte)

(a) Ein von der Firma Brassel geliefertes Notebook ist aus Erfahrung mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% defekt.

  (i) Modellieren Sie diese Situation mit Hilfe einer geeigneten Zufallsvariable und geben Sie deren Verteilung an.

  (ii) Beschreiben Sie für eine Lieferung von vier Notebooks die Anzahl intakter Notebooks in dieser Lieferung mit einer weiteren Zufallsvariable und berechnen Sie

   - die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau drei der Notebooks aus der Lieferung intakt sind,
   - die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass mindestens drei der Notebooks aus der Lieferung intakt sind,
   - die erwartete Anzahl intakter Notebooks in der Lieferung (keine ausführliche Rechnung verlangt!).

(b) Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$ mit

  (i) $P(A^c) = \frac{1}{2}$,

  (ii) $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

  Berechnen Sie $P(A \setminus B)$.

(c) Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $E, F \in \mathfrak{A}$ mit $P(F) < 1$ und $E \cup F = \Omega$. Weiter seien E und F stochastisch unabhängig. Berechnen Sie $P(E)$.

Aufgabe 3 (11+5=16 Punkte)

(a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors (X, Y) sei durch die folgende Tabelle der Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = i, Y = j), \quad i \in \{0, 1\}, \ j \in \{1, 2, 3\},$$

gegeben:

$Y = j$ / $X = i$	1	2	3
0	0,1	0,4	0
1	0,1	0,2	0,2

(i) Bestimmen Sie die Randverteilungen P^X und P^Y der Zufallsvariablen X und Y, deren Erwartungswerte EX und EY und Varianzen $Var(X)$ und $Var(Y)$ sowie die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

(ii) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(Y = 2|X = 1)$ und $P(X = 1|Y = 2)$.

(iii) Berechnen Sie die Kovarianz $Cov(X, Y)$ von X und Y. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(b) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit gemeinsamer Riemann-Dichtefunktion

$$f^{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 e^{-\frac{y}{2}}}{x^{4y+1}} & , \text{ falls } x > 1, y > 0 \ , \\ 0 & , \text{ sonst } . \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Randdichte f^Y von Y gegeben ist durch

$$f^Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} y e^{-\frac{y}{2}} & , \text{ falls } y > 0 \ , \\ 0 & , \text{ sonst } . \end{cases}$$

(ii) Sei $y > 0$ gegeben. Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f^{X|Y=y}$ von X unter $Y = y$.

(iii) Ermitteln Sie für $y > \frac{1}{4}$ den bedingten Erwartungswert $E(X|Y = y)$ von X unter $Y = y$. Hierbei wird eine vollständige Rechnung verlangt.

Aufgabe 4 (6+4=10 Punkte)

(a) Seien $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X_i \overset{iid}{\sim} Wei(\alpha, 2)$, $i = 1, ..., n$, d.h. die Verteilungsfunktion F_{X_i} bzw. die Riemann-Dichtefunktion f^{X_i} von X_i, $i = 1, ..., n$, sind gegeben durch

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^2} & , \ x > 0 \ , \\ 0 & , \ x \leq 0 \ . \end{cases} \quad \text{bzw.} \qquad f^{X_i}(x) = \begin{cases} 2\alpha x e^{-\alpha x^2} & , \ x > 0 \ , \\ 0 & , \ \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

(i) Weisen Sie nach, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer für α basierend auf den Beobachtungen $x_1, ..., x_n > 0$ der Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ durch $\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ gegeben ist (vollständige Begründung erforderlich!).

(ii) Zeigen Sie, dass X_1^2 exponential-verteilt ist mit Parameter α.

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert von $\frac{1}{\hat{\alpha}}$ mit $\hat{\alpha}$ aus Aufgabenteil (i).

(b) Seien X_1, X_2 und X_3 stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X_i \sim N(\mu, 1)$, $i = 1, 2, 3$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ unbekannt sei. Betrachten Sie die folgenden beiden Schätzer für μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}(X_1 + 2X_2), \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i.$$

(i) Sind $\hat{\mu}_1$ und $\hat{\mu}_2$ erwartungstreu für μ?

(ii) Berechnen Sie für $\hat{\mu}_1$ und $\hat{\mu}_2$ den jeweiligen mittleren quadratischen Fehler und entscheiden Sie auf der Basis Ihrer Ergebnisse, welcher der beiden Schätzer für eine Schätzung von μ verwendet werden sollte.

Aufgabe 1

(a) Berechnung des Mittelwertes $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{24+27+28+22+24+31}{6} = \frac{156}{6} = 26.$$

Berechnung der empirischen Varianz s^2:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} \big(x_i - \bar{x}\big)^2 \\ &= \frac{1}{6}\Big[(24-26)^2 + (27-26)^2 + (28-26)^2 + (22-26)^2 + (24-26)^2 + (31-26)^2\Big] \\ &= \frac{1}{6}\Big[(-2)^2 + 1^2 + 2^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 5^2\Big] \\ &= \frac{4+1+4+16+4+25}{6} \\ &= \frac{54}{6} \\ &= 9. \end{aligned}$$

Die Rangwertreihe des Datensatzes ist gegeben durch

$$x_{(1)} = 22\ , \quad x_{(2)} = 24\ , \quad x_{(3)} = 24\ , \quad x_{(4)} = 27\ , \quad x_{(5)} = 28\ , \quad x_{(6)} = 31.$$

Berechnung des Medians $\tilde{x}_{0.5}$:

$$6 \cdot 0.5 = 3 \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{x}_{0.5} = \frac{1}{2}\big(x_{(3)} + x_{(4)}\big) = \frac{24+27}{2} = \frac{51}{2} = 25.5.$$

Berechnung des Quartilsabstand Q:

$$\begin{aligned} &6 \cdot 0.25 = 1.5 \notin \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{x}_{0.25} = x_{(2)} = 24, \\ &6 \cdot 0.75 = 4.5 \notin \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{x}_{0.75} = x_{(5)} = 28, \\ &Q = \tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25} = 28 - 24 = 4. \end{aligned}$$

Der Rang von $x_5 = 24$ ist gegeben durch

$$R(x_5) = R(24) = \frac{2+3}{2} = 2.5.$$

(b) (i) Die geschätzte Regressionsgerade ist gegeben durch

$$\widehat{f}(x) = \widehat{a} + \widehat{b}x,$$

wobei sich $\widehat{a}$ und $\widehat{b}$ wie folgt berechnen lassen:

$$\widehat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \text{und} \quad \widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b} \cdot \overline{x}.$$

Die zur Berechnung benötigten Werte sind gegeben durch:

Beobachtung	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	4	1	16	4
2	3	0	9	0	0
3	2	1	4	1	2
Mittelwert	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{17}{3}$	2

Damit ist $\widehat{b}$ gegeben durch

$$\widehat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = \frac{2 - 2 \cdot \frac{5}{3}}{\frac{14}{3} - 4} = \frac{1 - \frac{5}{3}}{\frac{7}{3} - 2} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = -2$$

und $\widehat{a}$ durch

$$\widehat{a} = \overline{y} - \widehat{b} \cdot \overline{x} = \frac{5}{3} + 2 \cdot 2 = \frac{17}{3}.$$

Die geschätzte Regressionsgerade lautet also

$$\widehat{f}(x) = \frac{17}{3} - 2x.$$

(ii) Das Bestimmtheitsmaß der linearen Regression aus (i) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} B_{xy} &= r_{xy}^2 = \left(\frac{s_{xy}}{s_x s_y}\right)^2 = \frac{(\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y})^2}{\left(\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right)\left(\overline{y^2} - (\overline{y})^2\right)} \\ &= \frac{\frac{16}{9}}{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{17}{3} - \frac{25}{9}\right)} = \frac{3 \cdot 16}{2 \cdot 26} = \frac{12}{13} \approx 0.923. \end{aligned}$$

Da der Wert des Bestimmtheitsmaßes nahe bei 1 liegt, kann man von einer guten Approximation der Regressionsgeraden an die Daten sprechen.

Aufgabe 2

(a) (i) Sei X eine Zufallsvariable (auf einem nicht weiter interessierenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$) mit den möglichen Ausprägungen 0 und 1 und den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X=0) = \frac{9}{10} \quad \text{und} \quad P(X=1) = \frac{1}{10},$$

d.h. $X \sim bin(1, \frac{1}{10})$ ist binomial-verteilt mit den Parametern $n = 1$ und $p = \frac{1}{10}$. Interpretation:

$$\begin{aligned} X = 0 &: \text{ Das Notebook ist defekt,} \\ X = 1 &: \text{ Das Notebook ist intakt.} \end{aligned}$$

(ii) Seien $X_1, ..., X_4$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X_i \sim bin(1, \frac{1}{10})$, $i \in \{1, ..., 4\}$ (Interpretation wie in (i)). Weiter definieren wir die Zufallsvariable $Z := \sum_{i=1}^4 X_i$, die somit nach Definition die Anzahl der intakten Notebooks in einer Lieferung vom Umfang vier zählt. Nach Vorlesung gilt $Z \sim bin(4, \frac{1}{10})$, d.h. die Verteilung von Z ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeiten

$$P(Z=k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{4-k}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Nun gilt:

$$P(Z=3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^{4-3} = 4 \cdot \frac{1 \cdot 9}{10000} = \frac{36}{10000} = 0,0036$$

und

$$\begin{aligned} P(Z \geq 3) &= P(Z=3) + P(Z=4) = 0,0036 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{10}\right)^4 \left(\frac{9}{10}\right)^{4-4} \\ &= 0,0036 + \frac{1}{10000} = 0,0037. \end{aligned}$$

Nach Vorlesung bzw. mit der Formelsammlung erhalten wir für den Erwartungswert von $Z \sim bin(4, \frac{1}{10})$ und damit für die erwartete Anzahl intakter Notebooks in der Lieferung:

$$EZ = 4 \cdot \frac{1}{10} = 0,4.$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} P(A \setminus B) &= P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1 - P(A^c) - P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(c) Mit den Voraussetzungen aus der Aufgabenstellung gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= P(E) + P(F) - P(E)P(F) = (1 - P(F))P(E) + P(F). \end{aligned}$$

Demnach folgt (beachte $P(F) < 1$):

$$P(E) = \frac{1 - P(F)}{1 - P(F)} = 1.$$

Aufgabe 3

(a) (i) Für die Randverteilung P^X von X gilt

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=0,Y=3) \\ &= 0,1+0,4+0=0,5 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3) \\ &= 0,1+0,2+0,2=0,5\ , \end{aligned}$$

d.h. $X \sim bin(1,\, 0,5)$ und damit gilt insbesondere $EX = 1 \cdot 0,5 = 0,5$ und $Var(X) = 1 \cdot 0,5 \cdot (1-0,5) = 0,25$.
Für die Randverteilung P^Y von Y erhalten wir analog:

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=0,1+0,1=0,2\ , \\ P(Y=2) &= P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)=0,4+0,2=0,6\ , \\ P(Y=3) &= P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=3)=0+0,2=0,2. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} EY &= \sum_{k=1}^{3} kP(Y=k) = 1\cdot P(Y=1)+2\cdot P(Y=2)+3\cdot P(Y=3) \\ &= 0,2+1,2+0,6=2, \\ E(Y^2) &= \sum_{k=1}^{3} k^2 P(Y=k) = 1^2\cdot P(Y=1)+2^2\cdot P(Y=2)+3^2\cdot P(Y=3) \\ &= 0,2+2,4+1,8=4,4 \end{aligned}$$

und damit

$$Var(Y) = E(Y^2)-(EY)^2 = 4,4-2^2 = 0,4.$$

Zuletzt erhalten wir für die Verteilungsfunktion F_Y von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0\ , & y<1, \\ 0,2\ , & 1\le y<2, \\ 0,8\ , & 2\le y<3, \\ 1\ , & y\ge 3. \end{cases}$$

(ii) Es gilt:

$$P(Y=2|X=1) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)} \overset{(i)}{=} \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

und

$$P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} \overset{(i)}{=} \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}.$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i\in\{0,1\}} \sum_{j\in\{1,2,3\}} ijP(X=i,Y=j) \\ &= P(X=1,Y=1) + 2P(X=1,Y=2) + 3P(X=1,Y=3) \\ &= 0,1 + 0,4 + 0,6 = 1,1 \end{aligned}$$

und damit

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY \overset{(i)}{=} 1,1 - 0,5 \cdot 2 = 0,1.$$

Insbesondere sind X und Y nicht stochastisch unabhängig.

(b) (i) Sei zunächst $y > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f^Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{X,Y}(x,y)dx = \int_1^{\infty} \frac{y^2 e^{-\frac{y}{2}}}{x^{4y+1}} dx \\ &= y^2 e^{-\frac{y}{2}} \int_1^{\infty} x^{-4y-1} dx = y^2 e^{-\frac{y}{2}} \left[-\frac{x^{-4y}}{4y} \right]_{x=1}^{x=\infty} \\ &= y^2 e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{4y} = \frac{1}{4} y e^{-\frac{1}{2}y}. \end{aligned}$$

Für $y \leq 0$ erhalten wir:

$$f^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^{X,Y}(x,y)}_{=0 \text{ nach Def. von } f^{X,Y}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \; dx = 0.$$

Folglich gilt die Behauptung ($Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2)$).

(ii) Für $y > 0$ und damit nach (i) auch $f^Y(y) > 0$ gilt gemäß Vorlesung:

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{f^{X,Y}(x,y)}{f^Y(y)}.$$

Damit erhalten wir für $x > 1$

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{\frac{y^2 e^{-\frac{y}{2}}}{x^{4y+1}}}{\frac{y}{4} e^{-\frac{y}{2}}} = \frac{4y}{x^{4y+1}}$$

und für $x \leq 0$

$$f^{X|Y=y}(x) = \frac{\overbrace{f^{X,Y}(x,y)}^{=0 \text{ nach Def. von } f^{X,Y}}}{f^Y(y)} = 0$$

(es handelt sich hierbei um die Dichte der Pareto-Verteilung $Par(4y)$ mit Parameter $4y$).

(iii) Für $y > \frac{1}{4}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} E[X|Y=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f^{X|Y=y}(x) dx \overset{(ii)}{=} 4y \int_1^{\infty} x^{-4y} dx \\ &= 4y \left[\frac{x^{-4y+1}}{-4y+1} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{4y}{4y-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) (i) Die Log-Likelihood-Funktion $l(\alpha) \equiv l(\alpha|x_1, ..., x_n)$ basierend auf den Daten $x_1, ..., x_n > 0$ ist für $\alpha > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} l(\alpha) &= \ln\left[\prod_{i=1}^{n} f_\alpha^{X_i}(x_i)\right] = \ln\left[(2\alpha)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\alpha \sum_{i=1}^n x_i^2}\right] \\ &= n\ln(\alpha) + n\ln(2) + \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right) - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$l'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

und

$$l'(\alpha) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 0 \iff \frac{1}{\alpha} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \iff \alpha \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Folglich ist l auf $(0, \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2})$ streng monoton steigend und auf $(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \infty)$ streng monoton fallend und besitzt daher eine globale Maximalstelle in $\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Demnach erhalten wir $\hat{\alpha} := \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ als Maximum-Likelihood-Schätzer für α (basierend auf n Beobachtungen).

(ii) 1. Variante (über die Verteilungsfunktion von X_1):

Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_{X_1^2}(x) &= P(X_1^2 \leq x) = P(|X_1| \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) \\ &= P(X_1 \leq \sqrt{x}) = F_{X_1}(\sqrt{x}) = 1 - e^{-\alpha(\sqrt{x})^2} = 1 - e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

und für $x \leq 0$

$$0 \leq F_{X_1^2}(x) = P(X_1^2 \leq x) \leq P(X_1^2 \leq 0) = P(X_1 = 0) = 0$$

und damit $F_{X_1^2}(x) = 0$. Diese Verteilungsfunktion ist gerade die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung $Exp(\alpha)$ mit Parameter α.

2. Variante (mit Hilfe des Dichtetransformationssatzes):

Wir definieren die Abbildung

$$g: \ (0,\infty) \to (0,\infty): \ x \mapsto x^2.$$

g ist bijektiv und besitzt die Umkehrfunktion

$$g^{-1}: \ (0,\infty) \to (0,\infty): \ y \mapsto \sqrt{y}.$$

Weiter sind g und g^{-1} stetig differenzierbar mit $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $y \in (0,\infty)$. Mit dem Dichtetransformationssatz folgt für $y \in (0,\infty)$

$$f^{X_1^2}(y) = f^{g(X_1)}(y) = |(g^{-1})'(y)| f^{X_1}(g^{-1}(y)) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2\alpha\sqrt{y}e^{-\alpha(\sqrt{y})^2} = \alpha e^{-\alpha y}$$

und für $y \leq 0$ gilt $f^{X_1^2}(y) = 0$. Da diese Dichte die Dichte einer Exponentialverteilung $Exp(\alpha)$ mit Parameter α ist, folgt die Behauptung.

(iii) Es gilt:

$$E\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

(b) (i) Für $\mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} E_\mu(\hat{\mu}_1) &= E_\mu\left(\frac{1}{3}(X_1 + 2X_2)\right) = \frac{1}{3}(E_\mu X_1 + 2E_\mu X_2) = \frac{1}{3}(\mu + 2\mu) = \mu, \\ E_\mu(\hat{\mu}_2) &= E_\mu\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} E_\mu X_i = \frac{1}{3}(\mu + \mu + \mu) = \mu \end{aligned}$$

und daher sind beide Schätzer erwartungstreu für μ.

(ii) Weiter gilt für $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Var_\mu(\hat{\mu}_1) &= Var_\mu\left(\frac{1}{3}(X_1 + 2X_2)\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (Var_\mu(X_1) + 2^2 Var_\mu(X_2)) = \frac{1}{9}(1+4) = \frac{5}{9}, \\ Var_\mu(\hat{\mu}_2) &= Var_\mu\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{i=1}^{3} Var_\mu(X_i) = \frac{1}{9}(1+1+1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Da beide Schätzer erwartungstreu für μ sind, ist $\hat{\mu}_2$ dem Schätzer $\hat{\mu}_1$ vorzuziehen, da er eine geringere Varianz besitzt und somit weniger weit um seinen Erwartungswert μ, den es zu schätzen gilt, streut.