Musterlösung 1. Übung

14. Mai 2003

Aufgabe 1

a)

$\Omega = \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \;\big|\; \omega_i \in \{1, \ldots, n\} \;\forall\; 1 \leq i \leq m\big\} \qquad n, m \in \mathbb{N}$
$\omega_i = j \;\Leftrightarrow\; i$-ter Druckauftrag wird von Drucker j bearbeitet.
$|\Omega| = n^m$
$A = \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \Omega \;\big|\; \omega_1 = 1\big\}$
also: $|A| = n^{m-1}$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n^{m-1}}{n^m} = \frac{1}{n}$$

b)

$B = \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \Omega \;\big|\; \omega_i \neq 1 \;\forall\; i \in \{1, \ldots, m\}\big\}$
$|B| = (n-1)^m$
$$P(B) = \frac{(n-1)^m}{n^m} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

c) Sei $n = m$

$C = \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \;\big|\; \exists\; i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } i \neq j, \omega_i = \omega_j \text{ und } \omega_i \neq \omega_k \;\forall\; k \neq i, j\big\}$
$$|C| = n \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{2} \cdot (n-2)! = n! \cdot \binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot n!$$
$$P(C) = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)n!}{n^n}$$

Aufgabe 2

Ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge werden $n = 7$ Kugeln aus $N = 70$ Kugeln gezogen.

$$\Omega = \Omega_{\mathrm{II}} = \left\{(\omega_1, \ldots, \omega_7) \in 70^7 \;\middle|\; \omega_i \neq \omega_j \;\forall\; i \neq j, 1 \leq i, j \leq 7\right\}$$
$$|\Omega| = \frac{70!}{(70-7)!} = \frac{70!}{63!}$$

a) $A \equiv$ Es wird 7 7 7 7 7 7 7 gezogen.

$$P(A) = \frac{7!}{\frac{70!}{63!}} \approx 8{,}3 \cdot 10^{-10}$$

b) $B \equiv$ Es wird 3 5 9 2 1 0 6 gezogen.

$$P(B) = \frac{7^7}{\frac{70!}{63!}} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-7}$$

a) $C \equiv$ Es wird 3 3 5 2 3 2 4 gezogen.

$$P(C) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\frac{70!}{63!}} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}
|P(A) - P(B)| &= |P(A \cap \Omega) - P(B \cap \Omega)| \\
&= |P(A \cap (B^C \cup B)) - P(B \cap (A^C \cup A))| \\
&= |P((A \cap B^C) \cup (A \cap B)) - P((B \cap A^C) \cup (B \cap A))| \\
&= |P(A \cap B^C) + P(A \cap B) - P(B \cap A^C) - P(B \cap A)| \\
&= |P(A \cap B^C) - P(B \cap A^C)| \underset{|a-b| \leq |a|+|b|}{\leq} P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)
\end{aligned}$$

b) Lösungsweg mit der Bonferroni Ungleichung:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =& 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right) \qquad \text{mit Bonferroni folgt} \\
\geq& 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^C) = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)) \\
=& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Zeige: $P(A^C) = 1 - P(A)$
$((i), (ii), (iii)$ beziehen sich auf Def. 2.10)

$$
\begin{aligned}
&1 \overset{(i)}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^C) \overset{(ii)}{=} P(A) + P(A^C) \\
&\Leftrightarrow \quad P(A^C) = 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

d) Zeige: $P(B) - P(A) = P(B \setminus A)$ für $A \subset B$

$$P(B) \underset{A \subset B}{=} P(A \cup B \setminus A) \overset{(ii)}{=} P(A) + P(B \setminus A)$$

b) Zeige: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A \cup B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) \\
&= P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) \overset{\text{(d)}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

c) Zeige: $P(A) \leq P(B)$ für $A \subset B$

$$P(B \setminus A) \overset{\text{(d)}}{=} P(B) - P(A) \geq 0$$

Musterlösung 2. Übung

22. Mai 2003

Aufgabe 5

a) $A_i \;\Leftrightarrow$ Drucker i $(1 \leq i \leq n)$ bekommt keinen Auftrag

$$P(A_i) = \frac{(n-1)^m}{n^m}$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^m}{n^m} \qquad i \neq j$$

$$\vdots$$

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = \frac{(n-k)^m}{n^m}$$

für i_j, mit $1 \leq j \leq k, 1 \leq i_j \leq n, i_j$ paarweise verschieden

b) $A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots \cap A_n^C \;\Leftrightarrow$ Jeder Drucker erhält mindestens einen Auftrag

$$P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots \cap A_n^C\right) = 1 - P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right)$$

$$\begin{aligned}
P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \underset{\text{Siebformel}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} P\left(\bigcap_{l=1}^{j} A_{i_l}\right) \\
&= \binom{n}{1} \frac{(n-1)^m}{n^m} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)^m}{n^m} + \ldots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \frac{(n-n)^m}{n^m} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \;\; P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots \cap A_n^C\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}$$

c) $B \;\Leftrightarrow\; k$ Drucker bekommen keinen Auftrag
$\Rightarrow\;\; n-k$ Drucker bekommen mindestens einen Auftrag
Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Drucker zu wählen, die keinen Auftrag erhalten.

$$\begin{aligned}
P(B) &= \frac{\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^m}{(n-k)^m}\right)(n-k)^m}{n^m} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^m}{n^m}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

a)

$$
\begin{aligned}
&Z: \text{ Ziel erreicht}\\
&A, B, C: \text{ Daten über Provider } A, B, C \text{ gesendet}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(Z|A) = 0.95 \qquad P(A) = 0.45\\
&P(Z|B) = 0.90 \qquad P(B) = 0.30\\
&P(Z|C) = 0.92 \qquad P(C) = 0.25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Z) =& P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B) + P(Z|C)P(C)\\
=& 0.95 \cdot 0.45 + 0.9 \cdot 0.3 + 0.92 \cdot 0.25 = 0.9275
\end{aligned}
$$

$$
P(B|Z^C) = \frac{P(Z^C|B)P(B)}{P(Z^C)} = \frac{(1 - P(Z|B))P(B)}{1 - P(Z)} \approx 0.414
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&P(A|Z) = 0.4, \qquad P(Z|A) = x \text{ gesucht.}\\
&P(Z|A) = \frac{P(A|Z)P(Z)}{P(A)} = \frac{P(A|Z)\big(P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B) + P(Z|C)P(C)\big)}{P(A)}\\
&\Leftrightarrow \ x = \frac{0.4(0.45x + 0.5)}{0.45}\\
&\Leftrightarrow \ (0.45 - 0.4 \cdot 0.45)x = 0.5 \cdot 0.4\\
&\Leftrightarrow \ x \approx 0.74
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

a)

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B \cap C)P(C) + P(A \cap B \cap C)P(C^C)\\
&= P(A \cap B \cap C)P(C) + P(A \cap B|C)P(C)P(C^C)\\
&= P(A \cap B \cap C)P(C) + P(A \cap B|C^C)P(C)P(C^C)\\
&= P(A \cap B \cap C)P(C) + P(A \cap B \cap C^C)P(C)\\
&= P(A \cap B)P(C)\\
&= P(A)P(B)P(C)
\end{aligned}
$$

b) Nein, A, B, C sind nicht notwending stoch. unabhängig:
Sei $A = C$, $0 < P(C) < 1$, $B = \emptyset$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&P(A \cap B|C) = 0 = P(A \cap B|C^C)\\
&P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)\\
&\text{aber } P(A \cap C) = P(C) \neq P(C)^2 = P(A)P(C)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Zeige zunächst **b)**:
Sei $\Omega = \left\{ \omega = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \;\middle|\; x_i \in \{0,1\}, i \in \mathbb{N} \right\}$ und
$m = (m_1, m_2, \ldots, m_l)$ eine beliebige Sequenz der Länge $l \in \mathbb{N}$.
$A_n = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; x_{n+i-1} = m_i \;\forall\; 1 \leq i \leq l \right\}$ sei das Ergeinis, das die Sequenz m ab dem n-ten Wurf fällt.
Die Folge $\{A_{n\cdot l}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine stochastische unabhängige Teilfolge von $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$P\left(A_n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^l$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n\cdot l}) = \infty \underset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} P\left(\limsup_{n\to\infty} A_{n\cdot l}\right) = 1$$

Somit tritt m unendlich oft in der Teilfolge auf und somit auch in der Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
$\Rightarrow$ m tritt mit Wahrscheinlichkeit 1 überhaupt in der Folge auf.

a) $A_{(m)}$ sei das Ereignis, dass die Sequenz $(m) \in \mathfrak{M}$ auftritt. Die Menge alle Sequenzen $\mathfrak{M}$ ist abzählbar.
nach **b)** gilt $P(A_{(m)}) = 1$.
$A = \bigcap_{m\in\mathfrak{M}} A_{(m)}$ sie das Ereignis, dass alle Sequenzen auftreten.

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - P(A^C) &= 1 - P\left(\left(\bigcap_{m\in\mathfrak{M}} A_{(m)}\right)^C\right) = 1 - P\left(\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} A_{(m)}^C\right) \\ &\geq 1 - \sum_{m\in\mathfrak{M}} P\left(A_{(m)}^C\right) = 1 \end{aligned}$$

Musterlösung 3. Übung

28. Mai 2003

Aufgabe 9

A_i sei das Ereignis, dass Router i intakt ist mit $P(A_i) = p_i$.
I sei das Ereignis, dass ein Verbindung möglich ist.
Aus

$$P(I) = P(I|A_1)\ P(A_1) + P(I|A_1^C)P(A_1^C)$$

folgt mit

$$P(I|A_1) = P(A_3 \cup A_4) = 1 - P((A_3 \cup A_4)^C) = 1 - P(A_3^C \cap A_4^C) = 1 - (1-p_3)\cdot(1-p_4)$$

und

$$\begin{aligned} P(I|A_1^C) =& P((A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)) = P(A_2 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ =& p_2p_3 + p_2p_4 - p_2p_3p_4 \end{aligned}$$

das Ergebnis

$$P(I) = p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3 - p_1p_3p_4 - p_2p_3p_4 - p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3p_4$$

Aufgabe 10

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k\ (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\ \frac{n!}{k!(n-k)!} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k}}_{\longrightarrow 1} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \underbrace{\prod_{l=0}^{k-1} \underbrace{\frac{n-l}{n}(np_n)}_{\longrightarrow 1\cdot\lambda}}_{\longrightarrow \lambda^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Bekannt ist, dass für $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n,\ x \geq 0$, gilt $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x} =: f(x)$.
Aus $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ und $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ folgt jedoch im Allgemeinen nicht,

dass auch $f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ gilt. Die Vermutung, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \stackrel{!}{=} e^{-\lambda}$, für $\lambda_n = np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ gilt, ist somit zu zeigen:

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall\, n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) \text{ ist monoton fallend in x} \\
 & f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \text{ ist stetig} \\
 & \lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \\
\Leftrightarrow & \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0, \text{ so dass } \forall\, n > n_0: \ \lambda - \varepsilon < \lambda_n < \lambda + \varepsilon \\
\underset{f_n \text{monoton}}{\Rightarrow} & f_n(\lambda+\varepsilon) \le f_n(\lambda_n) \le f_n(\lambda - \varepsilon) \\
\underset{n\to\infty}{\Rightarrow} & f(\lambda+\varepsilon) \le \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \le f(\lambda-\varepsilon) \\
\underset{f stetig, \varepsilon\to 0}{\Rightarrow} & f(\lambda) \le \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \le f(\lambda) \\
\Rightarrow & f(\lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda_n)
\end{array}
$$

Somit gilt die Vermutung und auch die Aussage.

Aufgabe 11

a) X beschreibe die Anzahl der Sendungen eines Pakets und hat den Träger $T = \mathbb{N}$.
Sei $Z \sim \text{Geo}(p)$ mit Träger $T' = \mathbb{N}_0$, so gilt $X = 1 + Z$.
Für die Zähldichte von X gilt

$$f_X(k) = P^X(k) = P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Die Übertragung des Pakets wird:
1) nicht wiederholt: $Z = 0 \ \Rightarrow \ X = 1 \ \Rightarrow P(X = 1) = p$,
2) 2 mal wiederholt: $Z = 2 \ \Rightarrow \ X = 3 \ \Rightarrow P(X = 3) = p(1-p)^2$.
Mit Wahrscheinlichkeit 0.99 sollen höchstens drei erneute Übertragungen nötig sein. Gesuch wird ein p, so dass $P(X \le 4) = 0.99$

$$0.99 = \sum_{k=1}^{4} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=0}^{3}(1-p)^i = p\,\frac{1-(1-p)^4}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^4$$
$$\Rightarrow \ p = 1 - \sqrt[4]{0.01} \approx 0.68$$

b) Träger von Y: $T = \{1, 2, \dots, 10\}$

$$P(Y = k) = \begin{cases} P(X = k) & \forall\, k \in \{1, 2, \dots, 9\} \\ \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) & , \text{ falls } k = 10 \end{cases}$$

$$P(Y = 10) = \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) = 1 - \sum_{i=1}^{9} P(X = i) = 1 - \sum_{j=0}^{8} P(Z = j)$$
$$= 1 - (1 - (1-p)^9) = (1-p)^9$$

$$f_Y(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \forall\, k \in \{1, 2, \dots, 9\} \\ (1-p)^9 & , \text{ falls } k = 10 \end{cases}$$

c) X sei die Anzahl der Pakete, die mehrfach versendet werden müssen.
$X \sim \text{Bin}(n, p')$ mit $n = 1000$, $p' = 1 - p = 10^{-4}$.
n ist groß, p' klein $\Rightarrow$ Gesetz seltener Ereignisse ist anwendbar, d.h. X ist näherungsweise Poisson-Verteilt mit Parameter $\lambda = 1000 \cdot 10^{-4} = 0.1$. Sei $Y \sim \text{Poi}(0.1)$.

$$\begin{aligned} P(\text{mehr als 3 Pakete mehrfach übertragen}) =& P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \\ \approx& 1 - P(Y \leq 3) \\ =& 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-0.1} \frac{0.1^k}{k!} \approx 3.85 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Aufgabe 12

a) $f(k)$ muss normiert sein:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} f(k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - c \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(c - \frac{c}{n+1} \right) = c \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $c = 1$ erfüllt die Normierungsbedingung.
$f(k) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Somit ist durch $f(k)$ für $c = 1$ eine Zähldichte gegeben.

b) Sei $d > 0$:

1. $F(x)$ ist monoton $\Leftrightarrow$ $0 \leq cx^2 \leq 1 \; \forall x \in [0, d)$ $\Leftrightarrow$ $cd^2 \leq 1$ und $c \geq 0$
   $\Leftrightarrow$ $0 \leq c \leq \frac{1}{d^2}$
2. $\lim_{x\to-\infty} = 0$, $\lim_{x\to\infty} = 1$
3. F muss rechtseitig stetig sein: überprüfe $x = 0$ und $x = d$:

$$\begin{aligned} x = 0 &: \lim_{x \downarrow 0} F(x) = 0 = F(0) \\ x = d &: \lim_{x \downarrow d} F(x) = 1 = F(d) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ ist Verteilungfunktion für $d > 0$, $c \in \left[0, \frac{1}{d^2}\right]$.
Für $d = 0$ ist $F(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ Verteilungsfunktion $\forall$ $c \in \mathbb{R}$

Für

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ c\,x^2, & 0 \le x \le d, \\ 1, & d < x\ ? \end{cases}$$

gilt $\lim_{x \downarrow d} F(x) = 1 \overset{!}{=} F(d) = c \cdot d^2$ nur für $c = \frac{1}{d^2}$ und $d > 0$.

c) $F(x) = a\ \arctan(x-c)+b$ ist monoton steigend und stetig, also insbesondere rechtsseitig stetig.

$$\lim_{x \Rightarrow -\infty} F(x) = a\frac{-\pi}{2} + b \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; b = \frac{\pi}{2}a$$
$$\lim_{x \Rightarrow \infty} F(x) = a\frac{\pi}{2} + b \overset{!}{=} 1 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{2}{\pi}(1-b) = \frac{2}{\pi} - a \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{\pi}$$

$F(x)$ ist Verteilungfunktion für $a = \frac{1}{\pi}$, $b = \frac{1}{2}$ und $c \in \mathbb{R}$.

d)

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} c\frac{1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{c}{2} \overset{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; c = 2$$

Aber für $c = 2$ ist z. B. $F(1) > 1 \;\Rightarrow\; F(x)$ ist keine Verteilungfunktion

Musterlösung 4. Übung

30. Mai 2003

Aufgabe 13

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = 0.01$
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$
$F(x) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}$

a)

1.) $P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - F_X(100) = e^{-100\lambda} = \frac{1}{e}$

2.) $$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 300) &= P(X \leq 300) - P(X < 25) = P(X \leq 300) - P(X \leq 25) \\ &= F(300) - F(25) = 1 - e^{-300\lambda} - 1 + e^{-25\lambda} \\ &= e^{-\frac{1}{4}} - e^{-3} \end{aligned}$$

3.) $P(X < 150) = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$

b) Gesucht ist ein x, so dass $P(X \leq x) = p = 0,5$

$p = P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$\Rightarrow \quad 1 - p = e^{-\lambda x}$
$\Rightarrow \quad \ln(1-p) = -\lambda x$
$\Rightarrow \quad x = -\dfrac{\ln(1-p)}{\lambda} = -100\ \ln(1-p) \approx 69,315$

c)

$$
\begin{aligned}
&p = P(u_1 < X \le u_2) = P(X \le u_2) - P(X \le u1) = F(u_2) - F(u_1)\\
&\Rightarrow \quad p = e^{-\lambda u_1} - e^{-\lambda u_2}\\
&\Rightarrow \quad e^{-\lambda u_2} = e^{-\lambda u_1} - p\\
&\Rightarrow \quad -\lambda u_2 = \ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)\\
&\Rightarrow \quad u_2 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)\\
&\text{Suche } \min_{0\le u_1}\Bigg(\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)}_{u_2} - u_1\Bigg) =: \min_{0\le u_1} f(u_1)\\
&f'(u_1) = \frac{1}{e^{-\lambda u_1} - p}e^{-\lambda u_1} - 1 \underset{x:=e^{-\lambda u_1}}{=} \frac{x}{x-p} - 1 \overset{!}{\ge} 0
\end{aligned}
$$

Wenn die letzte Ungleichung gilt, dann ist $f(x)$ monoton steigend. Damit ist $u_1 = 0$ die Lösung.
Zeige nun die letzte Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\text{Beh.: } x - p \le 0 \Rightarrow e^{-\lambda u_1} \le p, \text{ aber } p = P(u_1 < x \le u_2) < e^{-\lambda u_1} \quad \Rightarrow \lightning\\
&\Rightarrow \quad x - p > 0\\
&\text{Zeige nun: } \frac{x}{x-p} \ge 1\\
&\Leftrightarrow \quad x \ge x - p\\
&\Leftrightarrow \quad 0 \ge -p
\end{aligned}
$$

Somit ist $f(u_1)$ monoton steigend in u_1. Mit $u_2(u_1 = 0) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^0 - p\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$ folgt das gesuchte Intervall

$$
\left(0, -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)\right].
$$

Aufgabe 14

Es gelte $P(X > x + y | X > x) = P(X > y) \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P^X((y,\infty)) &= P^X((x+y,\infty)|(x,\infty)) \\
&= \frac{P^X((x+y,\infty)\cap(x,\infty))}{P^X((x,\infty))} \\
&= \frac{P^X((x+y,\infty))}{P^X((x,\infty))}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; P^X((x+y,\infty)) = P^X((x,\infty))\cdot P^X((y,\infty))$$

$$P^X((x,\infty)) = 1 - P^X((-\infty,x]) = 1 - F_X(x) =: \overline{F}_X(x)$$

$$\Rightarrow\; \overline{F}_X(x+y) = \overline{F}_X(x)\cdot\overline{F}_X(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R},\; \overline{F}_X \text{ stetig}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}\; \overline{F}_X(x) = e^{\alpha x},\; \alpha\in\mathbb{R}\text{ Annahme: } \alpha > 0 \;&\Rightarrow\; \overline{F}_X \text{ streng monoton steigend} \\
&\Rightarrow\; F_X \text{ streng monoton fallend} \\
\alpha = 0 \;&\Rightarrow\; \overline{F}_X(x) = 1 \;\Rightarrow\; F_X(x) = 0\;\forall\, x \\
\Rightarrow \alpha < 0,&\;\text{ setze } \lambda := -\alpha \\
\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} &\;\Rightarrow\; X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)
\end{aligned}$$

Somit folgt, dass eine Zufallsvariable X mit gedächnisloser, stetiger Verteilungsfunktion exponential Verteilt ist

Aufgabe 15

Die Zufallsvariable L beschreibe die Lebensdauer eins Chips. $L = 0$ bedeutet, der Chip ist von Anfang an defekt.
D sei das Ereignis, dass ein Chip, von Anfang an defekt ist.

$$P(D) = 0.05 \quad \Rightarrow P(D^C) = 0.95$$

$L(x)$ sei für $x > 0$ das Ereignis, dass die Lebensdauer kleiner oder gleich x ist. Nach Aufgabenstellung hat ein nicht defekter Chip eine exponential mit Parameter $\lambda = 0.001$ verteilte Lebensdauer, also ist

$$P(L(x)|D^C) = P(L \le x|D^C) = 1 - e^{-\lambda x}$$

für $x > 0$.
Der Satz von der totalen Wkt. liefert für $x > 0$

$$P(L \le x) = P(L(x)) = P(L(x)|D)P(D) + P(L(x)|D^C)P(D^C) = 0.05 + \left(1 - e^{-\lambda x}\right)0.95$$

Somit ergibt sich die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.05 & x = 0 \\ 0.05 + 0.95\left(1 - e^{-\lambda x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

Die Verteilung ist somit weder diskret (es gibt keinen abzählbaren Träger) noch absolut stetig (nicht stetig in 0).

Aufgabe 16

a) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \;\Rightarrow\; f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k\ z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k}\ z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (pz+1-p)^n \end{aligned}$$

b) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
Berechne die Laplace-Transformierte:

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\, f(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}\, \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-(\lambda+s)x}\, dx \\ & \qquad \text{Substituiere: } (\lambda+s)x = y \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1} e^{-y}\, \frac{1}{\lambda+s}\, dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha \Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy}_{\Gamma(\alpha)} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Musterlösung 5. Übung

27. Juni 2003

Aufgabe 17

Damit durch $f_{(x,y)}(x,y)$ die Dichte eines Zufallsvektors beschrieben wird, muss f normiert sein:

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1\int_0^x cxy\ dy\ dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}cxy^2\right]_0^x\ dx$$
$$= \int_0^1 \frac{c}{2}x^3\ dx = \left[\frac{c}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{c}{8}$$

$\Rightarrow c = 8$. Da auch $f_{(x,y)}(x,y) \geq 0\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}^2$, ist durch f die Dichte eines Zufallsvektors gegeben.

Bestimme die Randdichten:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\ dy \underset{0 \leq y \leq x}{=} \int_0^x 8xy\ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\ dy = 4x^3\ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\ dx \stackrel{(*)}{=} \int_y^1 8xy\ \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\ dx = (4y - 4y^3)\ \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

(*): Aus $0 \leq y \leq x$ und $0 \leq x \leq 1$ folgt: $y \leq x \leq 1$

Verteilungsfunktionen der Randverteilungen:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\ dt = \int_0^x 4t^3\ \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\ dt = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^{y} (4t - 4t^3)\ \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\ dt = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 2y^2 - y^4 & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion von (x,y):

$$F_{(x,y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(x,y)}(u,v)\ dvdu = \int_{0}^{\min\{1,x\}}\int_{0}^{\min\{u,y\}} 8uv\ dvdu$$
$$= \begin{cases} 0 & x<0 \ \vee \ y<0 \\ 1 & x>1 \ \wedge \ y>1 \\ x^4 & 0\le x\le 1 \ \wedge \ y>x \\ 2y^2-y^4 & x>1 \ \wedge \ 0\le y\le 1 \\ ? & 0\le x\le 1 \ \wedge \ 0\le y\le x \end{cases}$$

Sei also $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$:

$$F_{(x,y)}(x,y) = \int_0^y\int_0^u 8uv\ dvdu + \int_y^x\int_0^y 8uv\ dvdu =$$
$$= \int_0^y 4u^3\ du + \int_y^x 4uy^2\ du = y^4 + 2y^2(x^2-y^2)$$
$$= 2x^2y^2 - y^4$$

Sind X und Y stoch. unabh.?

$$F\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \neq \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^4\right) = F_x\left(\frac{1}{3}\right)\cdot F_y\left(\frac{2}{3}\right)$$

$\Rightarrow X$ und Y sind nicht s.u..

Aufgabe 18

$N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda = 5$
$I \sim \mathrm{N}(-2,4) \Rightarrow P(I \le x) = \phi(\frac{x+2}{2})$
N, I seien s.u.

a) Gesucht:

$$\begin{aligned} P(N<10, I<1,8) &= P(N<10)\ P(I<1,8) \\ &= e^{-\lambda}\sum_{I=0}^{9}\frac{\lambda^i}{i!}\cdot\underbrace{\phi\left(\frac{1,8+2}{2}\right)}_{\phi(1.9)} \\ &\approx 0,968\cdot 0,971 \approx 0,940 \end{aligned}$$

b) Gesucht:

$$\begin{aligned}
P(N \leq 3, N \cdot I \leq 1) &= \sum_{k=0}^{3} P(N = k, k \cdot I \leq 1) \\
&= \sum_{k=1}^{3} P\left(N = k, I \leq \frac{1}{k}\right) + P(N = 0) \\
&= P(N = 0) + P(N = 1) \cdot P(I \leq 1) + P(N = 2) \cdot P(I \leq 1/2) \\
&\quad + P(N = 3) \cdot P(I \leq 1/3) \\
&\approx 0,0067 + 0,0337 \cdot 0,9332 + 0,0842 \cdot 0,8944 + 0,1404 \cdot 0,8770 \\
&\approx 0,237
\end{aligned}$$

Aufgabe 19

X sie Ankunftszeit von $A: \ X \sim \mathrm{R}[21;22]$
Y sie Ankunftszeit von $B: \ Y \sim \mathrm{R}[20.5;22.5]$
X, Y seien s.u.

$$f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x) f_y(y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[21;22]}(x) \mathbb{1}_{[20.5;22.5]}(y)$$

Die beiden Treffen sich, wenn $Y \leq X + \frac{1}{4} \ \wedge \ X \leq Y + \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow X - \frac{1}{2} \leq Y \leq X + \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
P\left(X - \frac{1}{2} \leq Y \leq X + \frac{1}{4}\right) &= \iint\limits_{x - \frac{1}{2} \leq y \leq x + \frac{1}{4}} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[21;22]}(x) \mathbb{1}_{[20.5;22.5]}(y) \ dx \ dy \\
&= \int_{21}^{22} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \ dy \ dx = \frac{1}{2} \int_{21}^{22} \left(x + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{21}^{22} \frac{3}{4} dx = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Aufgabe 20

Zeige: $X1, \dots, X_n$ s.u. $\Rightarrow$ $P(X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = t_i)$.
Zeige dazu

$$P(X_1 = t_1, \dots, X_j = t_j, X_{j+1} \le t_{j+1}, \dots X_n \le t_n) = \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j}^{n} P(X_i \le t_i),$$

für $j = 1, \dots, n$. Für $j = n$ ergibt sich die Beauptung.
Der Beweis erfolgt per Induktion (ObdA sei der Träger $T = \mathbb{N}$).

IA: $j = 1,$ gilt nach Definition der stochastischen Unabhängigkeit.
IS: $j \to j+1$

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = t_1, \dots, X_j = t_j, X_{j+1} \le t_{j+1}, \dots, X_n \le t_n) \\
&= P(X_1 = t_1, \dots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \le t_j, X_{j+1} \le t_{j+1}, \dots, X_n \le t_n) \\
&\quad - P(X_1 = t_1, \dots, X_{j-1} = t_{j-1}, \underbrace{X_j \le t_j - 1}_{\Leftrightarrow\ X_j < t_j \text{ da } T = \mathbb{N}_0}, X_{j+1} \le t_{j+1}, \dots, X_n \le t_n) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \le t_j) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i) \\
&\quad - \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \le t_j - 1) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i) \\
&= \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i) \Big(\underbrace{P(X_j \le t_j) - P(X_j \le t_j - 1)}_{=P(X_j = t_j)} \Big) \\
&= \prod_{i=1}^{j} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Zeige noch die Gegenrichtung:

$$P(X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n) = \sum_{\substack{s_i \in T_i :\ s_i \le t_i \\ i = 1, \dots, n}} P(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \sum_{s_i \le t_i} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = s_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{s_i \le t_i} P(X_i = s_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t_i) \quad \Rightarrow \quad \text{s.u.}$$

Musterlösung 6. Übung

24. Juli 2003

Aufgabe 21

$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$
$X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$
X_1 und X_2 seien s.u.

a) $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\ f_{X_2}(x_2) = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1)\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_2)$

b)

i) Gesucht ist $P(X_1 + X_2 \leq 1)$ (Lösung ohne Faltungsformel):
Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned}
F_{X_1+X_2}(z) &= \iint\limits_{0\leq x_1+x_2\leq z} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_1)\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_2)\ dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^z \int_0^{z-x_2} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^z \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} \left(1 - e^{-\lambda_1(z-x_2)}\right) dx_2 \\
&= \int_0^z \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} - \lambda_2 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x_2 - \lambda_1 z}\right) dx_2 \\
&= 1 - e^{-\lambda_2 z} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_2)z} - 1\right) e^{-\lambda_1 z} \\
&= 1 - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 z}\right)
\end{aligned}$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gilt nach VL: $F_{X_1+X_2}(z) = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$

$$\Rightarrow \quad F_{X_1+X_2}(1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}\right), & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1 - e^{-\lambda_1} - \lambda_1 e^{-\lambda_1}, & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

ii) Gesucht ist $P(\max\{X_1, X_2\} \leq 1)$

$$\begin{aligned}
P(\max\{X_1,X_2\} \leq z) &= P(X_1 \leq z, X_2 \leq z) \underset{\text{s.u.}}{=} P(X_1 \leq z)\ P(X_2 \leq z) \\
&= F_{X_1}(z)\ F_{X_2}(z) = \left(1 - e^{-\lambda_1 z}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 z}\right) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_2} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}
\end{aligned}$$

Also: $P(\max\{X_1, X_2\} \leq 1) = 1 - e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_2} + e^{-\lambda_1 - \lambda_2}$

iii) Gesucht ist $P(\min\{X_1, X_2\} \leq 1)$

$$\begin{aligned} P(\min\{X_1, X_2\} \leq z) &= 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z) \\ &\underset{\text{s.u.}}{=} 1 - P(X_1 > z)\ P(X_2 > z) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z)) = 1 - e^{-\lambda_1 z}\ e^{-\lambda_2 z} \\ &= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) z} \end{aligned}$$

Also: $P(\min\{X_1, X_2\} \leq 1) = 1 - e^{-\lambda_1 - \lambda_2}$

Aufgabe 22

$\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei die Folge der gemessenen Temperaturen, $T_i \sim \mathrm{N}(400, 9)$.

$$S = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; T_n \in (-\infty, 395] \cup (405, \infty)\right\}$$

ist die Erste Eintrittszeit, des über-/unterschreitens der vorgegebenen Temperaturspanne.

$$\begin{aligned} &P(T_i \in (-\infty, 395] \cap (405, \infty)) = P(T_i \leq 395) + P(T_i \geq 405) \\ &\quad = P(T_i \leq 395) + 1 - P(T_i \leq 405) = \Phi\left(\frac{395 - 400}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{405 - 400}{3}\right) \\ &\quad = \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2 - 2\ \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.096 \end{aligned}$$

Es gilt $P(S = k) = (1 - p)^{k-1} p$, mit $p = P(T_i \in (-\infty, 395] \cup (405, \infty))$

$$\Rightarrow \quad P(S > 10) = 1 - P(S \leq 10) = 1 - \sum_{k=1}^{10} (1 - p)^{k-1} p = (1 - p)^{10} \approx 0.364$$

Aufgabe 23

a)

$$X \sim \mathrm{R}(0,1) \quad \Rightarrow \quad f_X(t) = \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in (0,1)$$

$Y = T(X)$ ist nicht standardnormalverteilt, da $T\big(\ (0,1)\ \big) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \neq (-\infty, \infty)$

T ist injektiv und stetig differenzierbar auf $(0,1)$, $T^{-1}(y) = \sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x\ e^{-x^2} \neq 0 \quad \forall\ x > 0$$

$\Rightarrow$ Transformationssatz anwendbar:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X\left(T^{-1}(y)\right)}{\left|\det\left(\frac{dT}{dx}\right)\big|_{T^{-1}(y)}\right|} \mathbb{1}_{T((0,1))}(y) \\
&= \frac{f_X\left(\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}\right)}{\left|-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x\ e^{-x^2}\Big|_{\sqrt{x=-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}}\right|} \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y) \\
&= \frac{1}{2y\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\ y\right)}} \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y)
\end{aligned}$$

b) $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ sei gleichverteilt auf $Q = (0,1)^2$ mit Dichte $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \mathbb{1}_Q(x_1, x_2)$

$$T(x_1, x_2) = \left(\sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2), \sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2)\right)$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{-\sin(2\pi x_2)}{\sqrt{-2\ln x_1}x_1} & 2\pi\sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2) \\ \frac{-\cos(2\pi x_2)}{\sqrt{-2\ln x_1}x_1} & -2\pi\sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2) \end{vmatrix} \\
&= \frac{2\pi}{x_1}\sin^2(2\pi x_2) + \frac{2\pi}{x_1}\cos^2(2\pi x_2) = \frac{2\pi}{x_1} \qquad \forall\ x_1 \in (0,1)
\end{aligned}$$

T ist injektiv und stetig differenzierbar.
Berechne nun T^{-1}:

$$\begin{aligned}
& {y_1}^2 = -2\ln x_1 \sin^2(2\pi x_2) \qquad (1) \\
& {y_2}^2 = -2\ln x_1 \cos^2(2\pi x_2) \qquad (2) \\
(1) + (2) \qquad & {y_1}^2 + {y_2}^2 = -2\ln x_1 \sin^2(2\pi x_2) - 2\ln x_1\cos^2(2\pi x_2) = -2\ln x_1 \\
\Rightarrow \qquad & x_1 = e^{-\frac{1}{2}\left({y_1}^2 + {y_2}^2\right)}
\end{aligned}$$

$x_2 = g(y_1, y_2)$ wird hier nicht benötigt.
Die Anwendung des Transformationssatzes liefert:

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) &= \frac{f_{\mathbf{X}}\left(T^{-1}(y_1, y_2)\right)}{\left|\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)\Big|_{(x_1,x_2)=T^{-1}(y_1,y_2)}\right|} \mathbb{1}_{T(Q)}(y_1, y_2) \\
&= \frac{1}{\left|\frac{2\pi}{x_1}\Big|_{x_1=e^{-\frac{1}{2}({y_1}^2+{y_2}^2)}}\right|} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}(y_1, y_2) \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}({y_1}^2+{y_2}^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}{y_1}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}{y_2}^2}
\end{aligned}$$

Dies ist das Produkt der Dichten zweier s.u. $N(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen.

Aufgabe 24

a) Sei $M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; {x_1}^2 + {x_2}^2 \le 1\right\}$
Die gemeinsame Dichte von (X_1, X_2) ist somit $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_M(x_1, x_2)$
Nach der Faltungsformel gilt für die Dichte von $Y = X_1 + X_2$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_M(t, y-t) dt$$

$\mathbb{1}_M(t, y-t) \neq 0$ nur für

$$\begin{aligned}
& t^2 + (y-t)^2 \le 1 \\
\Leftrightarrow\quad & t^2 + y^2 - 2ty + t^2 \le 1 \\
\Leftrightarrow\quad & t^2 - ty + \frac{1}{2}(y^2 - 1) \le 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t \le \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}(y^2-1)} \quad \wedge \quad t \ge \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}(y^2-1)} \quad \wedge \quad -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2} \\
\Rightarrow\quad & f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{y}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{y^2}{4}}}^{\frac{y}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{y^2}{4}}} 1 \; dt \; \mathbb{1}_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y^2}{4}} \mathbb{1}_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(y)
\end{aligned}$$

b)

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda),\ Y \sim \mathrm{R}(0,1),\ X, Y$ s.u.
Nach der Faltungsformel gilt:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ f_Y(z-t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\ e^{-\lambda t}\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \mathbb{1}_{[0,1]}(z-t)\ dt \\
&= \int_{\max\{0,z-1\}}^{z} \lambda\ e^{-\lambda t}\ dt\ \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) = -e^{-\lambda t}\Big|_{\max\{0,z-1\}}^{z} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) \\
&= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \le z \le 1 \\ e^{-\lambda(z-1)} - e^{-\lambda z}, & z > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Musterlösung 7. Übung

17. Juli 2003

Aufgabe 25

$N(s)$: Anzahl der Programme, die bis zur Zeit t+s abgearbeitet sein können
$N(s) = \max\{n \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{i=1}^{n} X_i \leq s\}$ mit $X_i \sim \text{Exp}(2)$, i. i. d., $i \in \mathbb{N}$.
$N(s)$ ist PP(2).
$N(s) \sim \text{Poi}(2s)$ mit $s = 6$ (6 Stunden).
Gesucht ist ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$0.95 \leq P(N(6) \geq n) = e^{-12} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{12^i}{i!} = 1 - e^{-12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{12^i}{i!}$$

$$\Leftrightarrow \ e^{-12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{12^i}{i!} \leq 0.05$$

Suche nun das größte n, das diese Bedingung erfüllt:

$$n = 7 \ : \quad e^{-12} \sum_{i=0}^{6} \frac{12^i}{i!} = 0.0458 < 0.05$$

$$n = 8 \ : \quad e^{-12} \sum_{i=0}^{7} \frac{12^i}{i!} = 0.0895 > 0.05$$

Also dürfen maximal $n = 7$ Jobs vorhanden sein, damit diese mit Wkt. 0.95 nach 6 Stunden abgearbeitet sind.

Aufgabe 26

Die Zwischenankunftszeiten Z_i sind $\text{Erl}(2, \lambda)$-verteilt. Definiere Zufallsvariablen $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$, X_i i.i.d.

$$\Rightarrow \quad Z_i = X_{2i} + X_{2i-1}, \quad i \in \mathbb{N}$$

$N(t) \triangleq$ Anzahl der ankommenden Jobs.

$$\begin{aligned} N(t) &= \max\left\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{i=1}^{n} Z_i \leq t\right\} \\ &= \max\left\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{i=1}^{n} (X_{2i} + X_{2i-1}) \leq t\right\} \\ &= \max\left\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{j=1}^{2n} X_j \leq t\right\} \end{aligned}$$

Definiere $M(t) = \max\left\{m \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{j=1}^{m} X_j \leq t\right\} \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$.
Es gilt $N(t) = \left\lfloor \frac{M(t)}{2} \right\rfloor$. Gesucht:

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P\left(\left\lfloor \frac{M(t)}{2} \right\rfloor = k\right) = P\left(\frac{M(t)}{2} = k\right) + P\left(\frac{M(t)-1}{2} = k\right) \\ &= P(M(t) = 2k) + P(M(t) = 2k+1) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Für $\lambda = t = 1$:

- $k = 0$: $P(N(t) = 0) = e^{-1}(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}) = 2e^{-1} \approx 0.736$
- $k = 2$: $P(N(t) = 2) = e^{-1}(\frac{1}{24} + \frac{1}{120}) = \frac{6}{120}e^{-1} \approx 0.018$
- $k = 4$: $P(N(t) = 4) = e^{-1}(\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}) \approx 1.01 \cdot 10^{-5}$

Aufgabe 27

$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda), \lambda > 0$
$Y \sim \mathrm{Bin}(1, p), 0 \leq p \leq 1$
X und Y s.u.
Verteilung von $X + Y$ (Nutze Lemma 5.11) :

$$k > 0 \;:\quad P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} f_X(i) \underbrace{f_Y(k-i)}_{\neq 0 \text{ für } i=k \text{ und } i=k-1} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1-p) + e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}p$$

$$k = 0 \;:\quad P(X + Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1-p) = e^{-\lambda}(1-p)$$

Verteilung von $X - Y$:

$$\begin{aligned} k > -1 \;:\quad P(X - Y = k) &= P\left(\bigcup_{i=0}^{1} \{X = k+i\} \cap \{Y = i\}\right) \\ &= P(X = k, Y = 0) + P(X = k+1, Y = 1) \\ &= P(X = k)P(Y = 0) + P(X = k+1)P(Y = 1) \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(1-p) + e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}p \end{aligned}$$

$$k = -1 \;:\quad P(X - Y = -1) = P(X = 0)P(Y = 1) = e^{-\lambda}p$$

Aufgabe 28

$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim R(0,1)$
X , Y s.u. , $Z = \frac{X}{Y}$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty t f_X(zt) f_Y(t) dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda z t} dt \\
&= \lambda \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^{-\lambda z t}}_{v'} dt \\
&= \lambda \left[\left[-t \frac{1}{\lambda z} e^{-\lambda z t} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\lambda z} e^{-\lambda z t} dt \right] \\
&= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda z} e^{-\lambda z} + \left[-\frac{1}{(\lambda z)^2} e^{-\lambda z t} \right]_0^1 \right] \\
&= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda z} e^{-\lambda z} + \frac{1}{(\lambda z)^2} - \frac{1}{(\lambda z)^2} e^{-\lambda z} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda z^2} - \frac{1}{z} \cdot (1 + \frac{1}{\lambda z}) \cdot e^{-\lambda z}
\end{aligned}
$$

Musterlösung 8. Übung

9. Juli 2003

Aufgabe 29

a)
i) Die Konstanten a und b können über die folgenden beiden Bedingungen bestimmt werden:

$$f(x) \text{ ist Dichte } \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$E(X) = 0,1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} xa + bx^4\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{5}x^5\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{5}b \overset{!}{=} 0,1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} a + bx^3\,dx = \left[a\,x + \frac{b}{4}x^4\right]_{-1}^{1} \\ &= 2a \overset{!}{=} 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow b = \frac{1}{4}\,,\ a = \frac{1}{2}$

$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^3$ ist Dichte

ii) $F_X(x) = 0\ \forall\ x < -1$ und $F_X(x) = 1\ \forall\ x > 1$. Für $-1 \leq x \leq 1$

gilt:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t^3\right) \mathbb{1}_{[-1,1]}\, dt = \int\limits_{-1}^{x} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t^3\, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{16}t^4\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{16} \end{aligned}$$

iii)

$P(-0,5 \leq X \leq 0,5) = P(X \leq 0,5) - P(X \leq -0,5) = \frac{1}{2}$

b) $E(X) = 1 \quad , \quad f(x) = 0 \quad \forall\, x \geq 1$
X einpunkt-verteilt in 1 ; Widerspruch zu abs.-stetiger ZV
alternativ : $b = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; f(x) < 0 \quad \forall\, x < -\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

Aufgabe 30

$X, Y \sim \mathrm{R}(0,1)$, s.u.
a) $Z = \max\{X, Y\}$

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leq z) &= P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) \\ &= P(X \leq z)^2 = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^2, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1, & 1 < z \end{cases} \end{aligned}$$

b) $f_Z(z) = f_{\max\{X,Y\}}(z) = 2z\, \mathbb{1}_{[0,1]}(z)$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \int_0^1 2z^2\, dz = \frac{2}{3}$$
$$E(X) = E(Y) = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

Also: $E(\{\max\{X, Y\}) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \max\{E(X), E(Y)\}$

Aufgabe 31

a)
Berechne erwarteten Inhalt $E(L_1 \cdot L_2)$ mit $L_1 \sim \mathrm{R}(0, \ell)$ und $L_2 = \ell - L_1$.

$$\begin{aligned} E(L_1 \cdot L_2) = E\left(L_1 \cdot (\ell - L_1)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot (\ell - x) f_{L_1}(x)\, d(x) \\ &= \int_0^{\ell} (\ell x - x^2)\frac{1}{\ell} dx = \frac{1}{\ell}\left(\ell\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\ell} = \frac{\ell^2}{6} \end{aligned}$$

Berechne den erwarteten Umfang:

$$E(2L_1 + 2L_2) = E(2 \cdot (L_1 + \ell - L_1)) = E(2\ell) = 2\ell$$

b)
$A \sim \mathrm{R}(0,1)$ und B ergibt sich aus A, da gilt $A^2+B^2 = 1^2$, also ist $B = \sqrt{1-A^2}$.
Für die Fläche des Dreiecks gilt $F = \frac{A}{2}B = \frac{1}{2}A\sqrt{1-A^2}$. Also

$$\begin{aligned}
E(F) &= E\left(\frac{1}{2}A\sqrt{1-A^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}dx \underset{u=1-x^2}{=} \int_1^0 -\frac{1}{4}\sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Für den Umfang gilt $U = 1 + A + B = 1 + A + \sqrt{1-A^2}$

$$\begin{aligned}
E(U) &= E\left(1 + A + \sqrt{1-A^2}\right) = 1 + \int_0^1 \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\,dx \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{x=sin(u)}{=} 1 + \frac{1}{2} + \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2(u)}\,cos(u)\,du \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(u)\,du
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x)+\cos^2(x))dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Somit ergibt sich $E(U) = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 32

$X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim R(0,1)$, $\lambda > 0$
X , Y s.u. , $Z = \frac{X}{Y}$

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\,dz = \int_0^{\infty} z\left[\frac{1}{\lambda z^2} - \frac{1}{z}\cdot(1+\frac{1}{\lambda z})\cdot e^{-\lambda z}\right]dz \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda z} - (1+\frac{1}{\lambda z})\cdot e^{-\lambda z}dz \\
&= -\int_0^{\infty} e^{-\lambda z}dz + \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda z}(1-e^{-\lambda z})dz \\
&= -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \frac{1}{x}(1-e^{-x})dx \geq -\frac{1}{\lambda} + c + \frac{1}{\lambda}\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1-e^{-1}}{x}}_{\infty}dx \\
&\Rightarrow \quad E(Z) \text{ existiert nicht}
\end{aligned}$$

Musterlösung 9. Übung

17. Juli 2003

Aufgabe 33

a) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Zähldichte $f_X(k) = e^{-}\lambda\frac{\lambda^k}{k!}$ und $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\ f_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\ f_X(k) = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{d}{d\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\frac{d}{d\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}\right) = \lambda e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

b)

$$X \sim \overline{\mathrm{Bin}} = \underbrace{\mathrm{Geo}(p) * \ldots * \mathrm{Geo}(p)}_{n}$$

$$Y_i \sim \mathrm{Geo}(p) \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{s.u.}, \quad X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(Y_i\right) = n\,\mathrm{E}\left(Y_1\right) = \frac{n(1-p)}{p} =: n\frac{q}{p}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \underset{\text{s.u.}}{=} \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left(Y_i\right) = n\,\mathrm{Var}\left(Y_1\right)$$

Bezeichnung: $Y = Y_1$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$$

$$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}(Y(Y-1)+Y) = \mathrm{E}(Y(Y-1)) + \mathrm{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)q^k p + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{q}{p} = pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2} q^k + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \sum_{k=2}^{\infty} q^k + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \frac{q^2}{1-q} + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d}{dq} \frac{2q-q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{p} = 2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(Y) = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = n\frac{1-p}{p^2}$$

c) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
Berechne die Laplace-Transformierte:

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda+s)x}\, dx$$

Substituiere: $(\lambda+s)x = y$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{\lambda+s}\, dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha \Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy}_{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha$$

$$\mathrm{E}(X) = -L'(0) = -\left(\alpha\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1}\left(-\frac{\lambda}{(\lambda+s)^2}\right)\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = L''(0) = \left(-\alpha\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^{\alpha+1}}\right)'\Bigg|_{s=0}$$

$$= \left(-\alpha\lambda^\alpha(-\alpha-1)\frac{1}{(\lambda+s)^{\alpha+2}}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-t}^{t} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-t}^{t} \\
&\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x f_x(x)\,dx = 0 \\
\text{Aber} \quad &: \quad \mathrm{E}(|X|) = 2\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \infty \\
&\Rightarrow \text{Der Erwartungswert existiert nicht.} \\
&\Rightarrow \text{Die Varianz existiert ebenfalls nicht.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 34

Zeige $\mathrm{E}(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X(X^2+Z)) = E(X^3 + X\cdot Z) = E(X^3) + E(Z\cdot X) \\
&\qquad \underset{X \text{ und } Z \text{ s.u.}}{=} E(X^3) + E(X)\cdot E(Z) \\
&E(X^3) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{8}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0 \\
&E(X) = 0
\end{aligned}$$

Also $E(X\cdot Y) = 0 = E(X)\cdot E(Y)$. Somit sind X und Y unkorreliert.

Aber

$$P\left(X \notin \left[-\sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}\right], Y \le 0.1\right) = 0 \neq \underbrace{P(X \notin \left[-\sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}\right])}_{>0} \cdot \underbrace{P(Y \le 0.1)}_{>0},$$

da $P(X^2 + Z \le 0.1) \ge P(X^2 \le 0.05, Z \le 0.05) = P(X^2 \le 0.05)\cdot P(Z \le 0.05) > 0$

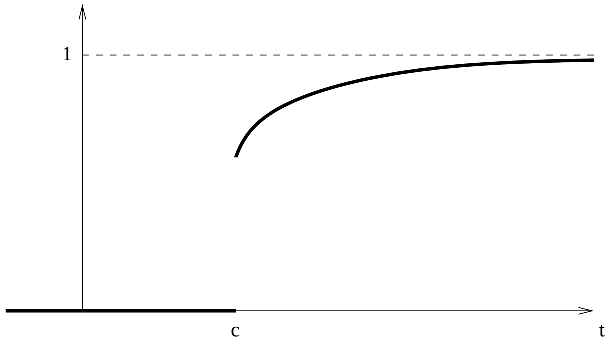
Aufgabe 35

Die Zufallsvariable X sei die Gesprächsdauer in Minuten, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. c ist der Minutenpreis.

$$K = T(X) = \begin{cases} c & \text{für } X \le 1 \\ c\cdot X & \text{für } X > 1 \end{cases} \qquad X \ge 0$$

Also ist $P(K < c) = 0$. Für $t \ge c$ gilt

$$F_K(t) = P(K \le t) = P\left(\frac{K}{c} \le \frac{t}{c}\right) = P\left(X \le \frac{t}{c}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}t}$$



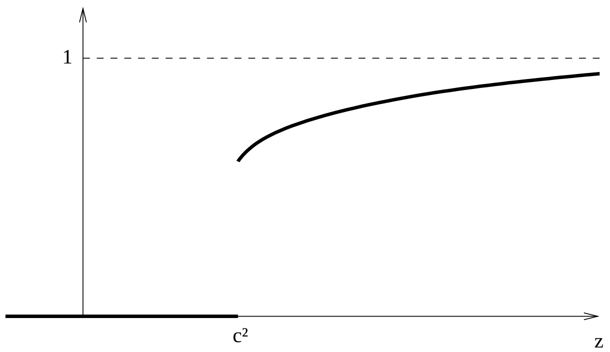
Die Verteilung ist weder absolut-stetig, noch diskret.

Berechne den Erwartungswert mit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(K) &= \int_{-\infty}^{0} F_K(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} (1 - F_K(t))\,dt = \int_{0}^{\infty} (1 - F_K(t))\,dt \\
&= \int_0^c 1\,dt + \int_c^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}t}\,dt = c + \left[-\frac{c}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{c}t}\right]_c^\infty \\
&= c + \frac{c}{\lambda}e^{-\lambda} = c\left(1 + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Berechne nun $\mathrm{Var}(K) = \mathrm{E}(K^2) - (\mathrm{E}(K))^2$.
Für $z \geq 0$ ist $P(K^2 \leq z) = P(K \leq \sqrt{z})$. Es folgt

$$F_{K^2}(z) = P(K^2 \leq z) = P(K \leq \sqrt{z}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sqrt{z} < c \Rightarrow z < c^2 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}\sqrt{z}} & \text{für } \sqrt{z} \geq c \Rightarrow z \geq c^2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(K^2) &= c^2 + \int_{c^2}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{c}\sqrt{z}}dz \overset{x=\sqrt{z}\Rightarrow dz=2xdx}{=} c^2 + \int_c^\infty 2\underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-\frac{\lambda}{c}x}}_{v'}dx \\
&= c^2 + 2\left(\left[-xe^{-\frac{\lambda}{c}x}\frac{c}{\lambda}\right]_c^\infty + \int_c^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}x}\frac{c}{\lambda}dx\right) \\
&= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2\left[-\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\frac{\lambda}{c}x}\right]_c^\infty = c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(K) &= \mathrm{E}((K-\mathrm{E}(K))^2) = \mathrm{E}(K^2) - \mathrm{E}(K)^2 \\
&= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\lambda} - \left(c + \frac{c}{\lambda}e^{-\lambda}\right)^2 \\
&= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\lambda} - c^2 - 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda} \\
&= \frac{c^2}{\lambda^2}(2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 36

Zeige zunächst, dass aus $X_{n+1} = 2X_n - 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$ folgt $X_{n+k} = 2^k X_n + 1 - 2^k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$:
Beweis durch vollständige Induktion:

$$
\begin{aligned}
&k = 1: \ X_{n+1} = 2X_n - 1 \\
&k \to k+1: \ X_{n+k+1} = 2X_{n+k} - 1 = 2^{k+1}X_n + 1 - 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{n+k}, X_n) &= \mathrm{E}\left((X_{n+k} - \mathrm{E}(X_{n+k}))(X_n - \mathrm{E}(X_n))\right) \\
&= \mathrm{E}\left((2^k X_n + 1 - 2^k - \mathrm{E}(2^k X_n + 1 - 2^k))(X_n - \mathrm{E}(X_n))\right) \\
&= \mathrm{E}\left((2^k X_n - 2^k\,\mathrm{E}(X_n))(X_n - \mathrm{E}(X_n))\right) \\
&= 2^k\,\mathrm{E}\left((X_n - \mathrm{E}(X_n))^2\right) \\
&= 2^k\,\mathrm{E}\left((2^n X_0 + 1 - 2^n - \mathrm{E}(2^n X_0 + 1 - 2^n))^2\right) \\
&= 2^{2n+k}\,\mathrm{E}\left((X_0 - \mathrm{E}(X_0))^2\right) = 2^{2n+k}\,\mathrm{Var}(X_0) = \frac{2^{2n+k}}{12}
\end{aligned}
$$

Musterlösung 10. Übung

24. Juli 2003

Aufgabe 37

G_n sei der Gewinn, wenn die Münze anfänglich n-mal geworfen wurde:

$$G_n = \sum_{i=1}^{K} iX_i - i_n,$$

wobei die $X_i \sim \mathrm{Bin}(1, p)$. i_n sei der Einsatz, $K \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(G_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(G_n | K = k) \cdot P(K = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k} iX_i - i_n\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} i\,\mathrm{E}(X_i) - i_n\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} ip - i_n\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k(k+1)}{2} p - i_n\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{2} p + \frac{k}{2} p - i_n\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sei } Z \sim \mathrm{Bin}(n, p) \Rightarrow \mathrm{E}(Z) &= np \\
\mathrm{E}(Z^2) &= \mathrm{Var}(Z) + \mathrm{E}(Z)^2 \\
&= np(1-p) + n^2p^2
\end{aligned}$$

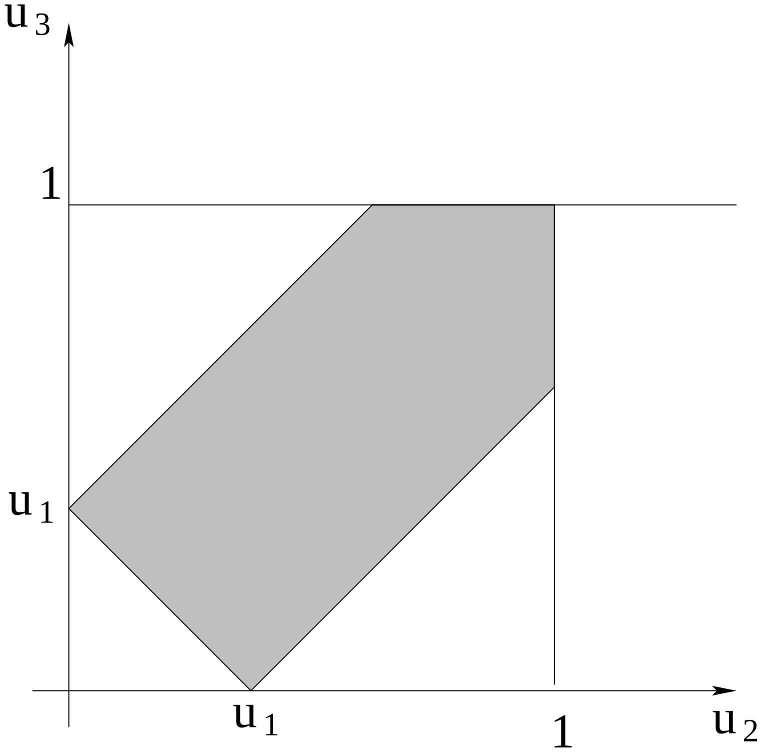
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{E}[G_n] &= \frac{1}{2}p\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right) - i_n \\
&= \frac{1}{2}p(\mathrm{E}(Z^2)+\mathrm{E}(Z)) - i_n \\
&= \frac{1}{2}p\left(np(1-p)+n^2p^2+np\right) - i_n \\
&= \frac{1}{2}n^2p^3 - \frac{1}{2}np^3 + np^2 - i_n \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \text{Einsatz:}\quad i_n &= \frac{1}{2}n^2p^3 - \frac{1}{2}np^3 + np^2 \qquad \text{für faires Spiel.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 38

Δ sei das Ereignis, dass ein Dreick auftreten kann. Dieses ist nur möglich, falls $U_1 < U_2 + U_3$ und $U_2 < U_1 + U_3$ und $U_3 < U_1 + U_2$. Bei gegebenem $U_1 = u_1$ gibt es also ein Dreieck, falls

$$
\begin{aligned}
&P(U_1 < U_2 + U_3, U_2 < U_1 + U_3, U_3 < U_1 + U_2 \mid U_1 = u_1) \\
&\quad = P(U_2 + U_3 > u_1, U_2 - U_3 < u_1, U_3 - U_2 < u_1 \mid U_1 = u_1)
\end{aligned}
$$

Die gemeinsame Verteilung von (U_2, U_3) unter $U_1 = u_1 \in (0,1)$, mit Dichte $f_{(U_2,U_3)|U_1}(u_2, u_3|u_1) = \mathbb{1}_{(0,1)^2}(u_2, u_3)$, ist eine Gleichverteilung auf $(0,1)^2$.



Somit entspricht die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Größe der markierten Fläche:

$$
\begin{aligned}
&P(U_2 + U_3 > u_1, U_2 - U_3 < u_1, U_3 - U_2 < u_1 \mid U_1 = u_1) \\
&\quad = 1 - \frac{1}{2}{u_1}^2 - 2\frac{1}{2}(1-u_1)^2 = 2u_1 - \frac{3}{2}{u_1}^2
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
P(\Delta) &= \int_0^1 P(U_2 + U_3 > u_1, U_2 - U_3 < u_1, U_3 - U_2 < u_1 \mid U_1 = u_1) f_{U_1}(u_1)\, du_1 \\
&= \int_0^1 \left(2u_1 - \frac{3}{2}{u_1}^2\right) du_1 = \left[{u_1}^2 - \frac{1}{2}{u_1}^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 39

a)

X_1 ist unter $X_2 = y$ rechteckverteilt auf $(-y, y)$:

$$
f_{X_1|X_2}(x \mid y) = \frac{1}{2y}\mathbb{I}_{(-y,y)}(x)
$$

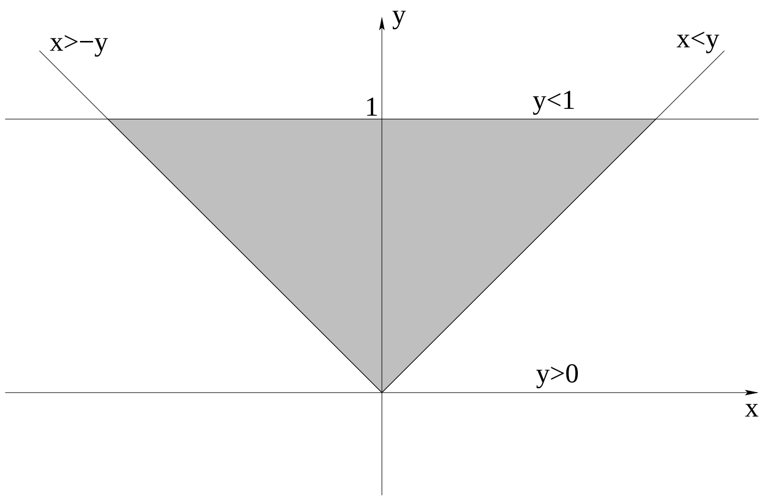
Ferner gilt $f_{X_2}(y) = 2y\mathbb{I}_{(0,1)}(y)$. Wegen

$$
f_{X_1|X_2}(x \mid y) = \frac{f_{(X_1,X_2)}(x,y)}{f_{X_2}(y)}
$$

folgt

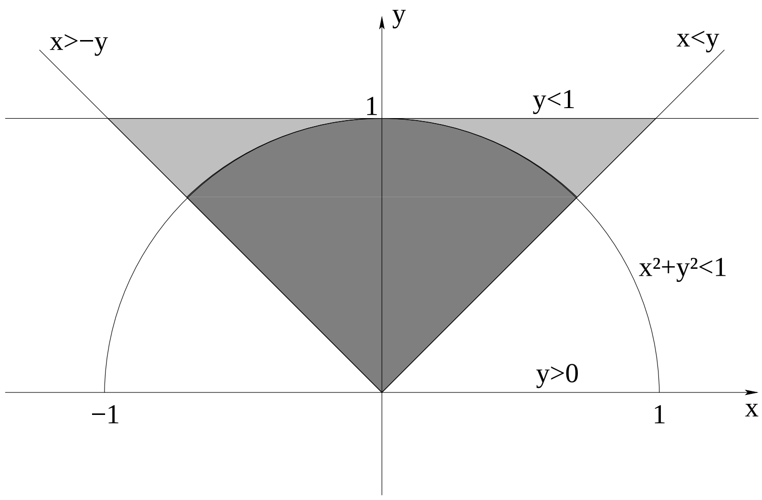
$$
\begin{aligned}
f_{(X_1,X_2)}(x,y) &= f_{X_1|X_2}(x \mid y) \cdot f_{X_2}(y) \\
&= \frac{1}{2y}\mathbb{I}_{(-y,y)}(x) \cdot 2y\mathbb{I}_{(0,1)}(y) = \mathbb{I}_{(-y,y)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(y)
\end{aligned}
$$

Die gemeinsame Dichte von (X_1, X_2) ist eine Gleichverteilung auf der Fläche, die durch $0 < y < 1$ und $-y < x < y$ beschrieben wird.



b)
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit das Integral über die gemeinsame Dichte im Bereich ${X_1}^2 + {X_2}^2 \leq 1$.

$$P({X_1}^2 + {X_2}^2 \leq 1) = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \mathbb{I}_{(-y,y)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(y)dxdy$$



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Verhältnis zwischen dem Teil des Trägers, der die Bedingung erfüllt (dunkelgrau), und dem gesamten Träger (hellgrau). Die dunkelgraue Fläche ist ein Viertel des Einheitskreises, also $\pi/4$ groß. Die Fläche des hellgrauen Dreiecks ist Eins. Es folgt:

$$P(X_1^2 + X_2^2 \leq 1) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

Aufgabe 40

$$f_{(x,y)}(x,y) = 6xy(2-x-y)\mathbb{I}_{(0,1)^2}(x,y)$$

Gesucht:

$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{(x,y)}(x,y)}{f_y(y)}$$

mit

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 6xy(2-x-y)\mathbb{I}_{(0,1)^2}(x,y)dx = \int_0^1 (12xy - 6x^2y - 6xy^2)dx\mathbb{1}_{(0,1)}(y) =$$
$$= y(4-3y)\mathbb{I}_{(0,1)}(y)$$

Für $0 < y < 1$ ist somit

$$
\begin{aligned}
f_{(x|y)}(x|y) &= \frac{6xy(2-x-y)\mathbb{1}_{(0,1)^2}(x,y)}{y(4-3y)\mathbb{1}_{(0,1)}(y)} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \\
\mathrm{E}(X|Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)dx = \int_0^1 \frac{6x^2(2-x-y)}{4-3y}dx \\
&= \int_0^1 \frac{12x^2-6x^3-6x^2y}{4-3y}dx = \frac{2.5-2y}{4-3y} = \frac{5-4y}{8-6y}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 41

Es gilt:
$N \sim \mathrm{Geo}\,(p) \Rightarrow P\,(N=k) = p\,(1-p)^{k-1} \quad \forall k \ \in \mathbb{N}$,
$X_i \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda) \Rightarrow P\,(X_i \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}$
und
$Z = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$

1. Fall: $x \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
P\,(Z \leq x\,|N=k\,) &= P(\max\{X_1,\ldots,X_N\}\,|N=k) \\
&= P\,(X_1 \leq x, \ldots, X_k \leq x) \\
&\overset{X_i \ s.u.}{=} \prod_{i=1}^{k} P\,(X_i \leq x) \\
&= \left(1-e^{-\lambda x}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P\,(Z \leq x) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\,(Z \leq x\,|N=k\,)\,P\,(N=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1-e^{-\lambda x}\right)^k p\,(1-p)^{k-1} \\
&= p\sum_{k=0}^{\infty} \left(1-e^{-\lambda x}\right)^{k+1}(1-p)^k \\
&= p\left(1-e^{-\lambda x}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(1-e^{-\lambda x}\right)(1-p)\right)^k \\
&= \frac{p\left(1-e^{-\lambda x}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)(1-p)} \\
&= \frac{p-pe^{-\lambda x}}{(1-p)\,e^{-\lambda x}+p}
\end{aligned}
$$

2. Fall: $x < 0$:
$P\,(Z < x\,|N=k\,) = 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$
und somit $P\,(Z < x) = 0$.

Musterlösung 11. Übung

31. Juli 2003

Aufgabe 42

Es gilt $Z = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$.
Aus der linearität des Erwartungswertes folgt $\mathrm{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}(X_i) = (n-1)a$.
Da die X_i stochastisch unabhängig sind gilt $\mathrm{Var}(Z) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Var}(X_i) = (n-1)b$.

$$
\begin{aligned}
P(Z > 2E(Z)) \quad &= \quad P(Z - E(Z) > E(Z)) \\
&\underset{Z=\sum_{i=1}^{n-1} X_i \geq 0}{=} \quad P(Z - E(Z) > E(Z)) + \underbrace{P(E(Z) - Z > E(Z))}_{=P(Z<0)=0} \\
&= \quad P(|Z - E(Z)| > E(Z)) = P(|Z - E(Z)| > (n-1)a) \\
&\underset{\text{Tscheb.-Ungl.}}{\leq} \quad \frac{\mathrm{Var}(Z)}{(n-1)^2 a^2} \\
&= \quad \frac{b}{a^2(n-1)}
\end{aligned}
$$

Abschätzung ist “sinnvoll” für:

$$1 \geq \frac{b}{a^2(n-1)} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2(n-1) \geq b$$

Aus der Markoff-Ungleichung ergibt sich die Schranke

$$P(Z > 2\,\mathrm{E}(Z)) = P(|Z| > 2\,\mathrm{E}(Z)) \leq \frac{\mathrm{E}(|Z|)}{2E(Z)} = \frac{\mathrm{E}(Z)}{2E(Z)} = \frac{1}{2}$$

Somit ist die erste Abschätzung schärfer für

$$\frac{1}{2} \geq \frac{b}{a^2(n-1)} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2(n-1) \geq 2b$$

Aufgabe 43

In der Aufgabenstellung steht fehlerhafter Weise, dass das Konvergenzverhalten von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}[X_i])$ untersucht werden soll. Da X_1 jedoch nicht definiert wurde wird im Folgenden

$$\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathrm{E}[X_i]), \qquad n \geq 2$$

betrachtet. Das Konvergenzverhalten bleibt auch gleich, wenn $\frac{1}{n-1}$ statt $\frac{1}{n}$ als Faktor vor der Summe verwendet wird.

$$\mathrm{E}(X_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X_n)^2 = 0$$
$$\mathrm{Var}(X_n^2) = \mathrm{E}(X_n^2) - (\mathrm{E}(X_n))2 = n^2 \frac{1}{2n\,\log(n)} + (-n)^2 \frac{1}{2n\,\log(n)} - 0 = \frac{n}{\log(n)}$$

$$\text{Sei } \; S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(X_i - \mathrm{E}(X_i)) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|S_n| > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sum_{i=2}^{n} X_i\right| > n\varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Tschebyscheff}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n\varepsilon)^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i\right) \\
&\underset{\text{s.u.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=2}^{n}\frac{i}{\log(i)} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon^2}(n-1)\frac{n}{\log(n)} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\varepsilon^2\log(n)} = 0
\end{aligned}$$

Also gilt: $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ P-stoch.

Aber:

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(|X_i| \geq i) = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\,\log(i)} = \infty \qquad \left(\text{Integralkriterium: } \int \frac{1}{x\,\ln x} = \ln\,\ln x\right)$$

Mit Borel-Cantelli folgt somit, dass mit Wahrscheinlichkeit eins für undendliche viele $i \geq 2$ gilt: $|X_i| \geq i$.
Mit

$$|X_i| = |S_i - S_{i-1}| \geq i \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{S_i}{i} - \frac{S_{i-1}}{i}\right| \geq i$$

folgt somit, dass $\frac{S_i}{i}$ nicht gegen ein S konvergiert, d.h. die Folge konvergiert nicht P-fast sicher.

Aufgabe 44

a)
$X_i \sim \mathrm{Bin}(1,p) \quad , X_i = 1 \;\hat{=}\;$ i-ter Rechner ist defekt
$\mathrm{E}[X_i] = p \;\;,\;\; \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \;\hat{=}\; \text{ Anzahl der defekten Rechner}$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \;\le\; d\right) \;&=\; P\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \;-\; np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\overset{as}{\approx} N(0,1)} \;\le\; \frac{d \;-\; np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\approx\; \Phi\left(\frac{d \;-\; np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}
$$

n = 10000 , p = 0,01

$$
\begin{aligned}
P(X \le 98) \;&=\; \Phi\left(\frac{98 - 0,01 \cdot 10000}{\sqrt{10000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}}\right) \;\approx\; \Phi(-0,20) \;=\; 1 - \Phi(0,20) \\
&\approx\; 1 \;-\; 0,579 \;=\; 0,421 \\
P(X \ge 110) \;&=\; 1 \;-\; P(X \le 109) \;\approx\; 1 \;-\; \Phi(0,90) \;\approx\; 1 \;-\; 0,816 \;=\; 0,184
\end{aligned}
$$

b)
Es soll gelten :

$0,5 \;\le\; P(X \le d) \;\approx\; \Phi\left(\frac{d \;-\; np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
Da $\Phi(x) \ge 0.5 \;\Leftrightarrow\; x \ge 0$ folgt

$$
0 \le \frac{d \;-\; np}{\sqrt{np(1-p)}} \;\Leftrightarrow\; np \le d \;\Leftrightarrow\; p \le \frac{d}{n}
$$

Für $n = 1000$ und $d = 300$ ergibt sich somit $p \;\le\; 0,03$

Aufgabe 45

$X_i \sim \mathrm{Exp}(\mu)$, $\mu > 0$
$D_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 2\gamma$
Die X_i und D_i sind alle gemeinsam stochastisch unabhängig.
$I_n = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^{-\gamma}$
Nach dem ZGWS gilt

$$
\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i D_i^{-\gamma} - \mathrm{E}(X_i D_i^{-\gamma})\right)}{\sqrt{n \operatorname{Var}(X_i D_i^{-\gamma})}} = \frac{I_n - \mathrm{E}(I_n)}{\sqrt{n \operatorname{Var}(X_i D_i^{-\gamma})}} \overset{\text{a.s.}}{\sim} N(0,1)
$$

Somit ist also $b_n = \mathrm{E}(I_n)$ und $a_n = \sqrt{n \operatorname{Var}(X_i D_i^{-\gamma})}$, mit

$$
\mathrm{E}(I_n) = n\,\mathrm{E}(X_i)\,\mathrm{E}(D_i^{-\gamma}) = n\frac{1}{\mu}\lambda^{\gamma}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \text{da}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(D_i^{-\gamma}) &= \int_0^\infty x^{-\gamma} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-\gamma-1} e^{-\lambda x} dx \\
&\underset{\text{subst.: } x'=\lambda x}{=} \frac{\lambda^\alpha \lambda^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty x'^{\alpha-\gamma-1} e^{-x'} dx'}_{\Gamma(\alpha-\gamma)} \\
&= \lambda^\gamma \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_i D_i^{-\gamma}) &= \mathrm{E}(X_i^2)\mathrm{E}(D_i^{-2\gamma}) - (\mathrm{E}(X_i))^2 (\mathrm{E}(D_i^{-\gamma}))^2 \\
&= \frac{2}{\mu^2} \lambda^{2\gamma} \frac{\Gamma(\alpha-2\gamma)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{\mu^2} \lambda^{2\gamma} \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)^2}{\Gamma(\alpha)^2} \\
&= \frac{\lambda^{2\gamma}}{\mu^2 \Gamma(\alpha)} \left[2\Gamma(\alpha-2\gamma) - \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)^2}{\Gamma(\alpha)} \right]
\end{aligned}
$$

Musterlösung 12. Übung

1. August 2003

Aufgabe 46

$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathrm{R}(0, \theta)$
Likelyhood-Funktion:

$$\Rightarrow L(\theta | x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$$

Suche $\arg\max_\theta L(\theta | x_1, \ldots, x_n)$:
1. Fall: Sei $\theta < \max\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$.

$$\begin{array}{lr} \Rightarrow & \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } x_i > \theta \\ \Rightarrow & \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) = 0 \\ \Rightarrow & L(\theta | x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}$$

2. Fall: Sei $\theta \geq \max\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) &= 1 \\ \Rightarrow L(\theta | x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{\theta^n}. \end{aligned}$$

$L(\theta | X_1, \ldots, X_n)$ ist monoton fallend in θ, für $\theta \geq \max\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ und hat sonst den Wert 0.
Somit ist $\hat{\theta} = \max\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ ein ML-Schätzer für θ.

Bestimmung von α:
Berechne dazu zunächst die Verteilung von $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$:

$$\begin{aligned} P(\max\{X_i | 1 \leq i \leq n\} < x) &= P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{\max\{X_i | 1 \leq i \leq n\}}(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \forall\, 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \forall\, x > 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\widehat{\theta}\right] &= E\left[\max\left\{X_i \,|1 \leq i \leq n\right\}\right] \\
&= -\int_{-\infty}^{0} F_{\max\{X_i|1\leq i\leq n\}}dx + \int_0^{\infty}\left(1 - F_{\max\{X_i|1\leq i\leq n\}}\right)dx \\
&= \int_0^{\theta}\left(1-\left(\frac{x}{\theta}\right)^n\right)dx \\
&= \theta - \left(\frac{1}{n+1}\right)\left.\frac{x^{n+1}}{\theta^n}\right|_0^{\theta} \\
&= \theta - \frac{1}{n+1}\theta \\
&= \frac{n}{n+1}\theta
\end{aligned}
$$

Folglich ist

$$\alpha = \frac{n+1}{n}.$$

Aufgabe 47

$X_1, \ldots, X_n$ stid mit Dichte $f(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n|\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} 2\lambda x_i e^{-\lambda x_i^2} \\
&= 2^n\lambda^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2}
\end{aligned}
$$

Likelihood-Funktion: $L(\lambda|x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots x_n\,|\lambda)$

Falls $x_i \neq 0 \;\forall\; i = 1,\ldots,n$ gilt:

$$\arg\max_{\lambda} L(\lambda|x_1,\ldots,x_n) = \arg\max_{\lambda}\log L(\lambda|x_1,\ldots,x_n)$$

$$\log L(\lambda|x_1,\ldots,x_n) = n\log(2) + n\log(\lambda) + \sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bestimme das Maximum durch ableiten nach λ :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\lambda|x_1,\ldots,x_n) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L(\lambda|x_1,\ldots,x_n) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \;\Rightarrow \text{Fkt. ist konvex} \;\Rightarrow \text{Maximum bei } \hat{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ ist ML-Schätzer für } \lambda$$

Aufgabe 48

$X \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$

Die a-priori-Verteilung für θ sei $\mathrm{N}(\mu, \tau^2)$.

$$\Rightarrow \quad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right), \quad f_{X|\Theta}(x|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Theta|X}(\theta|x) = \frac{f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta)}{\int f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta} \qquad (*)$$

es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\tau^2(x^2 - 2\theta x + \theta^2) + \sigma^2(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2)}{2\tau^2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{(\tau^2+\sigma^2)\theta^2 - \theta(2\tau^2 x + 2\sigma^2\mu) + x^2\tau^2 + \mu^2\sigma^2}{2\tau^2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\left(\theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2 + g(x,\tau,\mu,\alpha)}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\left(\theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right) \exp\left(\frac{g(x,\tau,\mu,\alpha)}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

Der letzte Faktor ist nicht von θ abhängig und kann somit in $(*)$ herausgekürtzt werden.

$\displaystyle\int f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta$ normiert $f_{\Theta|X}(\theta|x)$, somit gilt

$$f_{\Theta|X}(\theta|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{\left(\theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)$$

Die Verteilung von Θ unter $X = x$ ist somit eine

$\mathrm{N}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu, \sqrt{\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)$-Verteilung

Somit gilt, Bayes-Schätzer $\mathrm{E}(\Theta) = \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu$.

Aufgabe 49

a) $X_1, \ldots, X_n$ stid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= 1 - P(Y > x) = 1 - P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) \underbrace{=}_{s.u.} 1 - P(X_1 > x) \cdot \ldots \cdot P(X_n > x) \\
&= 1 - \big(1 - P(X_1 \leq x)\big) \cdot \ldots \cdot \big(1 - P(X_n \leq x)\big) = 1 - (1 - P(X_1 \leq x))^n \\
&= 1 - e^{-\lambda n x}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow Y \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\big(\mathrm{E}(X) \in [b \cdot Y, \infty)\big) = P\big(E[X_i] \geq b \cdot Y\big) \\
&= P\left(\frac{1}{\lambda} \geq bY\right) = P\left(Y \leq \frac{1}{\lambda b}\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{\lambda b}} n\lambda e^{-\lambda n x} dx = \Big[-e^{-\lambda n x}\Big]_0^{\frac{1}{\lambda b}} \\
&= 1 - e^{-\frac{n}{b}}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow \ln(\alpha) = -\frac{n}{b} \Longleftrightarrow b = -\frac{n}{\ln(\alpha)}$.

b) $n = 10, \quad t = 1.183, \quad \alpha = 0.1$

$\Longrightarrow$ untere Grenze: $-\frac{n}{ln(\alpha)} 1.183 \approx 4.34$.

Aufgabe 50

a) Nutze für Gegenbeispiele eine Laplace-Verteilung über
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \;\Rightarrow\; |\Omega| = 10$ und wähle
$A' = \{1,2,3,4,5,6,7\} \subseteq \Omega \;\Rightarrow\; P(A') = 0.7$ sowie
$B' = \{1,2,3,10\} \;\Rightarrow\; P(B') = 0.4$.

i.

1. Falsch: $B' \not\subset A'$
2. Falsch: $A' \cup B' = \{1,2,3,4,5,6,7,10\} \neq \Omega$
3. Falsch: $A' \cap B' = \{1,2,3\} \neq \emptyset$
4. Richtig:

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1.1 - P(A \cap B)$$

Somit ist $P(A \cap B) \geq 0.1 \;\Rightarrow\; A \cap B \neq \emptyset$.

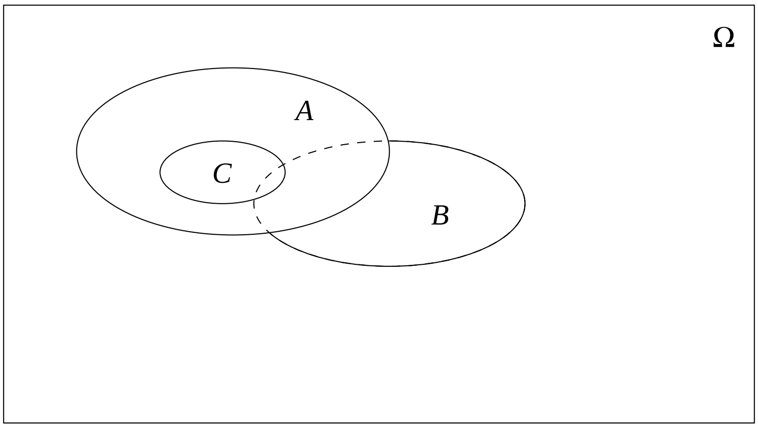
ii.

1. Richtig:

$$P(A^C|A) = \frac{P(A \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

2. Falsch, da 1) richtig.
3. Falsch: $P(A^C|A) = 0 \neq 1 = 1 - P(A|A^C)$
4. Richtig: $P(A^C|A) = 0 = 1 - 1 = 1 - \frac{P(A)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = 1 - P(A|A)$

b) Skitze für $C \subset A$:



Nutze für Gegenbeispiele eine Laplace-Verteilung über
$\Omega = \{1, 2, 3\} \;\Rightarrow\; |\Omega| = 3$ und wähle
$A' = \{1, 2\} \subseteq \Omega \;\Rightarrow\; P(A') > 0$ sowie
$B' = \{3\} \;\Rightarrow\; P(B') > 0$.
$C' = \{1\} \;\Rightarrow\; C \subset A$.

i.

1. Falsch: $P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = 0 \not> P(B')$
2. Falsch: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq P(A \cap B))$
3. Richtig: siehe 2)
4. Richtig:

$$\begin{aligned} P(A|B)P(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} P(B) = P(A \cap B) = \\ &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} P(A) = P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

ii.

1. Falsch: $P(A') = \frac{2}{3} \not< \frac{1}{3} P(C')$
2. Falsch: $P(A \cap C) \underset{C \subset A}{=} P(C) \neq P(A)$
3. Richtig: siehe 2)
4. Falsch: $A^C \subset C^C$

Prof. Dr. R. Mathar RWTH Aachen, SS 2000
Jaakob Kind Ausgabe: 21.06.2000

Musterlösung zur 1. Zusatzübung zur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

a) Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, und P definiert durch $P(\{\omega\} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ für alle $\omega \in \Omega$.
Es gilt

$$A_{ij} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j\} = \bigcup_{k=1}^{6} \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j = k\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P(A_{ij}) &= \sum_{k=1}^{6} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = k, \omega_j = k\}) = \sum_{k=1}^{6} 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) Für $i \neq j$ und $k \neq l$ mit $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ gilt $A_{ij} \cap A_{kl} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j, \omega_k = \omega_l\}$. Wegen $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$ folgt $A_{ij} \cap A_{kl} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}$, also

$$\begin{aligned} P(A_{ij} \cap A_{kl}) &= \sum_{m=1}^{6} P(\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = m\} \\ &= \sum_{m=1}^{6} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36} = P(A_{ij})P(A_{kl}) \end{aligned}$$

Weiter gilt $A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\} = A_{12} \cap A_{23}$, also $P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = \frac{1}{36} \neq \left(\frac{1}{6}\right)^3 = P(A_{12})P(A_{13})P(A_{23})$.

Aufgabe 2

Es seien $K_1^o, K_1^u, K_2^o, K_2^u$ die Ereignisse, daß im ersten bzw. zweiten Wurf ein „Kopf" oben bzw. unten liegt. M_i $(i = 1, \dots, 5)$ bezeichne das Ereignis, daß Münze i gewählt wurde.

a) $P(K_1^o) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} P(K_1^o \mid M_i)P(M_i) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$

b) $P(K_1^u \mid K_1^o) = \dfrac{P(K_1^u \cap K_1^o)}{P(K_1^o)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(K_1^u \cap K_1^o \mid M_i)P(M_i)}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{3}.$

c) $P(K_2^u \mid K_1^o) = \dfrac{P(K_2^u \cap K_1^o)}{P(K_1^o)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(K_2^u \cap K_1^o \mid M_i)P(M_i)}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{6}.$

d) $P(K_2^u \mid K_1^o \cap K_2^o) = \dfrac{P(K_2^u \cap K_1^o \cap K_2^o)}{P(K_1^o \cap K_2^o)} = \dfrac{P(K_2^u \cap K_2^o)}{\sum_{i=1}^{5} P(K_1^o \cap K_2^o \mid M_i)P(M_i)}$
$= \dfrac{P(M_1 \cup M_2)}{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{10}{5} = \dfrac{4}{5}.$

Aufgabe 3

Die Anzahl der Fluggäste, die am Check-in der Fluggesellschaft A erscheinen, ist $\mathrm{Bin}(10, 9/10)$-verteilt, die Anzahl der Fluggäste, die am Check-in der Gesellschaft B erscheinen, ist $\mathrm{Bin}(20, 9/10)$-verteilt. Es sei X die Anzahl der Fluggäste, die bei Gesellschaft A erscheinen, und Y die Anzahl der Fluggäste, die bei Gesellschaft B erscheinen. Die Überbuchungswahrscheinlichkeit von Gesellschaft A ist folglich $P(X > 9)$, und die Überbuchungswahrscheinlichkleit von Gesellschaft B ist $P(Y > 18)$.
Nun gilt:

$$P(X > 9) = P(X = 10) = \binom{10}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \sim 0,349$$

und

$$\begin{aligned} P(Y > 18) = P(Y = 19) + P(Y = 20) &= \binom{20}{19}\left(\frac{9}{10}\right)^{19}\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \\ &= 20\left(\frac{9}{10}\right)^{19}\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \sim 0,392. \end{aligned}$$

Also ist Gesellschaft B mit höherer Wahrscheinlichkeit überbucht.

Aufgabe 4

Es sei X die Anzahl der Münzen, die beim ersten Wurf „Kopf“ zeigen, und Y die Anzahl der Münzen, die beim zweiten Wurf „Kopf“ zeigen. Dann gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l).$$

X ist $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilt, und Y ist unter der Bedingung $X = l$ $\mathrm{Bin}(l, p)$-verteilt. Folglich gilt

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^{n} \frac{l!n!(n-k)!}{k!(l-k)!l!(n-l)!(n-k)!} p^{k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \sum_{l=k}^{n} \binom{n-k}{n-l} p^{k+l}(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{n-l-k} p^{2k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^{2k+l}(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{n-k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^l 1^{n-k-l} = \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^{2k}(1-p^2)^{n-k}. \end{aligned}$$

Folglich ist Y $\mathrm{Bin}(n, p^2)$-verteilt. Intuitiv kann man sich das so vorstellen: Man wirft alle n Münzen zweimal und zählt nur die, die zweimal „Kopf“ zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für zweimal „Kopf“ ist aber gerade p^2.

Aufgabe 5

$X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \operatorname{Exp}(\mu)$, X, Y stochastisch unabhängig.

•Fall 1: $\lambda = \mu \overset{\text{A 31 a)}}{\Rightarrow} X + Y \sim \Gamma(2, \lambda) = \operatorname{Erl}(2, \lambda)$. Also wird durch

$$f_{X+Y}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)$$

eine Dichte von $X + Y$ definiert.

•Fall 2: $\lambda \neq \mu$: Für $z \leq 0$ gilt $P(X + Y \leq z) = 0$, also $f_{X+Y}(z) = 0$. Sei nun $z > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t) dt = \int_0^z \lambda e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu(z-t)} dt \\ &= \lambda \mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{(\mu-\lambda)t} dt = \lambda \mu e^{-\mu z} \left. \frac{1}{\mu - \lambda} e^{(\mu-\lambda)t} \right|_0^z \\ &= \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} e^{-\mu z} \left(e^{(\mu-\lambda)z} - 1 \right) = \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} \right). \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich also

$$f_{X+Y}(z) = \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} \right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z).$$

Prof. Dr. R. Mathar
Michael Schmeink, Ute Kohlhaas

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 03.07.2000

Musterlösung zur 2. Zusatzübung zur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

Wir integrieren zunächst $f_{\mu,\sigma}$ über $\mathbb{R}$ und überprüfen, ob diese Integration 1 ergibt.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\ dx &= \frac{\sigma}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}\ dx = \frac{\sigma}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2[1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]}\ dx \\
&= \frac{1}{\mu\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\ dx = \frac{1}{\mu\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\ \sigma\ dy \\
& \quad \text{mit der Substitution } y := \frac{x-\mu}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\ dy = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(y)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\ \pi = 1.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\ dx = 1$. Außerdem ist $f_{\mu,\sigma}(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Durch $f_{\mu,\sigma}$, $\sigma,\mu \in \mathbb{R}$ ist also stets eine Dichte gegeben.

Aufgabe 2

Die auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, die das Intervall $[0,1]$ in zwei Teile zerlegt, werde mit U bezeichnet.

a) Die Länge des linken Teilstücks ist dann gerade gegeben durch den Wert der Zufallsvariablen U. Mit

$$g(u) = \begin{cases} u, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man den Erwartungswert der Länge des linken Teilstücks durch

$$E[g(U)] = \int_0^1 u \cdot 1\ du = 0.5.$$

b) Die Länge des kürzeren Teilstücks ergibt sich zu $\min(U, 1-U)$. Mit

$$g(u) = \begin{cases} \min(u, 1-u), & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u, & 0 < u < \frac{1}{2}, \\ 1-u, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man den Erwartungswert der Länge des kürzeren Teilstücks durch

$$E[g(U)] = \int_0^{\frac{1}{2}} u \cdot 1\ du + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-u)\cdot 1\ du = \frac{1}{8} + \Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\Big) = 0.25.$$

Aufgabe 3

Der Würfel wird unabhängig so oft geworfen, bis alle sechs Ziffern gefallen sind. Die Anzahl der dazu benötigten Würfe ist durch die Zufallsvariable N gegeben. Die Folge der Würfe, bzw. der Ausgänge, beschreiben wir durch eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$. Den Zeitpunkt des ersten Auftretens der i-ten bisher nicht gewürfelten Zahl bezeichnen wir mit $T_i,\ i \in \{1,\ldots,6\}$. T_i wird gemessen in der Anzahl der bisher durchgeführten Würfe. Damit gilt

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_i &= \inf\Big\{n \in \mathbb{N} | X_n \notin \{X_{T_1}, X_{T_2}, \ldots, X_{T_{i-1}}\}\Big\},\ i \in \{2,\ldots,6\}, \end{aligned}$$

und es ist

$$N = T_6.$$

Gesucht ist der Erwartungswert und die Varianz von N, also $E[T_6]$, $\mathrm{Var}[T_6]$. Setze nun

$$\begin{aligned} N_1 &:= 1 \\ N_i &:= T_i - T_{i-1},\ i \in \{2,\ldots,6\}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für T_i die Darstellung

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} N_j. \tag{1}$$

$N_i - 1$ ist die Wartezeit von der $(i-1)$-ten bis zur i-ten Ziffer und ist geometrisch verteilt mit Parameter $p_i = \frac{7-i}{6}$. Die N_i sind stochastisch unabhängig.
Für den Erwartungwert von T_6 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} E[T_6] &= \sum_{i=1}^{6} E[N_i] \quad \text{wegen (1)} \\ &= \sum_{i=1}^{6}\Big(\frac{1-p_i}{p_i}+1\Big) = \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{p_i} \\ &= \sum_{i=1}^{6}\frac{6}{7-i} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 \\ &= 14.7. \end{aligned}$$

Für die Varianz von T_6 erhält man analog

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[T_6] &= \sum_{i=1}^{6}\mathrm{Var}[N_i], \quad \text{da die } N_i \text{ stoch. unabh.} \\ &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1-p_i}{{p_i}^2} = \sum_{i=1}^{6}\frac{(1-\frac{7-i}{6})6^2}{(7-i)^2} = \sum_{i=1}^{6}\frac{6^2-6(7-i)}{(7-i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{6}\frac{6(6-7+i)}{(7-i)^2} = \sum_{i=1}^{6}\frac{6(i-1)}{(7-i)^2} = \frac{0}{36}+\frac{6}{25}+\frac{12}{16}+\frac{18}{9}+\frac{24}{4}+\frac{30}{1} \\ &= 38.99. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

Wir setzen $g(x) := x^k f(x)$. Es folgt $g(-x) = (-x)^k f(-x) = -x^k f(x) = -g(x)$ und

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\infty} g(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} g(-x)dx + \int_{0}^{\infty} g(x)dx$$

$$= \int_0^{-\infty} g(-x)dx + \int_0^{\infty} g(x)dx = -\int_0^{\infty} g(x)dx + \int_0^{\infty} g(x)dx = 0.$$

Aufgabe 5

$$\begin{gathered}\operatorname{Cov}(aX+b, cY+d) = E[(aX+b)(cY+d)] - E(aX+b)E(cY+d) \\ = E(acXY + adX + bcY + bd) - (aE(X)+b)(cE(Y)+d) \\ = acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd - acE(X)E(Y) - adE(X) - bcE(Y) - bd \\ = ac(E(XY) - E(X)E(Y)) = ac\operatorname{Cov}(X,Y).\end{gathered}$$

Aufgabe 6

Da zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen immer unkorreliert sind, ist nur zu zeigen, daß aus der Unkorreliertheit die stochastische Unabhängigkeit folgt.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß X und Y beide den Träger $\{0,1\}$ haben. Da X und Y unkorreliert sind, folgt

$$0 = \operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1),$$

also

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1).$$

Folglich sind die Ereignisse $\{X=1\}$ und $\{Y=1\}$ stochastisch unabhängig. Mit Lemma 2.17 folgt:

- Die Ereignisse $\{X=1\}^C$ und $\{Y=1\}$ sind stochastisch unabhängig,
- Die Ereignisse $\{X=1\}$ und $\{Y=1\}^C$ sind stochastisch unabhängig,
- Die Ereignisse $\{X=1\}^C$ und $\{Y=1\}^C$ sind stochastisch unabhängig.

Mit Lemma 4.10 folgt, daß X und Y stochastisch unabhängig sind.

Im allgemeinen Fall sei $\{x_1, x_2\}$ der Träger von X und $\{y_1, y_2\}$ der Träger von Y. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$, da eine Zufallsvariable X mit nur einem Trägerpunkt x stochastisch unabhängig von jeder Zufallsvariablen Y ist. (Es sei $B \in \mathfrak{B}^1$:

$$P(X=x, Y \in B) = P(Y \in B) = P(X=x)P(Y \in A)$$

und

$$P(X=x', Y \in A) = P(\emptyset) = 0 = P(X=x')P(Y \in A)$$

für alle $x' \neq x$.)

Wir setzen $a := \frac{1}{x_2-x_1}$, $b := \frac{-x_1}{x_2-x_1}$, $c := \frac{1}{y_2-y_1}$ und $d := \frac{-y_1}{y_2-y_1}$. Die Zufallsvariablen $X' := aX+b$ und $Y' := cY+d$ haben beide den Träger $\{0,1\}$, denn:

$$X(\omega) = x_1 \Rightarrow X'(\omega) = \frac{x_1}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} = 0$$

und

$$X(\omega) = x_2 \Rightarrow X'(\omega) = \frac{x_2}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} = 1.$$

(Y' wird analog behandelt.)

Sind X und Y unkorreliert, so folgt also

$$0 = \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = \mathrm{Cov}(X', Y').$$

Also sind X' un d Y' unkorreliert und nach der Vorüberlegung auch stochastisch unabhängig. Da die Zufallsvariablen X und Y meßbare Funktionen von X' und Y' sind ($X = (x_2 - x_1)X' + x_1$, $Y = (y_2 - y_1)Y' + y_1$), sind sie nach Satz 4.16 stochastisch unabhängig.

Aufgabe 7

Es sei X gleichverteilt auf $\{-1, 0, 1\}$. Dann folgt

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)\frac{1}{3} = 0$$

und (beachte $X^3 = X$)

$$\mathrm{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = E(X) - E(X)E(X^2) = 0 - 0E(X^2) = 0,$$

also sind X und X^2 unkorreliert.
Es gilt aber

$$P(X^2 = 1, X = 0) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(X^2 = 1)P(X = 0),$$

X und X^2 sind also nicht stochastisch unabhängig.

Musterlösungen zur Zusatzübung

13. Juni 2002

Aufgabe 1

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)P(A)}{P(A)P(B)} = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(A) > 0 \Rightarrow \quad \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) > P(A) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(A|B)}{P(A)} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(B|A)}{P(B)} > 1 \quad \Rightarrow P(B|A) > P(B)$$

Aufgabe 2

Definiere die Ereignisse

$$H \equiv \text{Heilwirkung},$$
$$N \equiv \text{Nebenwirkung},$$
$$F \equiv \text{falsche Dosierung}.$$

Gegeben sind $P(F) = 0.01$, $P(H|F^C) = 0.8$, $P(N|F^C) = 0.3$, $P(H|F) = 0.3$ und $P(N|F) = 0.8$. Gesucht wird

$$P(H|N) = \frac{P(H\cap N)}{P(N)},$$

wobei nach Aufgabenstellung $P(H|F)$ und $P(N|F)$, bzw. $P(H|F^C)$ und $P(N|F^C)$ stochastisch unabhängig sind, also $P(H\cap N|F) = P(H|F)\cdot P(N|F)$ und $P(H\cap N|F^C) = P(H|F^C)\cdot P(N|F^C)$ gilt. (Daraus folgt i. a. nicht, dass auch $P(H)$ und $P(N)$ stochastisch unabhängig sind.)

$$P(N) = P(N|F)P(F) + P(N|F^C)P(F^C) = 0.8\cdot 0.01 + 0.3\cdot 0.99 = 0.305$$

$$\begin{aligned} P(H\cap N) &= P(H\cap N|F)P(F) + P(H\cap N|F^C)P(F^C) \\ &= P(H|F)P(N|F)P(F) + P(H|F^C)P(N|F^C)P(F^C) \\ &= 0.3\cdot 0.8\cdot 0.01 + 0.8\cdot 0.3\cdot 0.99 = 0.24 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(H|N) = \frac{0.24}{0.305} = 0.79$$

Aufgabe 3

Der Gewinn im i-ten Wurf beträgt i^2 mit Wahrscheinlichkeit p. Mit $X_i \sim \text{Bin}(1, p)$ gilt für den Gesamtgewinn G_n in n Würfen

$$G_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 X_i - I_n,$$

wobei I_n den Einsatz für ein Spiel der Länge n angibt. Damit das Spiel fair ist, muss $E[G_n] = 0$ gelten.

$$\begin{aligned} E[G_n] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 X_i - I_n\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 E[X_i] - I_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 p - I_n \\ &= p \sum_{i=1}^{n} i^2 - I_n \\ &= p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - I_n \end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$\begin{aligned} &0 = p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - I_n \\ &\Rightarrow I_n = p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$

damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 4

Es sei X die Anzahl der Münzen, die beim ersten Wurf „Kopf“ zeigen, und Y die Anzahl der Münzen, die beim zweiten Wurf „Kopf“ zeigen. Dann gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und $P(Y = k \mid X = l) = 0$ für $l < k$

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l) = \sum_{l=k}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l).$$

X ist $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilt, und Y ist unter der Bedingung $X = l$ $\mathrm{Bin}(l,p)$-verteilt. Folglich gilt

$$
\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l} \\
&= \sum_{l=k}^{n} \frac{l!n!(n-k)!}{k!(l-k)!l!(n-l)!(n-k)!} p^{k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \sum_{l=k}^{n} \binom{n-k}{n-l} p^{k+l}(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{n-l-k} p^{2k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^{2k+l}(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{n-k} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^l 1^{n-k-l} = \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^{2k}(1-p^2)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Folglich ist Y $\mathrm{Bin}(n,p^2)$-verteilt. Intuitiv kann man sich das so vorstellen: Man wirft alle n Münzen zweimal und zählt nur die, die zweimal „Kopf" zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für zweimal „Kopf" ist aber gerade p^2.

Aufgabe 5

$$\mathbf{X} := (S_1, S_2, S_3)^t$$

Die S_1, S_2, S_3 sind s.u. jeweils $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt

$$\Rightarrow f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,x_3) = \lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)} \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(x_1,x_2,x_3)$$

Definiere $T : (\mathbb{R}^3, \mathcal{L}^3) \;\rightarrow\; (\mathbb{R}^3, \mathcal{L}^3)$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Y} = T((x_1,x_2,x_3)^t) = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1)^t \\
&\Rightarrow T((x_1,x_2,x_3)^t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\det(A) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$, T ist injektiv auf $\mathbb{R}^3$ und stetig diffbar.

Invertieren von A liefert

$$
\begin{aligned}
&A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \left| \det \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le 3} \right| = |\det A| = 2
\end{aligned}
$$

Mit $T^{-1}(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3, y_1 + y_2 - y_3, -y_1 + y_2 + y_3)$ und dem

Transformationssatz, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, y_3) &= \frac{f_{\mathbf{X}}\left(T^{-1}(y_1, y_2, y_3)\right)}{\left|\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le 3}\Big|_{T^{-1}(y_1,y_2,y_3)}\right|}\mathbb{1}_{T((0,\infty)^3)}(y_1, y_2, y_3) \\
&= \frac{1}{2} f_{\mathbf{X}}\left(A^{-1}\mathbf{Y}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(T^{-1}(y_1, y_2, y_3)) \\
&= \frac{\lambda^3}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}((y_1-y_2+y_3)+(y_1+y_2-y_3)+(-y_1+y_2+y_3))} \cdot \\
&\quad \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3), \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3), \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3)\right) \\
&= \frac{\lambda^3}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}(y_1+y_2+y_3)}\mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(y_1 - y_2 + y_3, y_1 + y_2 - y_3, -y_1 + y_2 + y_3).
\end{aligned}$$

Zu beachten ist hier die Transformation der Indikatorfunktion. Aufgrund der Grenzen $(0,\infty)$ des Indikators und der linearität der Funktionen im Indikator kann dort der Faktor $\frac{1}{2}$ herausfallen.

Musterlösungen zur Zusatzübung

13. Juni 2002

Aufgabe 6

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)$$

Mit

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \quad \text{für } x_2 > 0$$

ergibt sich eine gemeinsame Dichte $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$ für $x_2 \neq 0$

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) f_{X_2}(x_2) = \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)\mathbb{1}_{(0,1)}(x_2).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq 2) &= \int\int_{0 \leq x_1+x_2 \leq 2} f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x_2} \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)\mathbb{1}_{(0,1)}(x_2) dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-x_2} \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1) dx_1\ dx_2.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)$ und der Integralgrenze liefert die Integration über x_1 einen Beitrag für

$$x_2 < x_1 < x_2 + 1 \quad \text{und} \quad 0 < x_1 < 2 - x_2.$$

Daraus folgt für $x_2 < \frac{1}{2}$

$$x_2 < x_1 < x_2 + 1$$

und für $x_2 > \frac{1}{2}$

$$x_2 < x_1 < 2 - x_2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq 2) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{x_2}^{x_2+1} dx_1\ dx_2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x_2}^{2-x_2} dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx_1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2 - 2x_2)\ dx_2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

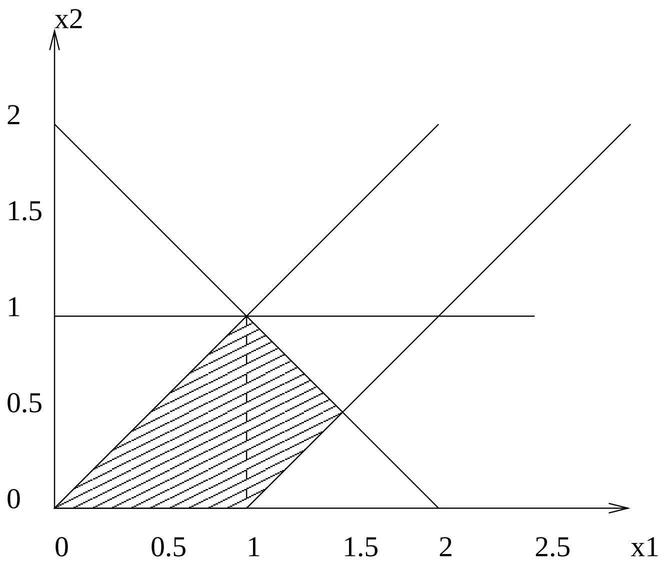


Abbildung 1: Skize des Integrationsbereichs in Aufgabe 6.

Auf dieses Ergebnis kommt man sehr schnell, wenn man sich an Hand einer Skize klar macht, welche Fläche durch $x_1 + x_2 < 2$, $x_2 < x_1 < x_2 + 1$ und $0 < x_2 < 1$ beschrieben wird (siehe Abbildung 1). Da die gemeinsame Dichte nur durch eine Konstante und die Indikatorfunktion gegeben ist, ist $P(X_1 + X_2 < 2)$ gleich dem Inhalt der durch die Ungleichungen eingeschlossen Fläche, also $P(X_1 + X_2 < 2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} P(\max\{X,Y\} \leq x) &= P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) \\ &= (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - 2e^{-\lambda x} + e^{-2\lambda x} \\ &= F_{max\{X,Y\}}(x) \quad \text{für } x > 0, \text{ sonst } F_{max\{X,Y\}}(x) = 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[\max\{X,Y\}] &= -\int_{-\infty}^{0} F_{max\{X,Y\}}(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F_{max\{X,Y\}}(x))\ dx \\ &= \int_{0}^{\infty} 2e^{-\lambda x} - e^{-2\lambda x}\ dx = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Mit

$$\max\{E[X], E[Y]\} = E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

folgt $E[\max\{X,Y\}] > \max\{E[X], E[Y]\}$.

Aufgabe 8

$X_1, \dots, X_n$ sind s.u.

$$\Rightarrow \quad L(\lambda|x_1, \dots x_n) := f(x_1, \dots x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x_i|}$$

$$\Rightarrow \quad \log L(\lambda|x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} (\log(\lambda) - \log(2) - \lambda|x_i|)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d \log L(\lambda|x_1, \dots x_n)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} - |x_i| =: 0$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot \frac{1}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n} |x_i| =: 0 \qquad \text{da} \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i| \neq 0, \text{ P-f.s}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

$\log L$ ist stetig in λ und $\lim_{\lambda \to 0} \log L = \lim_{\lambda \to \infty} \log L = -\infty$.

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

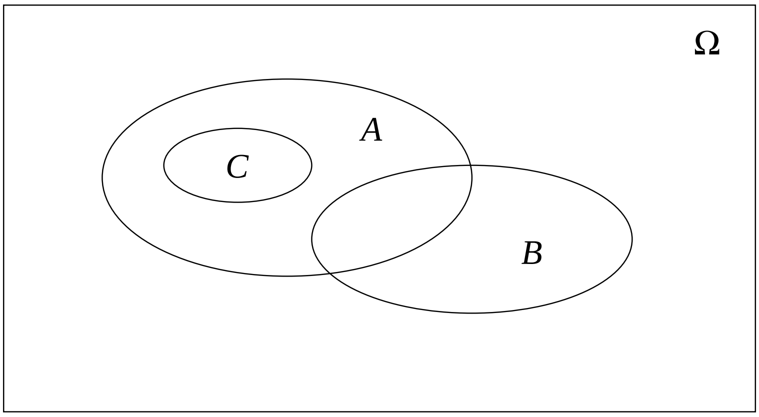
ist also ML-Schätzer für λ.

Musterlösung zur Zusatzübung

5. August 2003

Aufgabe 1

a) Es gilt $P(A \cap B) > 0$ und $C \subseteq A \setminus B$. Für A, B und C ergibt sich somit:



Nutze für Gegenbeispiele eine Laplace-Verteilung über
$\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \;\Rightarrow\; |\Omega| = 4$ und wähle
$A' = \{1, 2, 3\} \subseteq \Omega$,
$B' = \{3, 4\} \subseteq \Omega$ und
$C' = \{1\} \subseteq A' \setminus B'$.

Für die Aussagen gilt somit:

1. ist falsch: $P(A' \cap B') = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4} = P(A')$.
2. ist falsch: $P(A' \cap B') = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = P(A') - P(C')$.
3. ist richtig: $P(A) - P(C) > 0$, da
$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \geq P(C) + P(A \cap B) > P(C).$$
4. ist richtig: $P(A \setminus C) = P(A) - P(C)$, da insbesondere $C \subseteq A$ gilt.

Weiterhin gilt:

1. ist falsch: $P(A'|C') = \frac{P(A' \cap C')}{P(C')} = 1 \neq 0 = \frac{P(B' \cap C')}{P(C')} = P(B'|C')$.
2. ist richtig: $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)} = 1$, da $C \subseteq A$.
3. ist richtig: $P(A|A \cap B) = \frac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1 = P(A|C)$ (siehe 2).
4. ist falsch: $P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = P(A'|B')$.

b) Für die Aussagen gilt:

1. ist falsch: (siehe Aussage 2).
2. ist richtig: $\mathrm{Bin}(n_1, p) * \mathrm{Bin}(n_2, p) = \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$.
3. ist falsch: $P(Y - X < 0) > 0$, die Binomialverteilung hat aber einen positiven Träger.
4. ist falsch: (siehe Aussage 2, mit $p = q$).

Weiterhin gilt:

1. ist falsch: Für $n_1 = 2, p = \frac{1}{2}$ gilt $\mathrm{E}(X) = 1 \neq \frac{1}{2} = P(X = 1)$.
2. ist falsch: Für $n_1 = 1, p = 0$ gilt $E(X) = 0 \ngeq 1 = P(X = 0)$.
3. ist falsch: $P(X = n_1) = p^{n_1} \neq p^{n_2} = P(Y = n_2)$, da $n_1 < n_2$.
4. ist falsch: Für $n_1 = 1, n_2 = 2, p = \frac{1}{2}$ gilt $P(X = 0) = \frac{1}{2} \nleq \frac{1}{4} = P(Y = 0)$.

Aufgabe 2

a) Für die Aussagen gilt:

1. ist falsch: $X, Y \sim \mathrm{R}(0, 1)$ seien absolut-stetige Zufallsvariablen. Die Dichten $f_X(x) = f_Y(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ sind nicht stetig.
2. ist richtig: vgl. Def. 3.13.
3. ist richtig: $X + Y$ ist absolut-stetige (vgl. La. 5.4).
4. ist falsch: vgl. z.B. Beispiel 5.5.

Weiterhin gilt:

1. ist richtig: $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx \geq 0$, da $f(x) \geq 0\ \forall x$.
2. ist falsch: Für $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ ist $E(X) = 0 \geq 0$ und $f_X(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. ist falsch: $X, Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$ sind zwar identisch verteilt, aber nicht gleich.
4. ist richtig.

b) Für die Aussagen gilt:

1. ist falsch: Wähle $X = Y \sim \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$. X und Y sind nicht s.u., aber $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 2$ und $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = 4$.
2. ist richtig: $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 2 + 2 = 4$ (Linearität des Erinnerungswerts).
3. ist falsch: Sei $X = Y$, dann ist $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(2X) = 4\operatorname{Var}(X) = 16 \neq 8 = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$.
4. ist richtig: $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y)} = 4$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung, La. 6.9).

Weiterhin gilt:

1. ist falsch: Wähle $X \sim \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; \mathrm{E}(X) = 2$, $\operatorname{Var}(X) = 4$.
2. ist richtig: Annahme: $X \sim \operatorname{Bin}(n,p) \;\Rightarrow\; \mathrm{E}(X) = np$ uns $\operatorname{Var}(X) = np(1-p)$

   $$\Rightarrow \quad 4 = \operatorname{Var}(X) = \mathrm{E}(X)(1-p) = 2(1-p) \quad \Rightarrow \quad p = -1$$

   Also kann X nicht $\operatorname{Bin}(n,p)$-verteilt sein.
3. ist falsch: Wähle $X \sim \mathrm{N}(2,4) \;\Rightarrow\; \mathrm{E}(X) = 2$, $\operatorname{Var}(X) = 4$.
4. ist richtig: Für $X \sim \operatorname{Poi}(\lambda)$ gilt $\mathrm{E}(X) = \operatorname{Var}(X)$, aber $2 \neq 4$.

Aufgabe 3

Zur Lösung der Aufgabe definieren wir die folgenden Ereignisse:

- K: Das Buch enthält keinen Druckfehler
- E: Das Buch enthält genau einen Druckfehler
- Z: Das Buch enthält mindestens zwei Druckfehler
- V_i: Das Buch stammt vom Verlag V_i, $i = 1,2,3$

Es gilt dann:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{P}(V_1) = \frac{1}{6} & \mathrm{P}(V_2) = \frac{1}{2} & \mathrm{P}(V_3) = \frac{1}{3} \\
\mathrm{P}(K \mid V_1) = 0.48 & \mathrm{P}(K \mid V_2) = 0.7 & \mathrm{P}(K \mid V_3) = 0.75 \\
\mathrm{P}(E \mid V_1) = 0.4 & \mathrm{P}(E \mid V_2) = 0.15 & \mathrm{P}(E \mid V_3) = 0.15 \\
\mathrm{P}(Z \mid V_1) = 0.12 & \mathrm{P}(Z \mid V_2) = 0.15 & \mathrm{P}(Z \mid V_3) = 0.1
\end{array}$$

a) Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(K \mid V_i) \cdot \mathrm{P}(V_i) = 0.48 \cdot \frac{1}{6} + 0.7 \cdot \frac{1}{2} + 0.75 \cdot \frac{1}{3} = 0.68$$

b) Mit der Bayes-Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V_2 \mid E) &= \frac{\mathrm{P}(V_2 \cap E)}{\mathrm{P}(E)} = \frac{\mathrm{P}(E \mid V_2) \cdot \mathrm{P}(V_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(E \mid V_i) \cdot \mathrm{P}(V_i)} \\
&= \frac{0.15 \cdot \frac{1}{2}}{0.4 \cdot \frac{1}{6} + 0.15 \cdot \frac{1}{2} + 0.15 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9}{23} \approx 0.39
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) $\mathrm{Cov}(X+Z, Y+Z) = \mathrm{Var}(Z)$
Diese Aussage ist richtig, wie die folgende Umformung zeigt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Z, Y+Z) &= \mathrm{E}((X+Z)\cdot(Y+Z)) - \mathrm{E}(X+Z)\cdot\mathrm{E}(Y+Z) \\
&= \mathrm{E}(X \cdot Y + X \cdot Z + Z \cdot Y + Z^2) \\
&\quad - (\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Z)) \cdot (\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z)) \\
&= \mathrm{E}(X \cdot Y) + \mathrm{E}(X \cdot Z) + \mathrm{E}(Z \cdot Y) + \mathrm{E}(Z^2) \\
&\quad - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(Z)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Z)^2 \\
&= \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Z) + \mathrm{E}(Z)\cdot\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z^2) \\
&\quad - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(Z)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Z)^2 \\
&= \mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2 = \mathrm{Var}(Z)
\end{aligned}$$

Dabei wird benutzt, dass bei stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen der Erwartungswert des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte ist.

b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}(Z)$
Diese Aussage ist falsch. Es gilt

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y) = 0,$$

da X und Y nach Voraussetzung stochastisch unabhängig sind. Mit der Voraussetzung $\mathrm{Var}(Z) > 0$ folgt $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq \mathrm{Var}(Z)$.

c) $\mathrm{Cov}(X \cdot Z, Y \cdot Z) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) \cdot \mathrm{Var}(Z)$
Diese Aussage ist richtig:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X \cdot Z, Y \cdot Z) &= \mathrm{E}(X \cdot Y \cdot Z^2) - \mathrm{E}(X \cdot Z) \cdot \mathrm{E}(Y \cdot Z) \\
&= \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)\cdot\mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)\cdot\mathrm{E}(Z)^2 \\
&= \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)\cdot\big(\mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)^2\big) \\
&= \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)\cdot\mathrm{Var}(Z)
\end{aligned}$$

d) $\mathrm{Var}(X+Z) = \mathrm{Var}(Y-Z) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$
Diese Aussage ist richtig. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(X+Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Y-Z) \\
\Rightarrow \quad &\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)
\end{aligned}$$

e) $(\mathrm{Var}(X))^2 = (\mathrm{Var}(Y))^2 \Rightarrow \mathrm{Var}(X+Z) = \mathrm{Var}(Y-Z)$
Diese Aussage ist richtig. Wegen $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) \geq 0$ folgt aus $(\mathrm{Var}(X))^2 = (\mathrm{Var}(Y))^2$, dass auch $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$ gilt. Mit der vorausgesetzten stochastischen Unabhängigkeit aller Zufallsvariablen folgt:

$$\mathrm{Var}(X+Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(Y-Z)$$

Aufgabe 5

$$\left.\begin{aligned} P(X_1=0) &= P(Z=0)+P(Z=1) = \frac{3}{4} \\ P(X_1=1) &= P(Z=2)+P(Z=3) = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_1 \sim \mathrm{Bin}\left(1, \frac{1}{4}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} P(X_2=0) &= P(Z=0)+P(Z=2) = \frac{5}{8} \\ P(X_2=1) &= P(Z=1)+P(Z=3) = \frac{3}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_2 \sim \mathrm{Bin}\left(1, \frac{3}{8}\right)$$

$$\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{4} \quad V(X_1) = \frac{3}{16}$$

$$\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{8} \quad V(X_2) = \frac{15}{64}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = P(X_1=1, X_2=1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{32} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$X\,, Y\,, Z \sim \mathrm{R}(0,1)$ s.u.

a) $P(2X+2Y > 4Z) = P(X+Y > 2Z)$
Berechne die Verteilung von $X+Y$:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(0,1)}(t)\ \mathbb{1}_{(0,1)}(z-t)dt = \int_{\max\{z-1,0\}}^{\min\{z,1\}} 1\ dt\ \mathbb{1}_{(0,2)}(z) \\ &= \begin{cases} z &, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z &, \quad 1 \leq z \leq 2 \\ 0 &, \quad \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei $z \,\epsilon\, (0,1)$:

$$
\begin{aligned}
&P(X+Y > 2Z|Z=z) \\
&\quad = 1 - P(X+Y \geq 2Z|Z=z) \\
&\quad = 1 - \int\limits_{-\infty}^{2z} f_{X+Y}(t)\, dt \;=\; 1 - \int\limits_{0}^{2z} f_{X+Y}(t)\, dt \\
&\quad = \begin{cases} 1 - \int\limits_0^{2z} t\, dt \;=\; 1 - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{2z} \;=\; 1 - 2z^2 & , \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} - \int\limits_1^{2z} (2-t)\, dt \;=\; \frac{1}{2} - \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^{2z} \;=\; 2z^2 - 4z + 2 & , \quad \frac{1}{2} < z \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nach (7.1) (Skript S. 77) gilt

$$P(X' \in A, Z \in B) = \int_B P^{X|Y=y}(A) dP^Y(y).$$

Da Z absolut-stetig ist, also eine Dichte hat, gilt insbesondere

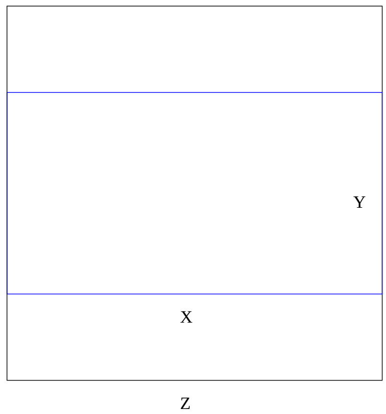
$$P(X' \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X' \in A|Z=z)\; f_Z(z)\; dz. \qquad (*)$$

Dies ist ein Analogon zum Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.
Somit gilt hier:

$$
\begin{aligned}
P(2X+2Y > 4Z) &= P(X+Y > 2Z) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(X+Y > 2Z \mid Z=z) f_Z(z)\, dz \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(X+Y > 2z \mid Z=z) \mathbb{1}_{[0,1]}(z)\, dz \\
&= \int\limits_0^1 P(X+Y > 2z)\, dz \\
&= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2z^2)\, dz + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (2z^2 - 4z + 2)\, dz \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 + \frac{1}{2} + 1 \;=\; \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b) Korrketur der Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechteck *achsenparallel* in das Quadrat gelegt werden kann.

Die folgenden Abbildung zeigt, wie das Rechteck in dem Quadrat lieg:



Es ist somit möglich das Rechteck parallel in das Quadrat zu legen, wenn $X < Z$ und $Y < Z$, also $\max\{X, Y\} < Z$.

$$
\begin{aligned}
P(\max\{X,Y\} < Z) &= P(X < Z\ ,\ Y < Z) \\
&\underset{\text{mit }(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} P(X < Z\ ,\ Y < Z | Z = z)\ f_Z(z)\ dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < z\ ,\ Y < z | Z = z)\ \mathbb{1}_{[0,1]}(z)\ dz \\
&= \int_0^1 P(X < z, Y < z)\ dz \\
&\underset{\text{s.u.}}{=} \int_0^1 P(X < z) P(Y < z)\ dz \\
&= \int_0^1 z \cdot z\ dz\ =\ \left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^1\ =\ \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

$X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)\ ,\ \lambda > 0 \Rightarrow f_{X_1}(x_1)\ =\ \lambda e^{-\lambda x_1}\ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_1)$
$X_2 \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{2\lambda}) \Rightarrow f_{X_2}(x_2)\ =\ \sqrt{\frac{\lambda}{\Pi}}\ e^{-\lambda {x_2}^2}$
$T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2\ ,\ x_1 - x_2)$
$T^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{3}(y_1 + y_2)\ ,\ \frac{1}{3}(y_1 - 2y_2)\right)$

$$
\begin{aligned}
T\left(T^{-1}(y_1, y_2)\right) &= T\left(\frac{1}{3}(y_1, y_2), \frac{1}{3}(y_1 - 2y_2)\right)\ =\ (y_1, y_2) && (1) \\
T^{-1}\left(T(x_1, x_2)\right) &= T^{-1}(2x_1 + x_2, x_1 - x_2)\ =\ (x_1, x_2) && (2)
\end{aligned}
$$

Mit (1) , (2) T^{-1} ist die Inverse , T ist bijektiv auf $\boldsymbol{R}^2$.
$\det\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\ =\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\ =\ -3$

$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) \ = \ \lambda e^{-\lambda x_1} \ \sqrt{\frac{2\lambda}{2\Pi}} \ e^{-\frac{2\lambda {x_2}^2}{2}} \ = \ \lambda\sqrt{\frac{\lambda}{\Pi}} \ e^{-\lambda(x_1+{x_2}^2)}$
$M = (0,\infty) \times (-\infty,\infty)$
Alle Voraussetzungen für den Transformationssatz sind auf M erfüllt .

$$
\begin{aligned}
&f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) \\
&\quad = \frac{f_{(X_1,X_2)}\left(T^{-1}(y_1,y_2)\right) \ \mathbb{1}_{T(M)}(y_1,y_2)}{\left|\det\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)_{i=1,2}\right|_{(X_1,X_2)=T^{-1}(Y_1,Y_2)}} \\
&\quad = \frac{f_{X_1,X_2}\left(\frac{1}{3}(y_1+y_2),\frac{1}{3}(y_1-2y_2)\right)}{3} \mathbb{1}_M\left(T^{-1}(y_1,y_2)\right) \\
&\quad = \frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \ e^{-\lambda(\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{3}{y_1}^2-\frac{2}{3}y_1y_2+\frac{1}{3}{y_2}^2)} \ \mathbb{1}_{(0,\infty)\times(-\infty,\infty)}\left(\frac{1}{3}(y_1+y_2),\frac{1}{3}(y_1-2y_2)\right) \\
&\quad = \frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \ e^{-\lambda(\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{3}{y_1}^2-\frac{2}{3}y_1y_2+\frac{1}{3}{y_2}^2)} \ \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y_1+y_2)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Die Likelihood-Funktion ist:

$$L(a|x) = f(x|a) = \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}x\right) \mathbb{1}_{[0,a]}(x)$$

Suche nun ein a, welches $L(a|x)$ für festes x maximiert.
Für $a < x$ gilt $L(a|x) = 0$.
Für $a \geq x$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&L(a|x) = \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}x\right) \\
&\frac{dL}{da}(a|x) = -\frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^3}x \overset{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \frac{2}{\hat{}a^2} = \frac{4}{\hat{a}^3}x \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a} = 2x \\
&\frac{d^2L}{da^2}(2x|x) = \frac{4}{(2x)^3} - \frac{12}{(2x)^4}x = -\frac{1}{4x^3} < 0 \ \forall \ x > 0 \\
&\Longrightarrow \ \hat{a} = 2x \text{ ist ML-Schätzer für } a.
\end{aligned}
$$

Der Schätzer ist nicht erwartungstreu, da

$$\mathrm{E}(\hat{a}) = \mathrm{E}(2X) = 2\int_0^a x\left(\frac{2}{a} - \frac{2}{a^2}x\right)dx = 2\left[\frac{1}{a}x^2 - \frac{2}{3a^2}x^3\right]_0^a = \frac{2}{3}a \neq a.$$