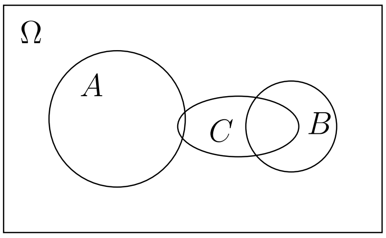
Gedächtnisprotokoll zur mündlichen Nachprüfung

Einführung in die Stochastik für Informatiker

Prüfer	Prof. Dr. Rudolf Mathar
Beisitzer	Daniel Catrein
Datum	15.09.2003
Dauer	20 min
Note	4.0

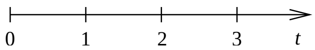
Frage 1: *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und Ereignisse* A, B, C*, wobei* $P(C) > 0$*. Darüber hinaus sei* $P(A|C) \leq P(B|C)$*. Folgt daraus* $P(A) \leq P(B)$*?*

Es gilt: $\frac{P(A \cap C)}{P(C)} \leq \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow P(A \cap C) \leq P(B \cap C)$.
Mein erster Vorschlag war:



Es ist zu sehen, dass $P(A \cap C) \leq P(B \cap C)$, aber $P(A) > P(B)$.
Aus irgend einem Grund war das Gegenbeispiel zu ungenau und ich musste mir ein diskretes einfallen lassen, das etwa so aussah:
Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{4\}$ und $C = \{3, 4\}$. Also ist $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(B \cap C)$, aber $P(A) = \frac{3}{4} > \frac{1}{4} = P(B)$.
Dann wurde nach einem zweidimensionalen Gegenbeispiel gefragt. Ich konnte nicht verstehen, was gewollt war. Hatte aber bestimmt was mit meiner Grafik und dem Begriff "Volumen" zu tun.

Frage 2: *Zeichnen Sie eine Zeitachse. Von Interesse sind die Intervalle* $[0, 1], [1, 2]$ *und* $[2, 3]$*. Die poisson-verteilten Zufallsvariablen* X_1, X_2 *und* X_3 *mit Parametern jeweils* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*, beschreiben die Anzahl der Ereignisse in den entsprechenden Intervallen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall* $[0, 3]$ *mindestens ein Ereignis auftritt.*



Sei $X = X_1 + X_2 + X_3$ und sei $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Also ist $X \sim Poi(\lambda)$, weil die Poisson-Verteilung faltungsstabil ist. Dann ist $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda}$.

Frage 3: *Sei $X \sim Poi(\lambda_1)$ und $Y \sim Exp(\lambda_2)$. Wie ist $X + Y$ verteilt?*

Ich war völlig verwirrt. Prof. Mathar meinte: *"Die Frage ist außergewöhnlich schwierig! Sie haben den Eindruck gemacht, dass sie sehr gut vorbereitet sind."* Zusammen sind wir auf etwa $\sum_{k=0}^{\infty} P(X + Y = z | Y = k) P(Y = k)$ gekommen.

Frage 4: *Seien $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Gibt es a_n und b_n, so dass $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n}{b_n} \sim^{as} N(0,1)$?*

Ja. Mit dem Zentralen Grenzwertsatz folgt, dass $a_n = n\mu$ und $b_n = \sigma\sqrt{n}$.
Folgefrage: *Ist die Verteilung asymptotisch oder nicht?*
Nein, weil die X_i normalverteilt sind.

Frage 5: *Gegeben seien die stochastisch unabhängigen exponetial mit Parameter λ verteilten Zufallsvariablen X_1 und X_2. Stellen wir uns vor, das wären die zwei Schritte eines Algorithmus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus mindestens eine Millisekunde läuft?*

Sei $X = X_1 + X_2$ die Laufzeit des Algorithmus. Dann ist $X \sim Erl(2, \lambda)$.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \int_{-\infty}^{1} \lambda^2 x e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)} dx = 1 - \lambda^2 \int_0^1 x e^{-\lambda x} dx$
Folgefrage, weil die Zeit um war: *Und wie lösen Sie das Integrall?*
Durch partielle Integration.

Fazit: Die Atmosphere war recht angenehm und der Prüfer zeigte sich freundlich. Wenn er merkte, dass ich Schwierigkeiten hatte, versuchte er immer zu helfen und sagte noch ein paar nette Worte dazu. Zum Schluss sagte er sogar: *"Ich kann mir gar nicht Vorstellen wie Sie mit diesen Kenntnissen durchfallen konnten. Ich denke das war für mehr als 4.0."*
Die Prüfung basierte auf die ganze Vorlesung und hing nicht davon ab, dass ich 2 Punkte für die 4.0 brauchte. Es hat mir geholfen, dass sie nachmittags stattfand, weil ich einige der Leute, die vor mir waren, interviewen konnte. So wusste ich die Antwort der ersten Frage, bevor die Frage überhaupt gestellt war.