Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 18.07.02
bis 15:45 Uhr

11. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 37

Die Passagiere eines Flugzeuges sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit männlich oder weiblich. Es kann angenommen werden, dass Männer im Mittel 80 kg mit einer Varianz von $49\,\mathrm{kg}^2$ und Frauen im Mittel $65\,\mathrm{kg}$ mit einer Varianz von $36\,\mathrm{kg}^2$ wiegen.
Berechnen Sie approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtzuladung von $7500\,\mathrm{kg}$ eines 100-sitzigen Passagierflugzeuges bei voller Beladung überschritten wird.

Aufgabe 38 (k)

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängig, jeweils mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 2\ \lambda\ x\ e^{-\lambda x^2} & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

verteilt, wobei $\lambda > 0$ ein Parameter ist.
Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

Aufgabe 39

Sei $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ gegeben und fest ist. Die a-priori-Verteilung für θ sei $N(\mu, \tau^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \tau^2 > 0$. Bestimmen Sie einen Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$ zu dieser a-priori-Verteilung.

Aufgabe 40

X_1, X_2 seien stochastisch unabhängige, jeweils Exp(λ)-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie für λ ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha = 0{,}9$ der Form

$$\left[0, \frac{b}{X_1 + X_2}\right].$$

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

Teillösung 2. Übungsblatt

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =& 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C\right) \quad \text{mit Bonferroni} \\
\geq& 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^C) = 1 - \sum_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)) \\
=& \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) siehe Skript

b) Nein, Gegenbeispiel: $I = \{1,2\}$, $\Omega = \{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 =& \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \\
\mathfrak{A}_2 =& \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\} \\
\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 =& \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind σ-Algebren, $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ ist jedoch keine, da $\{1,3\} \cap \{2,3\}$ nicht enthalten ist.

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein RWTH Aachen, SS 2002

Teillösung 3. Übungsblatt

Aufgabe 10

A_i sei das Ereignis, dass Router i intakt ist mit $P(A_i) = p_i$.

I sei das Ereignis, dass ein Verbindung möglich ist.

Aus

$$P(I) = P(I|A_1)\ P(A_1) + P(I|A_1^C)P(A_1^C)$$

folgt mit

$$P(I|A_1) = P(A_3 \cup A_4) = 1 - P((A_3 \cup A_4)^C) = 1 - P(A_3^C \cap A_4^C) = 1 - (1-p_3) \cdot (1-p_4)$$

und

$$\begin{aligned} P(I|A_1^C) =& P((A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)) = P(A_2 \cap a_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ =& p_2p_3 + p_2p_4 - p_2p_3p_4 \end{aligned}$$

das Ergebnis

$$P(I) = p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3 - p_1p_3p_4 - p_2p_3p_4 - p_1p_2p_4 + p_1p_2p_3p_4$$

Musterlösung 4. Übung

21. Juni 2002

Aufgabe 12

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k \; (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k}}_{\longrightarrow 1} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \underbrace{\prod_{l=0}^{k-1} \underbrace{\frac{n-l}{n}(np_n)}_{\longrightarrow 1\cdot\lambda}}_{\longrightarrow \lambda^k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n$$

Bekannt ist, dass für $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, $x \geq 0$, gilt $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-x} =: f(x)$. Aus $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ und $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ folgt jedoch im Allgemeinen nicht, dass auch $f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ gilt. Die Vermutung, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \overset{!}{=} e^{-\lambda}$, für $\lambda_n = np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ gilt, ist somit zu zeigen:

$$\begin{aligned}
& \forall\, n \in \mathbb{N}: \;\; f_n(x) \text{ ist monoton fallend in x} \\
& f := \lim_{n\to\infty} f_n \text{ ist stetig, } \lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \\
& \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; n_0, \text{ so dass } \forall\, n > n_0: \;\; \lambda - \varepsilon < \lambda_n < \lambda + \varepsilon \\
\underset{f_n \text{monoton}}{\Rightarrow} \quad & f_n(\lambda + \varepsilon) \leq f_n(\lambda_n) \leq f_n(\lambda - \varepsilon) \\
\underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \quad & f(\lambda + \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \leq f(\lambda - \varepsilon) \\
\underset{f stetig, \varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \quad & f(\lambda) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \leq f(\lambda) \\
\Rightarrow \quad & f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n)
\end{aligned}$$

Somit gilt die Vermutung und auch die Aussage.

Aufgabe 13

a) X beschreibe die Anzahl der Sendungen eines Pakets und hat den Träger $T = \mathbb{N}$.

Sei $Z \sim \text{Geo}(p)$ mit Träger $T' = \mathbb{N}_0$, so gilt $X = 1 + Z$.
Für die Zähldichte von X gilt

$$f_X(k) = P^X(k) = P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Die Übertragung des Pakets wird:
1) nicht wiederholt: $Z = 0 \ \Rightarrow \ X = 1 \ \Rightarrow P(X = 1) = p$,
2) 2 mal wiederholt: $Z = 2 \ \Rightarrow \ X = 3 \ \Rightarrow P(X = 3) = p(1-p)^2$.
Mit Wahrscheinlichkeit 0.99 sollen höchstens drei erneute Übertragungen nötig sein. Gesuch wird ein p, so dass $P(X \leq 4) = 0.99$

$$0.99 = \sum_{k=1}^{4} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=0}^{3}(1-p)^i = p\ \frac{1-(1-p)^4}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^4$$
$$\Rightarrow \ p = 1 - \sqrt[4]{0.01}$$

b) Träger von Y: $T = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$$P(Y = k) = \begin{cases} P(X = k) & \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, 9\} \\ \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) & ,\ \text{falls } k = 10 \end{cases}$$
$$P(Y = 10) = \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) = 1 - \sum_{i=1}^{9} P(X = i) = 1 - \sum_{j=0}^{8} P(Z = j)$$
$$= 1 - (1 - (1-p)^9) = (1-p)^9$$
$$f_Y(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, 9\} \\ (1-p)^9 & ,\ \text{falls } k = 10 \end{cases}$$

c) In der Aufgabenstellung trat leider ein Formulierungsfehler auf. Die gestellte Aufgabe ist leider nicht approximativ lösbar. Die korrekte Aufgabenstellung lautet:
Aufgabenstellung: Eine Datei, die übertragen werden soll, besteht aus 1000 Paketen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen mehr als drei Pakete mehrfach übertragen werden, falls $p = 1 - 10^{-4}$ ist?

X sei die Anzahl der Pakete, die mehrfach versendet werden müssen. $X \sim \text{Bin}(n, p')$ mit $n = 1000$, $p' = 1 - p = 10^{-4}$.
n ist groß, p' klein $\Rightarrow$ Gesetz seltener Ereignisse ist anwendbar, d.h. X ist näherungsweise Poisson-Verteilt mit Parameter $\lambda = 1000 \cdot 10^{-4} = 0.1$.
$\Rightarrow$ $P(\text{mehr als 3 Pakete mehrfach übertragen}) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$ mit $X \sim \text{Poi}(0.1)$.

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-0.1}\frac{0.1^k}{k!} \approx 3.85 \cdot 10^{-5}$$

Für das in der fehlerhaften Aufgabenstellung angegebene p kann die Aufgabe gelöst werden durch summieren über die Binomialverteilung.

Aufgabe 14

a)

$$F_X(x) = P(X \leq x) \in [0,1]$$

$$(i)\ x < y: \quad F_X(x) = P(X \leq x) = P^X((-\infty, x]) \overset{\text{La. 2.11, c)}}{\leq} P^X((-\infty, y]) = P(X \leq y) = F_X(y)$$

$$\Rightarrow\ F_X \text{ monoton wachsend}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P^X((-\infty, x]) \\ &\overset{x_n = n}{=} \lim_{n\to\infty} P^X((-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcup_{i=1}^{n} (-\infty, i]\right) \\ &\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} P^X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n]\right) = P^X(\mathbb{R}) = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P^X((-\infty, x]) \\ &\overset{x_n = -n}{=} \lim_{n\to\infty} P^X((-\infty, -n]) = \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, -i]\right) \\ &\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} P^X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = P^X(\emptyset) = 0\end{aligned}$$

$$(iii)\ x_n \downarrow x_0 \text{ für } n \to \infty$$

$$\begin{aligned}F_X(x_0) &= P((\infty, x_0]) = P^X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_n]\right) \\ &\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, x_i]\right) = \lim_{n\to\infty} P^X\left((-\infty, x_n]\right) \\ &= \lim_{x\downarrow x_0} P^X((-\infty, x]) = \lim_{x\downarrow x_0} P(X \leq x) = \lim_{x\downarrow x_0} F_X(x)\end{aligned}$$

b)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P^X((-\infty, x]) = P^Y((-\infty, x]) = P(Y \leq x) = F_Y(x)$$

Aufgabe 15

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ mit } \lambda = 0.01$$
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$
$$F(x) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

a)

$$
\begin{aligned}
&1.) \quad P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - F_X(100) = e^{-100\lambda} = \frac{1}{e}\\
&2.) \quad P(25 \leq X \leq 300) = P(X \leq 300) - P(X < 25) = P(X \leq 300) - P(X \leq 25)\\
&\qquad = F(300) - F(25) = 1 - e^{-300\lambda} - 1 + e^{-25\lambda}\\
&\qquad = e^{-\frac{1}{4}} - e^{-3}\\
&3.) \quad P(X < 150) = 1 - e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

b) Gesucht ist ein x, so dass $P(X \leq x) = p = 0,5$

$$
\begin{aligned}
&p = P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}\\
&\Rightarrow \quad 1 - p = e^{-\lambda x}\\
&\Rightarrow \quad \ln(1-p) = -\lambda x\\
&\Rightarrow \quad x = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda} = -100 \ \ln(1-p) \approx 69,315
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
&p = P(u_1 < X \leq u_2) = P(X \leq u_2) - P(X \leq u1) = F(u_2) - F(u_1)\\
&\Rightarrow \quad p = e^{-\lambda u_1} - e^{-\lambda u_2}\\
&\Rightarrow \quad e^{-\lambda u_2} = e^{-\lambda u_1} - p\\
&\Rightarrow \quad -\lambda u_2 = \ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)\\
&\Rightarrow \quad u_2 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)\\
&\text{Suche } \min_{0 \leq u_1}\left(\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)}_{u_2} - u_1\right) =: \min_{0 \leq u_1} f(u_1)\\
&f'(u_1) = \frac{1}{e^{-\lambda u_1} - p} e^{-\lambda u_1} - 1 \underset{x := e^{-\lambda u_1}}{=} \frac{x}{x-p} - 1 \overset{!}{\geq} 0
\end{aligned}
$$

Wenn die letzte Ungleichung gilt, dann ist $f(x)$ monoton steigend. Damit ist $u_1 = 0$ die Lösung.
Zeige nun die letzte Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\text{Beh.: } x - p \leq 0 \Rightarrow e^{-\lambda u_1} \leq p, \ \text{aber } p = P(u_1 < x \leq u_2) < e^{-\lambda u_1} \ \Rightarrow \ \lightning\\
&\Rightarrow \quad x - p > 0\\
&\text{Zeige nun: } \frac{x}{x-p} \geq 1\\
&\Leftrightarrow \quad x \geq x - p\\
&\Leftrightarrow \quad 0 \geq -p
\end{aligned}
$$

Somit ist $f(u_1)$ monoton steigend in u_1. Mit $u_2(u_1 = 0) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^0 - p\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$ folgt das gesuchte Intervall

$$
\left(0, -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)\right].
$$

Musterlösungen 5. Übung

10. Juni 2002

Aufgabe 16

Es gelte $P(X > x + y | X > x) = P(X > y) \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P^X((y, \infty) &= P^X((x + y, \infty) | (x, \infty)) \\
&= \frac{P^X((x + y, \infty) \cap (x, \infty))}{P^X((x, \infty))} \\
&= \frac{P^X((x + y, \infty))}{P^X((x, \infty))}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; P^X((x + y, \infty)) = P^X((x, \infty)) \cdot P^X((y, \infty))$$

$$P^X((x, \infty)) = 1 - P^X((-\infty, x]) = 1 - F_X(x) =: \overline{F}_X(x)$$

$$\Rightarrow\; \overline{F}_X(x + y) = \overline{F}_X(x) \cdot \overline{F}_X(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},\; \overline{F}_X \text{ stetig}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}\; \overline{F}_X(x) = e^{\alpha x},\; \alpha \in \mathbb{R} \text{ Annahme: } \alpha > 0 \;&\Rightarrow\; \overline{F}_X \text{ streng monoton steigend} \\
&\Rightarrow\; F_X \text{ streng monoton fallend} \\
\alpha = 0 \;&\Rightarrow\; \overline{F}_X(x) = 1 \;\Rightarrow\; F_X(x) = 0\; \forall\, x \\
\Rightarrow \alpha < 0,&\text{ setze } \lambda := -\alpha \\
\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} &\;\Rightarrow\; X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)
\end{aligned}$$

Somit folgt, dass eine Zufallsvariable X mit gedächnisloser, stetiger Verteilungsfunktion exponential Verteilt ist.

Aufgabe 17

a) Normiere $h(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \int_0^{\infty} c\ x^{\alpha-1}\ e^{-\lambda x^\alpha} dx \underset{\substack{x' = x^\alpha \\ dx' = \alpha x^{\alpha-1}\ dx}}{=} \frac{c}{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x'} dx'$$

$$= \frac{c}{\alpha}\left[-\frac{1}{\lambda}\ e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{\lambda\alpha}$$

$\Rightarrow\ c = \lambda \cdot \alpha > 0$

$\Rightarrow\ h(x) >= 0 \quad \forall\ x$

$\Rightarrow\ h(x)$ ist eine Dichte, die Zugehörige Verteilungsfunktion ist:

$\Rightarrow F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x^\alpha}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

b) Normiere $g(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dx = \int_{-1}^{0} c\ x\ dx + \int_0^5 e^x\ dx = -\frac{c}{2} + e^5 - 1$$

$\Rightarrow\ c = 2e^5 - 4\ >\ 0 \Rightarrow\ g(x) < 0 \quad \forall\ -1 < x < 0$

$\Rightarrow\ g(x)$ ist keine Dichte

Aufgabe 18

Sei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen. Zeige die Symmertrieregel $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \underset{\substack{t' = -t \\ dt' = -dt}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}}dt'$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}}dt'\ - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}}dt' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}}dt'$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t'^2}{2}}dt' = 1 - \Phi(x)$$

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, es gilt $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, da

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{\frac{t'^2}{2}}dt' = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Gegeben: $\sigma = 10000$, $\mu = 1000$

a)

$$x = 11550:\ P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{11550 - 10000}{1000}\right) = \Phi(1.55) \approx 0.939$$

$$x = 7000:\ P(X \leq x) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) \approx 1.35 \cdot 10^{-3}$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(X > 10000 | X > 9500) &= \frac{P(X > 10000 \ \cap X \ \ > 9500)}{P(X > 9500)} = \frac{P(X > 10000)}{P(X > 9500)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 10000)}{1 - P(X \leq 9500)} = \frac{1 - \Phi(0)}{1 - \Phi(-0.5)} = \\
&\approx \frac{1 - 0.5}{0.691} \approx 0.723 \\
P(X > 11500 | X > 11000) &= \frac{P(X > 11500)}{P(X > 11000)} = \frac{1 - \Phi(1.5)}{1 - \Phi(1)} \approx \frac{1 - 0.933}{1 - 0.841} \approx 0.159
\end{aligned}
$$

c) Gesucht x, so dass $P(X \leq u) = 0.7$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \ u \approx 0.525 \\
&\Rightarrow \ 0.525 = \frac{x - \mu}{\sigma} \\
&\Rightarrow \ x = 0.525 \ \sigma + \mu = 10525
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

a) $X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \ \Rightarrow \ f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \ z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \ (1-p)^{n-k} \ z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (pz + 1 - p)^n
\end{aligned}
$$

b) $P(\{i\}) = p_i \geq 0 \ \forall \ i \in \mathbb{N}$, zeige noch die Normierungsbedingung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1
\end{aligned}
$$

Durch $P(\{i\})$ ist somit eine Zähldichte gegeben. Die zugehörige erzeugenden Funktion ist:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \ z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - \frac{1}{z} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - z \right) = -\ln(1-z) + \frac{\ln(1-z)}{z} + 1
\end{aligned}
$$

Teillösung 6. Übung

14. Juni 2002

Aufgabe 20

Zeige: $X1, \ldots, X_n$ s.u. $\Rightarrow$ $P(X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = t_i)$.
Zeige dazu

$$P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \leq t_j, \ldots X_n \leq t_n) = \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j}^{n} P(X_i \leq t_i),$$

für $j = 1, \ldots, n$. Für $j = n$ ergibt sich die Beauptung.
Der Beweis erfolgt per Induktion (ObdA sei der Träger $T = \mathbb{N}$).

IA: $j = 1,$ gilt nach Definition der stochastischen Unabhängigkeit.

IS: $j \to j + 1$

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = t_1, \ldots, X_j = t_j, X_{j+1} \leq t_{j+1}, \ldots, X_n \leq t_n) \\
=&P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \leq t_j, X_{j+1} \leq t_{j+1}, \ldots, X_n \leq t_n) \\
&- P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, \underbrace{X_j \leq t_j - 1}_{\Leftrightarrow\ X_j < t_j \text{ da } T=\mathbb{N}_0}, X_{j+1} \leq t_{j+1}, \ldots, X_n \leq t_n) \\
\overset{\text{IV}}{=}& \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \leq t_j) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i) \\
&- \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \leq t_j - 1) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i) \\
=& \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i) \Big(\underbrace{P(X_j \leq t_j) - P(X_j \leq t_j - 1)}_{=P(X_j = t_j)} \Big) \\
=& \prod_{i=1}^{j} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \leq t_i)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Zeige noch die Gegenrichtung:

$$P(X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n) = \sum_{\substack{s_i \in T_i :\ s_i \le t_i \\ i = 1, \ldots, n}} P(X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \sum_{s_i \le t_i} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = s_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{s_i \le t_i} P(X_i = s_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t_i) \quad \Rightarrow \quad \text{s.u.}$$

Aufgabe 21

$N \sim \text{Poi}(\lambda), \quad T \sim \text{Exp}(\mu)$

a) gesucht: $P(N < 4,\ T \le 50) \overset{\text{s.u.}}{=} P(N < 4)\ P(T \le 50)$

$$= \left(e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \left(1 - e^{-50\mu}\right)$$

$$\approx 0.104$$

b) gesucht: $P(N \le 12,\ NT \le 300) = \sum_{k=0}^{12} P(N = k,\ k \cdot T \le 300)$

$$= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{12} P\left(N = k,\ T \le \frac{300}{k}\right)$$

$$= P(N = 0) + \sum_{k=1}^{12} P(N = k) P\left(T \le \frac{300}{k}\right)$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{12} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - e^{-\frac{300\mu}{k}}\right)$$

$$\approx 0.497$$

Teillösung 7. Übung

27. Juni 2002

Aufgabe 24

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei die Folge der gemessenen Temperaturen, $T_i \sim \mathrm{N}(400, 9)$.

$$S = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; T_n \in (-\infty, 395] \cup (405, \infty)\right\}$$

ist die Erste Eintrittszeit, des über-/unterschreitens der vorgegebenen Temperaturspanne.

$$\begin{aligned}
&P(T_i \in (-\infty, 395] \cap (405, \infty)) = P(T_i \leq 395) + P(T_i \geq 405) \\
&\quad = P(T_i \leq 395) + 1 - P(T_i \leq 405) = \Phi\left(\frac{395-400}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{405-400}{3}\right) \\
&\quad = \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2 - 2\;\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.096
\end{aligned}$$

Es gilt $P(S = k) = (1-p)^{k-1}p$ mit $p = P(T_i \in (-\infty, 395] \cap (405, \infty))$

$$\Rightarrow \quad P(S > 10) = 1 - P(S \leq 10) = 1 - \sum_{i=1}^{10}(1-p)^k p = (1-p)^{10} \approx 0.425$$

Aufgabe 25 a)

$$X \sim \text{Rec}(0,1) \quad \Rightarrow \quad f_x(t) = \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in (0,1)$$

$Y = T(X)$ ist nicht standardnormalverteilt, da $T\big(\,(0,1)\,\big) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \neq (-\infty, \infty)$

T ist injektiv und stetig differenzierbar auf $(0,1)$, $T^{-1}(y) = \sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\,y\right)}$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x\, e^{-x^2} \neq 0 \quad \forall\, x > 0$$

$\Rightarrow$ Transformationssatz anwendbar:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X\left(T^{-1}(y)\right)}{\left|\det\left(\frac{dT}{dx}\right)\big|_{T^{-1}(y)}\right|} \mathbb{1}_{T((0,1))}(y) \\
&= \frac{f_X\left(\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\,y\right)}\right)}{\left| -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x\, e^{-x^2} \Big|_{\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\,y\right)}} \right|} \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y) \\
&= \frac{1}{2y\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\,y\right)}} \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 26

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Rec}(0,1)$, X, Y s.u.

Faltungsformel:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\; f_Y(z-t)\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\; e^{-\lambda t}\; \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\mathbb{1}_{[0,1]}(z-t)\; dt \\
&= \int_{\max\{0,z-1\}}^{z} \lambda\; e^{-\lambda t}\; dt\; \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) = -e^{-\lambda t}\Big|_{\max\{0,z-1\}}^{z}\; \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) \\
&= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq z \leq 1 \\ e^{-\lambda(z-1)} - e^{-\lambda z}, & z > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Teillösung 9. Übung

12. Juli 2002

Aufgabe 32

b)

$$X \sim \overline{\text{Bin}} = \underbrace{\text{Geo}(p) * \ldots * \text{Geo}(p)}_{n}$$

$$Y_i \sim \text{Geo}(p) \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{s.u.}, \quad X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\text{E}(X) = \text{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{E}\left(Y_i\right) = n\,\text{E}\left(Y_1\right) = \frac{n(1-p)}{p} =: n\frac{q}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \underset{\text{s.u.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}\left(Y_i\right) = n\,\text{Var}\left(Y_1\right)$$

Bezeichnung: $Y = Y_1$

$$\text{Var}(Y) = \text{E}(Y^2) - (\text{E}(Y))^2$$

$$\text{E}(Y^2) = \text{E}(Y(Y-1) + Y) = \text{E}(Y(Y-1)) + \text{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)q^k p + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{q}{p} = pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2} q^k + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \sum_{k=2}^{\infty} q^k + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \frac{q^2}{1-q} + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d}{dq} \frac{2q - q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{p} = 2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Var}(Y) = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Var}(X) = n\frac{1-p}{p^2}$$

c) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
Berechne die Laplace-Transformierte:

$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\, f(x)\, dx \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-(\lambda+s)x}\, dx \\
&\ \text{Substituiere: } (\lambda+s)x = y \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1} e^{-y}\, \frac{1}{\lambda+s}\, dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha \Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy}_{\Gamma(\alpha)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= -L^{'}(0) = -\left(\alpha\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1}\left(-\frac{\lambda}{(\lambda+s)^2}\right)\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha}{\lambda} \\
\mathrm{E}(X^2) &= L^{''}(0) = \left(-\alpha\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^{\alpha+1}}\right)^{'}\Bigg|_{s=0} \\
&= \left(-\alpha\lambda^\alpha(-\alpha-1)\frac{1}{(\lambda+s)^{\alpha+2}}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \\
&\Rightarrow\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-t}^t \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx \\
&= \left[\ln\frac{1}{2}(1+x^2)\right]_{-t}^t \\
&\Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x f_x(x)\, dx = 0 \\
\text{Aber} &: \ \mathrm{E}(|X|) = 2\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \infty \\
&\Rightarrow\ \text{Der Erwartungswert existiert nicht.} \\
&\Rightarrow\ \text{Die Varianz existiert ebenfalls nicht.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 33

a) X, Y absolut-stetig: siehe Skript.
X, Y diskret, mit Träger T_X, T_Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX + bY) &= \sum_{x \in T_X} \sum_{y \in T_Y} (ax + by) P(X = x, Y = y) \\
&= a \sum_{x \in T_X, y \in T_Y} x\, P(X = x, Y = y) + b \sum_{x \in T_X, y \in T_Y} y\, P(X = x, Y = y) \\
&= a \sum_{x \in T_X} x\, P(X = x) + b \sum_{y \in T_Y} y\, P(Y = y) \\
&= a\, \mathrm{E}(X) + b\, \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

b) $X \leq Y \quad \Rightarrow \quad Y - X \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}(Y - X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{X \in T_X, Y \in T_Y} (y - x) P(X = x, Y = y) \ \geq \ 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f_{(X,Y)}(x, y) \ \geq \ 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{mit a)}}{\Rightarrow} \quad \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(Y) \geq E(X).$$

Teillösung 11. Übung

18. Juli 2002

Aufgabe 39

$X \sim \mathrm{N}(\Theta, \sigma^2)$

$\Theta \sim \mathrm{N}(\mu, \tau^2)$ sei die a-priori-Verteilung

$$\Rightarrow \quad f_\Theta(\Theta) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\Theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right), \quad f_{x|\Theta}(x|\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\Theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Theta|x}(\Theta|x) = \frac{f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta)}{\int f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta) d\Theta}$$

es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\Theta)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\Theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\tau^2(x^2 - 2\Theta x + \Theta^2) + \sigma^2(\Theta^2 - 2\Theta\mu + \mu^2)}{2\tau^2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{(\tau^2+\sigma^2)\Theta^2 - \Theta(2\tau^2 x + 2\sigma^2\mu) + x^2\tau^2 + \mu^2\sigma^2)}{2\tau^2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\left(\Theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2 + g(x,\tau,\mu,\alpha)}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

Der Term $g(x, \tau, \mu, \alpha)$ ist nicht von Θ abhängig.

$\displaystyle\int f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta) d\Theta$ normiert $f_{\Theta|x}(\Theta|x)$, somit gilt

$$f_{\Theta|x}(\Theta|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{\left(\Theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)$$

Die Verteilung von Θ unter $X = x$ ist somit eine

$\mathrm{N}\left(\dfrac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \dfrac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu, \sqrt{\dfrac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)$-Verteilung

Somit gilt, Bayes-Schätzer $\mathrm{E}(\Theta) = \dfrac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \dfrac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu.$