

1. Zusatzübung zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 1

Beim dreimaligen Wurf eines fairen Würfels bezeichne A_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$) das Ereignis, daß im i -ten Wurf die gleiche Augenzahl wie im j -ten Wurf gewürfelt wird.

- Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung dieses Zufallsexperiments an, und bestimmen Sie $P(A_{ij})$ ($1 \leq i < j \leq 3$).
- Zeigen Sie, daß die Ereignisse $\{A_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 3\}$ paarweise stochastisch unabhängig, aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2

Ein Mann besitzt fünf Münzen, davon haben zwei auf beiden Seiten einen „Kopf“, eine hat auf beiden Seiten eine „Zahl“, und die beiden letzten haben jeweils einen „Kopf“ und eine „Zahl“ auf ihren Seiten.

- Der Mann zieht mit geschlossenen Augen eine Münze und wirft sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein „Kopf“ oben?
- Der Mann öffnet die Augen und sieht, daß ein „Kopf“ oben liegt. Mit welcher (bedingten) Wahrscheinlichkeit liegt ein „Kopf“ auf der unteren Seite der Münze?
- Der Mann schließt die Augen wieder und wirft die Münze nochmals. Wie groß ist nun die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß auf der unteren Seite ein „Kopf“ liegt?
- Er öffnet die Augen und sieht, daß ein „Kopf“ oben liegt. Wie groß ist nun die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, daß auf der unteren Seite ein „Kopf“ liegt?

Aufgabe 3

Fluggesellschaften haben festgestellt, daß Passagiere, die einen Flug reserviert haben, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit $1/10$ nicht am Check-in erscheinen. Deshalb verkauft Gesellschaft A zehn Tickets für ihre neun-sitzigen Flugzeuge und Gesellschaft B 20 Tickets für ihre Flugzeuge mit 18 Sitzen. Welche Gesellschaft ist mit höherer Wahrscheinlichkeit überbucht?

Aufgabe 4

Wir werfen n Münzen, die unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ zeigen. Anschließend werfen wir alle Münzen, die im ersten Wurf „Kopf“ gezeigt haben ein zweites Mal. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der Münzen, die im zweiten Wurf „Kopf“ zeigen.

Aufgabe 5

Es seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\mu)$. Bestimmen Sie eine Dichte der Verteilung von $X + Y$.