

## 6. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 20

$X_1, \dots, X_n$  seien diskrete Zufallsvariablen mit Trägern  $T_1, \dots, T_n$ . Beweisen Sie Lemma 4.10 der Vorlesung:

$X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängig

$$\Leftrightarrow P(X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = t_i) \quad \forall t_i \in T_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

### Aufgabe 21

Bei einem Rechnernetzwerk werden die Anzahl der aktiven Benutzer und die mittlere Nutzungsdauer durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen  $N$  und  $T$  beschrieben, wobei  $N$  poissonverteilt ist mit Parameter  $\lambda = 5$  und  $T$  exponentialverteilt mit Parameter  $\mu = 0,01$ .

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 4 Benutzer aktiv sind und die mittlere Nutzungsdauer kürzer als 50 Zeiteinheiten ist.
- Im Netzwerk entstehen keine Wartezeiten, wenn  $N \leq 12$  und  $NT \leq 300$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

### Aufgabe 22

Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wie muß  $c \in \mathbb{R}$  gewählt werden, damit  $f$  die Dichte eines Zufallsvektors  $(X, Y)$  ist? Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion  $F_{(X,Y)}$  sowie die Dichten und Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . (Die Verteilung von  $X$  bzw.  $Y$  heißt Randverteilung.) Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig?

### Aufgabe 23

Ein Programm besteht aus zwei Algorithmen mit Laufzeiten  $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$  und  $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .  $X_1$  und  $X_2$  können als stochastisch unabhängig angenommen werden.

- Bestimmen Sie eine (gemeinsame) Dichte von  $(X_1, X_2)$ .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Laufzeit des Programms kleiner oder gleich 1 ist, wenn
  - beide Algorithmen auf einem Prozessor nacheinander ausgeführt werden,
  - beide Algorithmen gleichzeitig auf zwei Prozessoren ausgeführt werden und das Programm beendet ist, wenn beide Ergebnisse vorliegen,
  - beide Algorithmen gleichzeitig auf zwei Prozessoren ausgeführt werden und das Programm schon beendet wird, wenn nur ein Ergebnis vorliegt.