Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 02.05.02
bis 15:45 Uhr

1. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

Bei einem Kartenspiel mit 52 Karten werden an jeden der vier Spieler (A, B, C und D) 13 Karten ausgegeben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) Spieler A alle Karten der Farbe Herz, B alle der Farbe Karo, C alle der Farbe Pik und D alle der Farbe Kreuz bekommt,

b) Spieler A genau ein Ass bekommt,

c) Spieler A weniger als fünf schwarze Karten bekommt.

Aufgabe 2

In einem Netzwerk befinden sich n Drucker, die durchnummeriert sind von 1 bis n. m Druckaufträge mit den Nummern 1 bis m werden zufällig gemäß einer diskreten Gleichverteilung an die Drucker verteilt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Drucker 1 den Auftrag mit der Nummer 1?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Drucker 1 keinen Auftrag?

c) Es kommen nun $m = n$ Druckaufträge an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt genau ein Drucker keinen Auftrag?

Aufgabe 3 (k)

$A, B \in \mathfrak{A}$ seien Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Zeigen Sie:

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B).$$

Aufgabe 4

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$.
Zeigen Sie (s. Lemma 2.11 der Vorlesung)

a) $P(A^C) = 1 - P(A)$,

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

c) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

d) $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

e) $\{A_n\}$ absteigend $\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 08.05.02
bis 09:45 Uhr

2. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 5

Betrachten Sie ein Netzwerk mit n Druckern und m Druckaufträgen, die gemäß einer diskreten Gleichverteilung auf die Drucker zufällig verteilt werden (siehe Aufgabe 2).

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten $k \leq n$ vorher festgelegte Drucker keinen Auftrag?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält jeder Drucker mindestens einen Auftrag?
Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus a) und die Siebformel von Poincaré-Sylvester.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen genau $k \leq n$ Drucker keinen Auftrag?

Aufgabe 6 (k)

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ seien Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie die folgende Ungleichung:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$$

Aufgabe 7

Ω und I seien nichtleere Mengen und $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren über Ω.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ebenfalls eine σ-Algebra über Ω ist.
(s. Lemma 2.8 der Vorlesung)

b) Ist $\mathfrak{B} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ stets eine σ-Algebra?

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 16.05.02
bis 15:45 Uhr

3. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 8

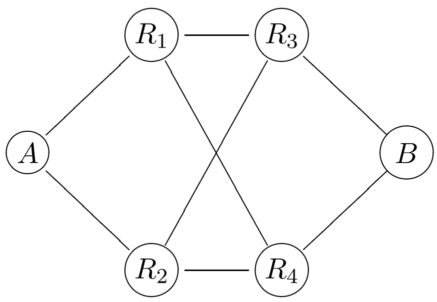
Ein Chiphersteller hat drei Werke A, B und C, die jeweils 35%, 15% und 50% der Gesamtproduktion herstellen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein produzierter Chip nicht defekt ist, sei 0,75 bei Fabrik A, 0,95 bei Fabrik B und 0,85 bei Fabrik C. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein beliebiger Chip defekt?
Ein Kunde erhält einen defekten Chip. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kam dieser aus Fabrik C?

Aufgabe 9

Über eine Funkverbindung werden binäre Daten übertragen. Mit Wahrscheinlichkeit ε wird ein einzelnes Bit fehlerhaft übertragen, d.h. beim Senden einer 0 wird eine 1 empfangen, bzw. beim Senden einer 1 wird eine 0 empfangen. Mit Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon$ ist die Übertragung fehlerfrei. Eine 1 werde mit Wahrscheinlichkeit p und eine 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ gesendet.
a) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 0 gesendet wurde, wenn eine 0 empfangen wird.
b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1 gesendet wurde, wenn eine 0 empfangen wird.
c) Sei $p = 0{,}5$. Für welches ε ist die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu empfangen, unabhängig von der Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 gesendet wurde? (Was bedeutet dieses für Übertragungen über die Funkverbindung?)

Aufgabe 10 (k)

Bei dem folgenden Netzwerk seien die Router R_1, R_2, R_3, R_4 unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit p_i intakt und mit Wahrscheinlichkeit $1-p_i$ defekt, $0 < p_i < 1$, $1 \le i \le 4$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von A nach B eine intakte Verbindung hergestellt werden kann.



Aufgabe 11

Eine faire Münze werde unendlich oft geworfen, wobei die Ergebnisse der einzelnen Würfe gemeinsam stochastisch unabhängig seien.

a) Zeigen Sie, dass jede endliche Sequenz aus „Kopf“ und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit 1 in der Münzwurffolge auftritt.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige endliche Sequenz sogar unendlich oft auftritt?

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 29.05.02
bis 09:45 Uhr

4. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 12

Es seien $\lambda > 0$ und $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

gilt.

Aufgabe 13

In einem paketorientierten Netzwerk kommt ein einzelnes Datenpaket mit Wahrscheinlichkeit p fehlerfrei beim Empfänger an. Die Übertragung verschiedener Pakete kann als stochastisch unabhängig angesehen werden. Wenn in einem Paket ein Fehler auftritt, wird die Übertragung wiederholt, solange bis das Paket fehlerfrei angekommen ist.

a) Die Zufallsvariable X beschreibe wie oft ein einzelnes Paket gesendet werden muss, bis es ohne Fehler empfangen wird.Wie ist X verteilt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keine und mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 Wiederholungen der Übertragung nötig? Wie groß muss p mindestens sein, so dass mit Wahrscheinlichkeit 0.99 höchstens drei erneute Übertragungen pro Paket nötig sind?

b) Um zu verhindern, dass ein einzelnes wiederholt übertragenes Paket das ganze Netz blockiert, wird in einem anderen Netzwerk maximal 10 mal versucht, ein Paket zu übertragen. Wie sieht die Verteilung der Zufallsvariablen Y in diesem System aus, die die Anzahl der Übertragungsversuche beschreibt?

c) Eine Datei, die übertragen werden soll, besteht aus 1000 Paketen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen mehr als drei Pakete mehrfach übertragen werden, falls $p = 10^{-4}$ ist?

Hinweis: Beantworten Sie Teil **c)** approximativ.

Aufgabe 14

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

a) $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P(X \le x) \end{cases}$ ist eine Verteilungsfunktion (siehe Satz 3.9),

b) $P^X = P^Y \Rightarrow F_X = F_Y$ (einfache Richtung von Satz 3.10).

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

Aufgabe 15

Die Dauer eines Telefongesprächs (in Sekunden) sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0,01$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch

1. mehr als 100 Sekunden,
2. zwischen 25 und 300 Sekunden bzw.
3. höchstens 150 Sekunden

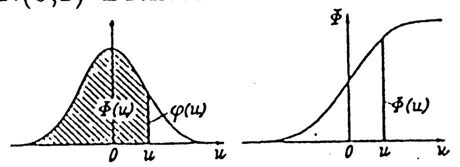
dauert.

b) Bestimmen Sie den Median der Gesprächsdauer.

c) Bestimmen Sie ein Zeitintervall $(u_1, u_2]$, $0 \leq u_1 < u_2$, kürzester Länge $u = u_2 - u_1$, so dass die Dauer eines Gesprächs mit Wahrscheinlichkeit 0,9 in diesem Intervall liegt.

Verteilungsfunktion der Standard–Normalverteilung N(0,1)

N(0,1)–Dichtefkt.



$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2}\,dt; \qquad \Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776\,373$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	,539828	,543795	,547758	,551717	,555670	,559618	,563559	,567495	,571424	,575345	0,1
0,2	,579260	,583166	,587064	,590954	,594835	,598706	,602568	,606420	,610261	,614092	0,2
0,3	,617911	,621720	,625516	,629300	,633072	,636831	,640576	,644309	,648027	,651732	0,3
0,4	,655422	,659097	,662757	,666402	,670031	,673645	,677242	,680822	,684386	,687933	0,4
0,5	,691462	,694974	,698468	,701944	,705401	,708840	,712260	,715661	,719043	,722405	0,5
0,6	,725747	,729069	,732371	,735653	,738914	,742154	,745373	,748571	,751748	,754903	0,6
0,7	,758036	,761148	,764238	,767305	,770350	,773373	,776373	,779350	,782305	,785236	0,7
0,8	,788145	,791030	,793892	,796731	,799546	,802337	,805105	,807850	,810570	,813267	0,8
0,9	,815940	,818589	,821214	,823814	,826391	,828944	,831472	,833977	,836457	,838913	0,9
1,0	,841345	,843752	,846136	,848495	,850830	,853141	,855428	,857690	,859929	,862143	1,0
1,1	,864334	,866500	,868643	,870762	,872857	,874928	,876976	,879000	,881000	,882977	1,1
1,2	,884930	,886861	,888768	,890651	,892512	,894350	,896165	,897958	,899727	,901475	1,2
1,3	,903200	,904902	,906582	,908241	,909877	,911492	,913085	,914657	,916207	,917736	1,3
1,4	,919243	,920730	,922196	,923641	,925066	,926471	,927855	,929219	,930563	,931888	1,4
1,5	,933193	,934478	,935745	,936992	,938220	,939429	,940620	,941792	,942947	,944083	1,5
1,6	,945201	,946301	,947384	,948449	,949497	,950529	,951543	,952540	,953521	,954486	1,6
1,7	,955435	,956367	,957284	,958185	,959070	,959941	,960796	,961636	,962462	,963273	1,7
1,8	,964070	,964852	,965620	,966375	,967116	,967843	,968557	,969258	,969946	,970621	1,8
1,9	,971283	,971933	,972571	,973197	,973810	,974412	,975002	,975581	,976148	,976705	1,9
2,0	,977250	,977784	,978308	,978822	,979325	,979818	,980301	,980774	,981237	,981691	2,0
2,1	,982136	,982571	,982997	,983414	,983823	,984222	,984614	,984997	,985371	,985738	2,1
2,2	,986097	,986447	,986791	,987126	,987455	,987776	,988089	,988396	,988696	,988989	2,2
2,3	,989276	,989556	,989830	,990097	,990358	,990613	,990863	,991106	,991344	,991576	2,3
2,4	,991802	,992024	,992240	,992451	,992656	,992857	,993053	,993244	,993431	,993613	2,4
2,5	,993790	,993963	,994132	,994297	,994457	,994614	,994766	,994915	,995060	,995201	2,5
2,6	,995339	,995473	,995604	,995731	,995855	,995975	,996093	,996207	,996319	,996427	2,6
2,7	,996533	,996636	,996736	,996833	,996928	,997020	,997110	,997197	,997282	,997365	2,7
2,8	,997445	,997523	,997599	,997673	,997744	,997814	,997882	,997948	,998012	,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

u	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	u
$\Phi(u)$	$1 - 1{,}350 \cdot 10^{-3}$	$1 - 2{,}326 \cdot 10^{-4}$	$1 - 3{,}167 \cdot 10^{-5}$	$1 - 3{,}398 \cdot 10^{-6}$	$1 - 2{,}867 \cdot 10^{-7}$	$1 - 9{,}866 \cdot 10^{-10}$	$1 - 1{,}280 \cdot 10^{-12}$	$1 - 6{,}221 \cdot 10^{-16}$	$1 - 1{,}129 \cdot 10^{-19}$	$1 - 7{,}620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(u)$

$\Phi(u)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(u)$
u	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	u

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 06.06.02
bis 15:45 Uhr

5. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 16

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilung einer Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$, mit $X \geq 0$, heißt *gedächtnislos*, wenn

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$$

für alle $x, y \geq 0$.
Bestimmen Sie alle gedächtnislosen Verteilungen mit stetiger Verteilungsfunktion.
Hinweis: Die Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x)f(y), x, y \geq 0$, hat für stetiges f außer der Nullfunktion nur Lösungen der Form $e^{ax}, a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 17

Berechnen Sie, wenn möglich, einen Parameter c, so dass die folgenden Funktionen eine Dichte beschreiben und geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an.
a)

$$h(x) = c\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x^{\alpha}}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \quad \text{mit Parametern } \alpha, \lambda > 0$$

b)

$$g(x) := \begin{cases} cx, & \text{für } \; -1 \leq x < 0, \\ \exp(x), & \text{für } \; 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 18

Bei einem Internetprovider wurde festgestellt, dass die Zeit bis zum Ausfall eines stark belasteten Servers (in Stunden) modelliert werden kann durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern $\mu = 10000$ und $\sigma = 1000$.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein Rechner innerhalb der ersten 11550 Stunden, mit welcher Wahrschenlichkeit schon innerhalb der ersten 7000 Stunden aus?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft ein Rechner noch mindestens 500 Stunden, wenn er bereits 9500 bzw. 11000 Stunden in Betrieb ist?
c) Innerhalb welcher Zeit fällt der Server mit Wahrscheinlichkeit 0.7 aus?
Hinweis: Nutzen Sie die Verteilungstabelle auf der Rückseite dieses Blattes. Zeigen Sie, dass für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung die Symmetrieregel $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ gilt.

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 06.06.02
bis 15:45 Uhr

Aufgabe 19

a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Binomialverteilung mit den Parametern n und p.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$P(\{i\}) = \frac{1}{i(i+1)},\ i \in \mathbb{N},$$

eine Zähldichte gegeben ist, und bestimmen Sie die zugehörige erzeugende Funktion G.

Bemerkung: Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt *Yuleverteilung.*
Hinweis: Für $|z| \leq 1$ gilt

$$-\ln(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 13.06.02
bis 15:45 Uhr

6. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 20

$X_1, \dots, X_n$ seien diskrete Zufallsvariablen mit Trägern $T_1, \dots, T_n$. Beweisen Sie Lemma 4.10 der Vorlesung:
$X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig

$$\Leftrightarrow \; P(X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = t_i) \qquad \forall\, t_i \in T_i, \quad 1 \le i \le n.$$

Aufgabe 21

Bei einem Rechnernetzwerk werden die Anzahl der aktiven Benutzer und die mittlere Nutzungsdauer durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen N und T beschrieben, wobei N poissonverteilt ist mit Parameter $\lambda = 5$ und T exponentialverteilt mit Parameter $\mu = 0,01$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 4 Benutzer aktiv sind und die mittlere Nutzungsdauer kürzer als 50 Zeiteinheiten ist.

b) Im Netzwerk entstehen keine Wartezeiten, wenn $N \le 12$ und $NT \le 300$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

Aufgabe 22

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wie muß $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f die Dichte eines Zufallsvektors (X,Y) ist? Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_{(X,Y)}$ sowie die Dichten und Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y. (Die Verteilung von X bzw. Y heißt Randverteilung.) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 23

Ein Programm besteht aus zwei Algorithmen mit Laufzeiten $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. X_1 und X_2 können als stochastisch unabhängig angenommen werden.

a) Bestimmen Sie eine (gemeinsame) Dichte von (X_1, X_2).

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Laufzeit des Programms kleiner oder gleich 1 ist, wenn
i) beide Algorithmen auf einem Prozessor nacheinander ausgeführt werden,
ii) beide Algorithmen gleichzeitig auf zwei Prozessoren ausgeführt werden und das Programm beendet ist, wenn beide Ergebnisse vorliegen,
iii) beide Algorithmen gleichzeitig auf zwei Prozessoren ausgeführt werden und das Programm schon beendet wird, wenn nur ein Ergebnis vorliegt.

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 20.06.02
bis 09:45 Uhr

7. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 24

Bei einem chemischen Prozeß wird am Ende jeden Tages die Temperatur geprüft. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Temperaturen [in °C] durch stochastisch unabhängige, $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable beschrieben werden können, wobei $\mu = 400$ und $\sigma^2 = 9$ sind. Der Prozess muss gestoppt werden, wenn die Temperatur zumm Tagesende 395°C unter- oder 405°C überschreitet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess mindestens 10 Tage hintereinander läuft.

Aufgabe 25

a) Ein Zufallszahlengenerator auf einem Computer liefert auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallszahlen, $X \sim R(0, 1)$. Für eine Simulation werden standardnormalverteilte Zufallszahlen benötigt, die aus den gleichverteilten Zufallsvariablen berechnet werden sollen.
Ist eine Zufallszahl $Y := \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-X^2}$ standardnormalverteilt?
Wie sieht die Dichtefunktion von Y aus?

b) Zeigen Sie, dass Sie aus zwei stochastisch unabhängigen gleichverteilten Zufallszahlen $X_1, X_2 \sim R(0, 1)$ durch die Transformation

$$Y_1 = \sqrt{-2 \ln X_1}\, \sin(2\pi X_2)$$
$$Y_2 = \sqrt{-2 \ln X_1}\, \cos(2\pi X_2)$$

zwei standardnormalverteile, stochastisch unabhängige Zufallszahlen $Y_1, Y_2 \sim N(0, 1)$ erhalten (*Box/Muller* Verfahren (1958)).

Aufgabe 26 (k)

Es seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim R(0, 1)$. Bestimmen Sie eine Dichte der Verteilung von $X + Y$.

Aufgabe 27 (k)

Die Zwischenankunftszeiten von Druckjobs in der Warteschlange eines Druckers seien $\text{Erl}(2, \lambda)$-verteilt, $\lambda > 0$ (Erlang-verteilt mit Parametern 2 und λ). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bis zu einer fest vorgegebenen Zeit $t > 0$ genau k Druckjobs angekommen sind. Welche Werte ergeben sich für $\lambda = 1, t = 1$ und $k \in \{0, 2, 4\}$?
Hinweis: Beachten Sie, dass $\text{Erl}(2, \lambda) = \text{Exp}(\lambda) * \text{Exp}(\lambda)$, und benutzen Sie Eigenschaften des Poissonprozesses.

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 27.06.02
bis 15:45 Uhr

8. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 28

X_1 und X_2 seien stochastisch unabhängige, diskrete Zufallsvariablen mit Träger $\mathbb{N}_0$ und Zähldichte f_{X_1} und f_{X_2}. Zeigen Sie, dass X_1+X_2 die Zähldichte

$$f_{X_1+X_2}(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) f_{X_2}(k-i), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

hat.

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die Zähldichten der folgenden Verteilungen:

a) $\mathrm{Bin}(n_1, p) * \mathrm{Bin}(n_2, p), \; n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \; 0 \le p \le 1,$

b) $\mathrm{Poi}(\lambda_1) * \mathrm{Poi}(\lambda_2), \; \lambda_1, \lambda_2 > 0,$

c) $\overline{\mathrm{Bin}}(n_1, p) * \overline{\mathrm{Bin}}(n_2, p), \; n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \; 0 < p < 1.$

Aufgabe 30

Die Laufzeit eines Algorithmus werde durch eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable X beschrieben. Der verfügbare Anteil an Rechenzeit des Prozessors, auf dem der Algorithmus läuft, kann durch eine $\mathrm{R}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable Y modelliert werden, wobei X und Y stochastisch unabhängig sind. Berechnen Sie die Verteilung der effektiven Laufzeit $Z = \frac{X}{Y}$.
Existiert der Erwartungswert von Z? Berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

Aufgabe 31 (k)

X und Y seien stochastisch unabhängige, jeweils $\mathrm{R}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie die Verteilung von $Z = \max\{X, Y\}$.

b) Berechnen Sie ferner $E[\max\{X, Y\}]$ und $\max\{\mathrm{E}[X], \mathrm{E}[Y]\}$. Stimmen beide Terme überein?

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 04.07.02
bis 15:45 Uhr

9. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 32

Bestimmen Sie – falls existent – den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X für

- **a)** $X \sim \text{Poi}(\lambda)$,
- **b)** $X \sim \overline{\text{Bin}}(n, p)$,
- **c)** $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$,
- **d)** X cauchyverteilt, d.h. f_X definiert durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, x \in \mathbb{R},$$

ist eine Dichte der Verteilung von X.

Hinweis: Lösen Sie Teilaufgabe **c)** mit Hilfe der Laplace-Transformierten.

Aufgabe 33

Zeigen Sie für absolut-stetige und für diskrete Zufallsvariablen X, Y die folgenden Eigenschaften des Erwartungswertes (siehe Satz 6.6):

- **a)** $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$
- **b)** $X \leq Y \;\Rightarrow\; E[X] \leq E[Y]$.

Aufgabe 34

Bei einem Mobiltelefontarif wird die Gesprächsminute mit c Cent berechnet. Die erste Minute wird immer voll berechnet, nach der ersten Minute wird zeitgenau abgerechnet. Die Gesprächsdauer sei eine $\text{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsgröße. Die Zufallsvariable K bezeichne die Kosten eines Gesprächs.

- **a)** Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von K und K^2.
- **b)** Berechnen Sie $\text{E}(K)$ und $\text{Var}(K)$.

Aufgabe 35 (k)

Die Zufallsvariablen X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, seien rekursiv definiert durch

$$X_{n+1} = 2X_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner gelte $X_0 \sim \mathbb{R}(0, 1)$.
Berechnen Sie $\text{Cov}(X_{n+k}, X_n)$, $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Prof. Dr. R. Mathar
Daniel Catrein

RWTH Aachen, SS 2002
Abgabe: 11.07.02
bis 15:45 Uhr

10. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

Aufgabe 36 (k)

Eine Münze, bei der Kopf mit Wahrscheinlichkeit p fällt, werde n-mal unabhängig geworfen. K bezeichne hierbei die Anzahl des Auftretens von Kopf. In einer zweiten unabhängigen Serie der Länge K mit der selben Münze erhält ein Spieler bei Auftreten von Kopf im i-ten Wurf einen Gewinn von i DM, $i = 1, \ldots, K$. Welcher Einsatz macht das oben beschriebene Spiel fair?
Hinweis: Ein Spiel heißt fair, wenn der erwartete Gewinn null ist.

Aufgabe 37

Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 6xy(2 - x - y)\mathbb{1}_{(0,1)^2}(x, y).$$

Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von X bei gegebenem $Y = y$, $0 < y < 1$.

Aufgabe 38

Die Anzahl von Schadensfällen pro Jahr bei einer Versicherung werde beschrieben durch eine diskrete Verteilung N mit Träger $\mathbb{N}_0$. Die stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ bezeichnen die jeweilige Schadenshöhe, wobei die $X_1, X_2, \ldots$ auch von N unabhängig sind.
Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtschadenshöhe gilt:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= E[N]E[X_1], \\ \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E[N]\operatorname{Var}(X_1) + (E[X_1])^2 \operatorname{Var}(N), \end{aligned}$$

wobei gilt $\sum_{i=1}^{0} z_i := 0$.