Prof. Dr. R. Mathar

Prof. Dr. O. Krafft

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	6	4	7	5	6	6	6	44

Einführung in die Stochastik

Prüfungsklausur für Informatiker

Donnerstag, den 25. Juli 2002, 9 – 11 Uhr

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ________________

Fachrichtung: ____

Anschrift: ____

Bitte beachten Sie Folgendes:

1) Die Klausur besteht aus **8 Aufgaben**. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars nach.

Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt. Das Entfernen der Heftklammern ist **nicht** erlaubt.

2) Die Klausur ist mit mindestens **16 Punkten** bestanden.

3) Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben kann beliebig gewählt werden. Die Lösung der Aufgaben soll so erfolgen, dass der Lösungsweg deutlich erkennbar ist.

4) Zugelassene Hilfsmittel: Mit der Klausur ausgeteilte Hilfsblätter und nicht programmierbare Taschenrechner.

5) Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich am Montag, den 29.07.2002, ab 12 Uhr am Anschlagbrett des Instituts für Statistik, Wüllnerstr. 3, bekanntgegeben.

Die korrigierten Klausuren können am Mittwoch, den 21.08.2002, von 9:00 Uhr bis 10:30 Uhr im Seminargebäude, Raum SG12, eingesehen werden.

Kenntnis genommen: ______________________________

(Unterschrift)

Aufgabe 1 4 Punkte

A, B, C seien gemeinsam stochastisch unabhängige Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Zeigen Sie:

$(A \cap C)$ und $(B \cap C)$ sind stochastisch unabhängig genau dann, wenn $P(C) = 0$ oder $P(C) = 1$.

Aufgabe 2 6 Punkte

Eine Firma hat Internetanbindungen über drei Provider A, B und C. Provider A garantiert, daß 95% der über ihn gesendeten Pakete ihr Ziel erreichen, Provider B gibt diese Garantie für 90% und Provider C für 92% der Pakete. 45% aller Pakete werden über Provider A, 30% über Provider B und 25% über Provider C gesendet.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht ein beliebiges gesendetes Paket sein Ziel, falls die Angaben aller drei Provider korrekt sind?

b) Es wird vermutet, daß A die garantierte Erreichbarkeit nicht erzielt. Eine Messung ergibt, daß 40% der empfangenen Pakete von A gesendet wurden. Welcher Anteil der über A gesendeten Pakete erreicht somit sein Ziel, vorausgesetzt, daß die Angaben der Provider B und C korrekt sind?

Aufgabe 3 4 Punkte

Fluggesellschaften haben festgestellt, daß Passagiere, die einen Flug gebucht haben, unabhängig von den anderen Passagieren mit Wahrscheinlichkeit 1/10 nicht am Check-in erscheinen. Ist die Wahrscheinlichkeit für eine höchstens 90%-ige Auslastung für ein 10-sitziges oder für ein 20-sitziges Flugzeug größer, wenn ursprünglich alle Plätze gebucht waren?

Verwenden Sie nötigenfalls Werte aus der folgenden Tabelle.

0.9^9	0.9^{10}	0.9^{11}	0.9^{18}	0.9^{19}	0.9^{20}
0.3874	0.3487	0.3138	0.1501	0.1351	0.1216

Aufgabe 4 7 Punkte

X sei eine absolut-stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^3, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Es gelte $\mathrm{E}(X) = 0.1$.

(i) Bestimmen Sie die Konstanten a und b.

(ii) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(iii) Bestimmen Sie $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$.

b) Existieren Konstanten a und b so, daß $\mathrm{E}(X) = 1$?

Aufgabe 5 5 Punkte

$X_1, \ldots, X_{10}$ seien stochastisch unabhängige, jeweils $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen.
$Y = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$ bezeichne das arithmetische Mittel.
Für die Werte $\mu = 5$, $\sigma^2 = 2.5$ berechne man

a) $P\big(4 \leq Y \leq 5.5,\ 4.5 \leq Y \leq 6\big)$,

b) $P\left(-0.25 \leq \frac{5-Y}{2} \leq 0.25\right)$.

Aufgabe 6 6 Punkte

Ein symmetrischer Würfel wird einmal geworfen, K bezeichne die hierbei erzielte zufällige Augenzahl. Anschließend wird eine Münze, bei der die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Kopf p beträgt, K-mal in unabhängigen Versuchen geworfen. X bezeichne die Anzahl des Auftretens von Kopf in dieser Münzwurfserie der (zufälligen) Länge K.

Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$ und die Varianz $\mathrm{V}(X)$. Welche Werte ergeben sich für $p = 1/2$?

Aufgabe 7 6 Punkte

Bei einem durch die Zufallsvariable Z beschriebenen Experiment ergeben sich die Zahlen 0, 1, 2, 3 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten

k	0	1	2	3
$P(Z = k)$	1/2	1/4	1/8	1/8

(X_1, X_2) bezeichne die Komponenten der (zweistelligen) Binärentwicklung von Z (z. Bsp. $1 = (0,1)$).
Berechnen Sie $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$, $\mathrm{V}(X_1)$, $\mathrm{V}(X_2)$ und $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Aufgabe 8 6 Punkte

Die Laufzeiten in Millisekunden von Paketen in einem Netzwerk können durch stochastisch unabhängige, jeweils mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben werden. $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ bezeichne das Minimum der Laufzeiten.

a) Bestimmen Sie die Zahl b (in Abhängigkeit von n und α) so, daß

$$[b \cdot Y, \infty)$$

ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für den Erwartungswert der Laufzeit bildet.

b) Bei 10 Messungen betrug die minimale Laufzeit 1.183 Millisekunden. Welchen Wert hat dann die untere Grenze des Konfidenzintervalls für $\alpha = 0.1$?