Studentische Mitschrift der

Musterlösungen EidS für Informatiker SS 2002

Fehler bitte an eids@stefanhirschmeier.de

Stefan Hirschmeier

25.7.2002

Aufgabe 1

(a) A erhält alle Herz, B alle Karo, C alle Pik, D alle Kreuz

$\Omega_{II} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in A^n \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$

mit $A = \{1, 2, ..., 52\}$

Karten 1-13 Herz, 14-26 Karo, 27-39 Pik, 40-52 Kreuz

$|\Omega_{II}| = \frac{N!}{(N-n)!} = 52!$

$A_{II} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{52}) \in \Omega_{II} \mid \omega_1, ..., \omega_{13} \leq 13 \leq \omega_{14}, ..., \omega_{26} \leq 26 \leq$

$\omega_{27}, ..., \omega_{39} \leq 39 \leq \omega_{40}, ..., \omega_{52} \leq 52\}$

$|A_{II}| = 13!13!13!13! = (13!)^4$

$\Rightarrow P(A_{II}) = \frac{(13!)^4}{52!} \approx 1,86 \cdot 10^{-29}$

(b) Spieler A bekommt genau ein Ass

$\Omega_{III} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{13}) \in A^{13} \mid \omega_1 < \omega_2 < ... < \omega_{13}\}$

mit $A = \{1, 2, ..., 52\}$, Asse haben die Nummern 1,2,3,4

$|\Omega_{III}| = \binom{N}{n} = \binom{52}{13}$

$A_{III} = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{13}) \in \Omega_{III} \mid \omega_1 \in \{1, 2, 3, 4\}, \omega_2, ..., \omega_{13} \notin \{1, 2, 3, 4\}\}$

$|A_{III}| = \binom{4}{1}\binom{48}{12}$

$P(A_{III}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \approx 0,44$

(c) Spieler A bekommt weniger als 5 schwarze Karten

Schwarze Karten $S = \{1, 2, ..., 26\}$ $\qquad \Omega = \Omega_{b)}$

$A_i = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{13}) \in \Omega_{III} \mid \omega_i \leq 26, \omega_{i+1} > 26\} \hat{=}$ genau i schwarze Karten

$|A_i| = \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}$

$A = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_4$

$|A| = |A_0| + ... + |A_4| = \sum_{i=0}^{4} \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}$

$P(A) = \frac{\sum_{i=0}^{4} \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}}{\binom{52}{13}} \approx 0,1$

Aufgabe 2

(a) $\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_m \mid \omega_i \in \{1, ..., n\} \forall 1 \leq i \leq m\} \qquad n, m \in \mathbb{N}$

$\omega_i = j \;\; \widehat{=}$ i-ter Druckauftrag wird von Drucker j bearbeitet

$|\Omega| = n^m$

$A = \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega \mid \omega_1 = 1\}$

$|A| = n^{m-1}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n^{m-1}}{n^m} = \frac{1}{n}$

(b) Ω wie in a)

$A = \{(\omega_1, ..., \omega_m) \in \Omega \mid \omega_i \neq 1 \forall i \in \{1, ..., m\}\}$

$|A| = (n-1)^m$

$P(A) = \frac{(n-1)^m}{n^m} = (1 - \frac{1}{n})^m$

(c) Ω wie oben, n=m

$A = \{(\omega_1, ..., \omega_m) \in \Omega \mid \exists i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$, so dass $\omega_i = \omega_j$ und $\omega_i \neq \omega_k, \omega_k \neq \omega_l \; \forall k, l \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq k, j \neq k, k \neq l\}$

$$|A| = \underbrace{n \cdot}_{w\ddot{a}hle\, Drucker\, ohne\, job} \underbrace{(n-1) \cdot}_{Drucker\, mit\, 2\, Jobs} \underbrace{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}}_{2\, Jobs,\, die\, zusammen\, liegen} \cdot \underbrace{(n-2)!}_{restl.\, jobs\, verteilen}$$

$= n!\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)n!$

$P(A) = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)n!}{n^n}$

Aufgabe 3

$|P(A)-P(B)| = |P(A\cap\Omega)-P(B\cap\Omega)| = |P(A\cap(B^c\cup B))-P(B\cap(A^c\cup A))|$

$= |P((A\cap B^c)\cup(A\cap B)) - P((B\cap A^c)\cup(B\cap A))|$

$= |P(A\cap B^c) + P(A\cap B) - P(B\cap A^c) - P(B\cap A)|$

$= |P(A\cap B^c) - P(A^c\cap B)| \underbrace{\leq}_{\triangle - Ungl. |a-b|\leq|a|+|b|} P(A\cap B^c) + P(A^c\cap B)$

Aufgabe 4

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wkt.raum; A,B $\in \mathfrak{A}$

(a) z.z.: $P(A^c) = 1 - P(A)$

$1 \underbrace{=}_{Def 2.10(i)} P(\Omega) = P(A\cup A^c) \underbrace{=}_{Def 2.10(ii)} P(A) + P(A^c)$

(b) z.z.: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(A\cup B) = P(A\cup B\backslash A) = P(A) + P(B\backslash A)$

$= P(A) + P(B\backslash(A\cap B)) \underbrace{=}_{d)} P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

(c) z.z.: $P(A) \leq P(B)$ für $A\subset B$

$P(B\backslash A) \underbrace{=}_{d)} P(B) - P(A) \geq 0$

(d) z.z.: $P(B) - P(A) = P(B\backslash A)$ für $A\subset B$

$P(B) \underbrace{=}_{A\subset B} P(A\cup(B\backslash A)) \underbrace{=}_{Def 2.10(ii)} P(A) + P(B\backslash A)$

(e) z.z.: $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ für $\{A_n\}$ absteigend

$\{A_n\}$ absteigend $\Rightarrow \{A_n^c\}$ aufsteigend

$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \underbrace{=}_{La 2.11e)} 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Aufgabe 5

(a) $A_i \hat{=}$ Drucker $i (1 \leq i \leq n)$ bekommt keinen Auftrag

$P(A_i) = \frac{(n-1)^m}{n^m}$ (s. Aufgabe 2b)

$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^m}{n^m} \qquad i \neq j$

...

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)^m}{n^m} \qquad i_j, 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_j \leq n, i_j$

paarweise versch.

(b) Jeder Drucker erhält mindestens einen Auftrag:

$A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_n^c = (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c$

$P(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_n^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$ mit

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(\bigcup_{j=1}^n A_j) \underbrace{=}_{La.2.12a) Siebformel} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{i \leq i_1 \leq ... \leq i_j \leq n} P(\bigcap_{l=1}^j A_{i_l})$

$= \binom{n}{1} \frac{(n-1)^m}{n^m} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)^m}{n^m} + \binom{n}{3} \frac{(n-3)^m}{n^m} - ... \binom{n}{n} \frac{(n-n)^m}{n^m} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \underbrace{\frac{(n-k)^m}{n^m}}_{Teila)}$

$\Rightarrow P(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_n^c) = 1 - P(\bigcup_{j=1}^n A_j) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}$

$= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}$

(c) k Drucker bekommen keinen Auftrag

$\Rightarrow$ n-k Drucker bekommen mindestens einen Auftrag

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Drucker, die keinen Auftrag erhalten zu wählen

$P(\text{k Drucker bekommen keinen Auftrag}) = \frac{\binom{n}{k} (\sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^m}{(n-k)^m})(n-k)^m}{n^m}$

$= \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^m}{n^m}$

Aufgabe 6

$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n A_i^c) \underbrace{\geq}_{Bonferroni-Ungl.} 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i^c)$
$= 1 - \sum_{i=1}^n (1 - P(A_i)) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1)$

Die Aufgabe kann auch per Induktion gezeigt werden.

Aufgabe 7

(a) $\Omega, I \neq \emptyset, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ Familie von σ -Algebren über Ω

z.Z. $\mathfrak{A} := \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ ist σ-Algebra über Ω

dazu:

(i) z.z.: $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$

$\forall i \in I : \Omega \in \mathfrak{A}_i \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$

(ii) z.z.: $A \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}$

$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow A \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow \forall i : A \in \mathfrak{A}_i \Rightarrow \forall i : A_i^c \in \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$

(iii) z.z.: $A_n \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{A}$

$\forall k \in \mathbb{N} : A_k \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow A_k \in \bigcap_{i\in I} A_i$ Voraussetzung

$\Rightarrow \forall i \in I, k \in \mathbb{N} : A_k \in \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow \forall i \in I : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}_i$

$\Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$

(b) Ist $B := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ stets eine σ-Algebra?

Nein. Gegenbeispiel: $I = \{1,2\}, \Omega = \{1,2,3\}$

$\mathfrak{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

$\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ist keine σ-Algebra, da $\{1,3\} \cap \{2,3\} \notin \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$

σ-Algebren enthalten alle Ereignisse, die durch Verknüpfung mit "nicht", "und", "oder" entstehen.

Aufgabe 8

D$\widehat{=}$ defekter Chip

A,B,C $\widehat{=}$ Chip kommt aus Fabrik A,B,C

$P(A) = 0,35; P(B) = 0,15; P(C) = 0,5$

$P(D^c|A) = 0,75 \Rightarrow P(D|A) = 0,25$

$P(D^c|B) = 0,95 \Rightarrow P(D|B) = 0,05$

$P(D^c|C) = 0,85 \Rightarrow P(D|C) = 0,15$

$P(D) \underbrace{=}_{tot.W'keit} P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$

$= 0,25 \cdot 0,35 + 0,05 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,5 = 0,17$

beliebiger Chip mit $P(D) = 0,17$ defekt.

Mit welcher W'keit kommt ein defekter Chip aus Fabrik C?

$P(C|D) \underbrace{=}_{Bayes} \frac{P(D|C)P(C)}{\sum_{X=A,B,C} P(D|X)P(X)} = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}5}{0{,}17} \approx 0,44$

Aufgabe 9

$S0 \widehat{=}$ 0 gesendet

$R0 \widehat{=}$ 0 empfangen

$S1 = S0^c \widehat{=}$ 1gesendet

$R1 = R0^c \widehat{=}$ 1 empfangen

$P(S1) = p; P(S0) = 1 - p$

(a) $P(R0|S0) = P(R1|S1) = 1 - \varepsilon = P(korrekt)$

$P(R1|S0) = P(R0|S1) = \varepsilon$

$P(S0|R0) = \frac{P(R0|S0)P(S0)}{P(R0|S0)P(S0)+P(R0|S1)P(S1)} = \frac{(1-\varepsilon)(1-p)}{(1-\varepsilon)(1-p)+p\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon)(1-p)}{1-\varepsilon+2\varepsilon p-p}$

(b) $P(S1|R0) = \frac{P(R0|S1)P(S1)}{P(R0)} = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon+2\varepsilon p-p}$

(c) Sei p=0,5. Für welches ε gilt $P(R1|S1) = P(R1)$ bzw. $P(R1)P(S1) = P(R1 \cap S1)$

$1 - \varepsilon = P(R1|S1)P(S1) + P(R1|S0)P(S0) = (1 - \varepsilon)\frac{1}{2} + \varepsilon\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$

In diesem Fall lassen sich keine Daten über die Verbindung übertragen.

Aufgabe 10

A_i sei das Ereignis: Router intakt $\Rightarrow P(A_i) = p_i$

$I \widehat{=}$ Verbindung möglich

$P(I) = P(I|A_1)P(A_1) + P(I|A_1^c)P(A_1^c)$

$P(A_3 \cup A_4) = 1 - P((A_3 \cup A_4)^c) = 1 - P(A_3^c \cap A_4^c)$

$P((A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)) = P(A_2 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$

$P(I) = [1 - P(A_3^c)P(A_4^c)]P(A_1) + [P(A_2)P(A_3) + P(A_2)P(A_4) - P(A_2)P(A_3)P(A_4)]P(A_1^c)$

$= [1 - (1 - p_3)(1 - p_4)]p_1 + [p_2p_3 + p_2p_4 - p_2p_3p_4](1 - p_1)$

$= p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 - p_1p_3p_4 - p_2p_3p_4 - p_1p_2p_4 - p_1p_2p_3 + p_1p_2p_3p_4$

Aufgabe 11

$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, ...) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$

bel. Sequenz $m = (m_1, m_2, ..., m_l), l \in \mathbb{N}$

$A_n \widehat{=}$ Sequenz m fällt ab dem n-ten Wurf.

$A_n = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}, i \leq l, \omega_{n+i-1} = m_i\}$ ist W'raum mit geeignetem $\mathfrak{A}$

$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (also A_n und A_{n+1}) sind nicht s.u., aber $\{A_{n \cdot l}\}_{n \in \mathbb{N}}$ s.u.

$P(A_n) = (\frac{1}{2})^l$

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \underbrace{\Rightarrow}_{Borel-Cantelli} P(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 1$

$\Rightarrow$ b) Sequenz tritt mit W'keit 1 ∞-oft auf $\Rightarrow$ trifft mit der W'keit 1 überhaupt in der Folge auf

a) Folgt aus b):

$A_{(m)} \widehat{=}$ Sequenz (m) tritt auf $\Rightarrow P(A_{(m)}) = 1$

$A \widehat{=}$ Alle Sequenzen treten auf: $A = \bigcap_{m \in M} A_{(m)}$ mit M abzählbar

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P((\bigcap_{m \in M} A_{(m)})^c) = 1 - P(\bigcup_{m \in M} A_{(m)}^c)$

$\geq 1 - \underbrace{\sum_{m \in M} \underbrace{P(A_{(m)}^c)}_{=0}}_{=0} = 1$

Alle treten auf $\widehat{=}$ keine tritt nicht auf

Aufgabe 12

$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$

$$= \frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\underbrace{(1-\frac{np_n}{n})^{-k}}_{\to 1}(1-\frac{np_n}{n})^n \underbrace{\prod_{l=0}^{k-1}\underbrace{\frac{n-l}{n}(np_n)}_{1\lambda}}_{\to\lambda^k} = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{n\cdot p_n}{n})^n$$

Nochmal etwas verständlicher:

$\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n = \lambda \qquad n\cdot p_n = \lambda$ mit $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda \qquad p_n = \frac{\lambda_n}{n}$

$$\prod_{l=0}^{k-1}\frac{n-l}{n}(np_n) = \frac{\lambda_n^k\cdot n^k}{n^k} = \frac{\lambda_n^k\cdot n(n-1)\ldots(n+k-1)}{n\cdot n\ldots n} = \lambda_n^k\underbrace{(1-\frac{1}{n})}_{\to 1}\underbrace{(1-\frac{2}{n})}_{\to 1}\ldots\underbrace{(1-\frac{k+1}{n})}_{\to 1}$$

Bekannt: $f_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n, x\geq 0 \Rightarrow f_n(x) \overrightarrow{n\to\infty} e^{-x} =: f(x)$

Vermutung: $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{n\cdot p_n}{n})^n = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \underbrace{\overset{!}{=}}_{\lambda_n := n\cdot p_n\to\lambda} e^{-\lambda}$

Zeige die Vermutung: $\forall n\in\mathbb{N} : f_n(x)$ ist monoton fallend in x

$f := \lim_{n\to\infty} f_n$ stetig; $\lambda_n \overrightarrow{n\to\infty} \lambda$

$\forall\varepsilon > 0\exists n_o$, so dass gilt: $\forall n > n_0 : \lambda-\varepsilon < \lambda_n < \lambda+\varepsilon$

$\underbrace{\Rightarrow}_{f monoton} f_n(\lambda+\varepsilon) \leq f_n(\lambda_n) \leq f_n(\lambda-\varepsilon)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{n\to\infty} f(\lambda+\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \leq f(\lambda-\varepsilon)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{f stetig, \varepsilon\to 0} f(\lambda) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n) \leq f(\lambda) \Rightarrow f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n)$

$\Rightarrow$ Vermutung gilt.

Aufgabe 13

(a) X $\hat{=}$ # der Sendungen eines Pakets

sei Z $\sim Geo(p)$, Träger $T' = \mathbb{N}_0$

X hat Träger $T = \mathbb{N}$

$X = 1 + Z \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

$f_X(k) = P^X(k) = P(X = k)$

keine Wiederholung: $Z = 0 \Rightarrow X = 1 \Rightarrow P(X = 1) = p$

2 Wiederholungen: $Z = 2 \Rightarrow X = 3 \Rightarrow P(X = 3) = p(1-p)^2$

Gesucht p, so dass $P(X \leq 4) = 0,99$

$0,99 = \sum_{k=1}^{4} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{3} (1-p)^i = p \frac{1-(1-p)^4}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^4$

$\Rightarrow p = 1 - \sqrt[4]{0.01}$

(b) Verteilung aus a) bei X=10 abgeschnitten

Träger: $T = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

$$P(Y = k) = \begin{cases} P(X = k) & \forall k \in \{1, 2, ..., 9\} \\ \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) & \text{k=10} \end{cases}$$

$P(Y = 10) = \sum_{i=10}^{\infty} P(X = i) = 1 - \sum_{i=1}^{9} P(X = i)$

$= 1 - \sum_{j=0}^{8} P(Z = j) = 1 - (1 - (1-p)^9) = (1-p)^9$

$$\Rightarrow f_Y(x) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \forall k \in \{1, 2, ..., 9\} \\ (1-p)^9 & \text{k=10} \end{cases}$$

(c) $X \hat{=}$ Anzahl der Pakete, die mehrfach versendet werden müssen

$X \sim Bin(n, p)$ mit $n = 1000$,

$p' = 10^{-4} = 1 - p$ (Fehler in der Aufgabenstellung)

n gross, p' klein $\Rightarrow$ Gesetz seltener Ereignisse anwenden

d.h. X ist ungefähr Poissonverteilt mit Paramter $\lambda = 1000 \cdot 10^{-4} = 0,1$

$\Rightarrow f(mehr\,als\,3\,mehrfach\,übertragen) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$

mit $X \sim Poi(0,1)$

$\Rightarrow P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-0,1} \cdot \frac{0,1^k}{k!} \approx 3,85 \cdot 10^{-6}$

Aufgabe 14

a)

$$F_X(x) = P(X \leq x) \in [0,1]$$

$$(i)\ x < y: \quad F_X(x) = P(X \leq x) = P^X((-\infty, x]) \overset{\text{La. 2.11, c)}}{\leq} P^X((-\infty, y]) = P(X \leq y) = F_X(y)$$

$$\Rightarrow \ F_X \text{ monoton wachsend}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ \lim_{x\to\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P^X((-\infty, x]) \\
&\overset{x_n = n}{=} \lim_{n\to\infty} P^X((-\infty, n]) = \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcup_{i=1}^{n} (-\infty, i]\right) \\
&\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} P^X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n]\right) = P^X(\mathbb{R}) = 1 \\
\lim_{x\to-\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} P(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} P^X((-\infty, x]) \\
&\overset{x_n = -n}{=} \lim_{n\to\infty} P^X((-\infty, -n]) = \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, -i]\right) \\
&\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} P^X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = P^X(\emptyset) = 0
\end{aligned}$$

$$(iii)\ x_n \downarrow x_0 \text{ für } n \to \infty$$

$$\begin{aligned}
F_X(x_0) &= P((\infty, x_0]) = P^X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_n]\right) \\
&\overset{\text{La. 2.11 e)}}{=} \lim_{n\to\infty} P^X\left(\bigcap_{i=1}^{n} (-\infty, x_i]\right) = \lim_{n\to\infty} P^X\left((-\infty, x_n]\right) \\
&= \lim_{x\downarrow x_0} P^X((-\infty, x]) = \lim_{x\downarrow x_0} P(X \leq x) = \lim_{x\downarrow x_0} F_X(x)
\end{aligned}$$

b)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P^X((-\infty, x]) = P^Y((-\infty, x]) = P(Y \leq x) = F_Y(x)$$

Aufgabe 15

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ mit } \lambda = 0.01$$
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$
$$F(x) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

11

a)

1.) $P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - F_X(100) = e^{-100\lambda} = \dfrac{1}{e}$

2.) $P(25 \leq X \leq 300) = P(X \leq 300) - P(X < 25) = P(X \leq 300) - P(X \leq 25)$

$$= F(300) - F(25) = 1 - e^{-300\lambda} - 1 + e^{-25\lambda}$$

$$= e^{-\frac{1}{4}} - e^{-3}$$

3.) $P(X < 150) = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$

b) Gesucht ist ein x, so dass $P(X \leq x) = p = 0,5$

$$p = P(X \leq x) = F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - p = e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1-p) = -\lambda x$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda} = -100\ \ln(1-p) \approx 69,315$$

c)

$$p = P(u_1 < X \leq u_2) = P(X \leq u_2) - P(X \leq u1) = F(u_2) - F(u_1)$$

$$\Rightarrow \quad p = e^{-\lambda u_1} - e^{-\lambda u_2}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\lambda u_2} = e^{-\lambda u_1} - p$$

$$\Rightarrow \quad -\lambda u_2 = \ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)$$

Suche $\min\limits_{0 \leq u_1} \Bigg(\underbrace{-\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda u_1} - p\right)}_{u_2} - u_1\Bigg) =: \min\limits_{0 \leq u_1} f(u_1)$

$$f'(u_1) = \frac{1}{e^{-\lambda u_1} - p} e^{-\lambda u_1} - 1 \underset{x := e^{-\lambda u_1}}{=} \frac{x}{x-p} - 1 \overset{!}{\geq} 0$$

Wenn die letzte Ungleichung gilt, dann ist $f(x)$ monoton steigend. Damit ist $u_1 = 0$ die Lösung.
Zeige nun die letzte Ungleichung:

Beh.: $x - p \leq 0 \Rightarrow e^{-\lambda u_1} \leq p$, aber $p = P(u_1 < x \leq u_2) < e^{-\lambda u_1} \ \Rightarrow \ \lightning$

$$\Rightarrow \quad x - p > 0$$

Zeige nun: $\dfrac{x}{x-p} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq x - p$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \geq -p$$

Somit ist $f(u_1)$ monoton steigend in u_1. Mit $u_2(u_1 = 0) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^0 - p\right) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$ folgt das gesuchte Intervall

$$\left(0, -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)\right].$$

12

Musterlösungen 5. Übung

10. Juni 2002

Aufgabe 16

Es gelte $P(X > x + y | X > x) = P(X > y) \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P^X((y,\infty) &= P^X((x+y,\infty)|(x,\infty)) \\
&= \frac{P^X((x+y,\infty)\cap(x,\infty))}{P^X((x,\infty))} \\
&= \frac{P^X((x+y,\infty))}{P^X((x,\infty))}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; P^X((x+y,\infty)) = P^X((x,\infty)) \cdot P^X((y,\infty))$$

$$P^X((x,\infty)) = 1 - P^X((-\infty,x]) = 1 - F_X(x) =: \overline{F}_X(x)$$

$$\Rightarrow\; \overline{F}_X(x+y) = \overline{F}_X(x)\cdot\overline{F}_X(y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R},\; \overline{F}_X \text{ stetig}$$

$$\underset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow}\; \overline{F}_X(x) = e^{\alpha x},\; \alpha\in\mathbb{R} \text{ Annahme: } \alpha > 0 \;\Rightarrow\; \overline{F}_X \text{ streng monoton steigend}$$

$$\Rightarrow\; F_X \text{ streng monoton fallend}$$

$$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \overline{F}_X(x) = 1 \;\Rightarrow\; F_X(x) = 0\;\forall\, x$$

$$\Rightarrow \alpha < 0,\; \text{setze } \lambda := -\alpha$$

$$\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \;\Rightarrow\; X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Somit folgt, dass eine Zufallsvariable X mit gedächnisloser, stetiger Verteilungsfunktion exponential Verteilt ist.

Aufgabe 17

a) Normiere $h(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \int_0^\infty c\ x^{\alpha-1}\ e^{-\lambda x^\alpha} dx \underset{\substack{x' = x^\alpha \\ dx' = \alpha x^{\alpha-1}\ dx}}{=} \frac{c}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda x'} dx'$$

$$= \frac{c}{\alpha} \left[-\frac{1}{\lambda}\ e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = \frac{c}{\lambda \alpha}$$

$\Rightarrow\ c = \lambda \cdot \alpha > 0$

$\Rightarrow\ h(x) >= 0 \quad \forall\ x$

$\Rightarrow\ h(x)$ ist eine Dichte, die Zugehörige Verteilungsfunktion ist:

$\Rightarrow F(x) = \left(1 - e^{-\lambda x^\alpha}\right) 1\!\!1_{[0,\infty)}(x)$

b) Normiere $g(x)$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ dx = \int_{-1}^{0} c\ x\ dx + \int_0^5 e^x\ dx = -\frac{c}{2} + e^5 - 1$$

$\Rightarrow\ c = 2e^5 - 4\ >\ 0 \Rightarrow\ g(x) < 0 \quad \forall\ -1 < x < 0$

$\Rightarrow\ g(x)$ ist keine Dichte

Aufgabe 18

Sei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen. Zeige die Symmertrieregel $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{\substack{t' = -t \\ dt' = -dt}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t'^2}{2}} dt'$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t'^2}{2}} dt'\ - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t'^2}{2}} dt' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t'^2}{2}} dt'$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t'^2}{2}} dt' = 1 - \Phi(x)$$

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, es gilt $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, da

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{\frac{t'^2}{2}} dt' = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Gegeben: $\sigma = 10000$, $\mu = 1000$

a)

$$x = 11550:\ \ P(X \le x) = \Phi\left(\frac{11550 - 10000}{1000}\right) = \Phi(1.55) \approx 0.939$$

$$x = 7000:\ \ P(X \le x) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) \approx 1.35 \cdot 10^{-3}$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(X > 10000 | X > 9500) &= \frac{P(X > 10000\ \cap X\ \ > 9500)}{P(X > 9500)} = \frac{P(X > 10000)}{P(X > 9500)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 10000)}{1 - P(X \leq 9500)} = \frac{1 - \Phi(0)}{1 - \Phi(-0.5)} = \\
&\approx \frac{1 - 0.5}{0.691} \approx 0.723 \\
P(X > 11500 | X > 11000) &= \frac{P(X > 11500)}{P(X > 11000)} = \frac{1 - \Phi(1.5)}{1 - \Phi(1)} \approx \frac{1 - 0.933}{1 - 0.841} \approx 0.159
\end{aligned}
$$

c) Gesucht x, so dass $P(X \leq u) = 0.7$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ u \approx 0.525 \\
&\Rightarrow\ 0.525 = \frac{x - \mu}{\sigma} \\
&\Rightarrow\ x = 0.525\ \sigma + \mu = 10525
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19

a) $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)\ \ \Rightarrow\ \ f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k\ z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k\ (1-p)^{n-k}\ z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = (pz + 1 - p)^n
\end{aligned}
$$

b) $P(\{i\}) = p_i \geq 0\ \forall\ i \in \mathbb{N}$, zeige noch die Normierungsbedingung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1
\end{aligned}
$$

Durch $P(\{i\})$ ist somit eine Zähldichte gegeben. Die zugehörige erzeugenden Funktion ist:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k\ z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) z^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - \frac{1}{z} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - z \right) = -\ln(1-z) + \frac{\ln(1-z)}{z} + 1
\end{aligned}
$$

15

Teillösung 6. Übung

14. Juni 2002

Aufgabe 20

Zeige: $X1, \ldots, X_n$ s.u. $\Rightarrow$ $P(X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = t_i)$.
Zeige dazu

$$P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \le t_j, \ldots X_n \le t_n) = \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j}^{n} P(X_i \le t_i),$$

für $j = 1, \ldots, n$. Für $j = n$ ergibt sich die Beauptung.
Der Beweis erfolgt per Induktion (ObdA sei der Träger $T = \mathbb{N}$).

IA: $j = 1,$ gilt nach Definition der stochastischen Unabhängigkeit.

IS: $j \to j+1$

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = t_1, \ldots, X_j = t_j, X_{j+1} \le t_{j+1}, \ldots, X_n \le t_n) \\
=&P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, X_j \le t_j, X_{j+1} \le t_{j+1}, \ldots, X_n \le t_n) \\
&\quad - P(X_1 = t_1, \ldots, X_{j-1} = t_{j-1}, \underbrace{X_j \le t_j - 1}_{\Leftrightarrow\ X_j < t_j \text{ da } T = \mathbb{N}_0}, X_{j+1} \le t_{j+1}, \ldots, X_n \le t_n) \\
\overset{\text{IV}}{=}& \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \le t_j) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i) \\
&\quad - \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i)\ P(X_j \le t_j - 1) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i) \\
=& \prod_{i=1}^{j-1} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i) \Big(\underbrace{P(X_j \le t_j) - P(X_j \le t_j - 1)}_{= P(X_j = t_j)} \Big) \\
=& \prod_{i=1}^{j} P(X_i = t_i) \prod_{i=j+1}^{n} P(X_i \le t_i)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

16

Zeige noch die Gegenrichtung:

$$P(X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n) = \sum_{\substack{s_i \in T_i:\ s_i \le t_i \\ i=1,\dots,n}} P(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \sum_{s_i \le t_i} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = s_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{s_i \le t_i} P(X_i = s_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le t_i) \quad \Rightarrow \quad \text{s.u.}$$

Aufgabe 21

$N \sim \mathrm{Poi}(\lambda), \quad T \sim \mathrm{Exp}(\mu)$

a) gesucht: $P(N < 4,\ T \le 50) \overset{\text{s.u.}}{=} P(N < 4)\ P(T \le 50)$

$$= \left(e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \left(1 - e^{-50\mu}\right)$$

$$\approx 0.104$$

b) gesucht: $P(N \le 12,\ NT \le 300) = \sum_{k=0}^{12} P(N = k,\ k \cdot T \le 300)$

$$= P(N=0) + \sum_{k=1}^{12} P\left(N = k,\ T \le \frac{300}{k}\right)$$

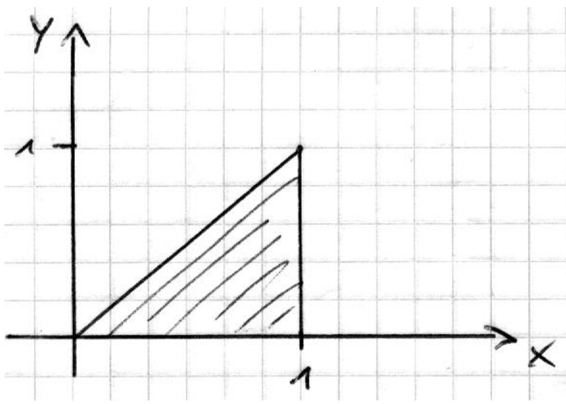
$$= P(N=0) + \sum_{k=1}^{12} P(N = k) P\left(T \le \frac{300}{k}\right)$$

$$= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{12} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - e^{-\frac{300\mu}{k}}\right)$$

$$\approx 0.497$$

Aufgabe 22

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\ dy\,dx = \int_0^1\int_0^x cxy\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{c}{2}xy^2\right]_0^x\ dx = \int_0^1 \frac{c}{2}x^3 dx = \left[\frac{c}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{c}{8} \end{aligned}$$

$\Rightarrow c = 8$

$f_{(X,Y)}(x,y) \ge 0\ \ \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

Randdichten:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \underbrace{=}_{0\le y\le x} \int_0^x 8xy\mathfrak{I}_{[0,1]}(x)\,dy = 4x^3\mathfrak{I}_{[0,1]}(x) \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \underbrace{=}_{\substack{0\le y\le x \\ 0\le x\le 1}\}y\le x\le 1} \int_y^1 8xy\,dx\mathfrak{I}_{[0,1]}(y) = (4y-4y^3)\mathfrak{I}_{[0,1]}(y) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktionen:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^x 4t^3\mathfrak{I}_{[0,1]}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^4 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) \quad = \quad \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{y} (4t-4t^3)\Im_{[0,1]}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 2y^2 - y^4 & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion der gemeinsamen Verteilung:

$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_0^{min\{1,x\}}\int_0^{min\{u,y\}} 8uv\,dv\,du$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ oder } y < 0 \\ 1 & x > 1 \text{ und } y < 1 \\ x^4 & 0 \leq x \leq 1 \text{ und } y > x \\ 2y^2 - y^4 & x > 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ ? & 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

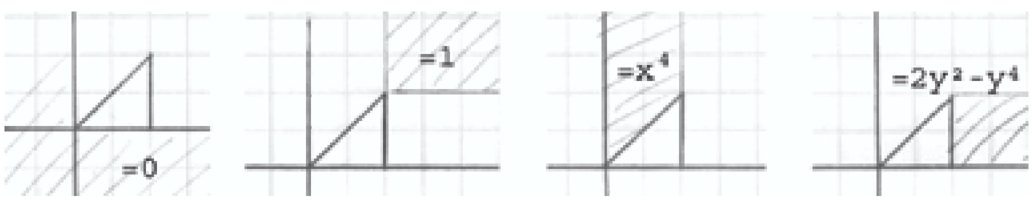
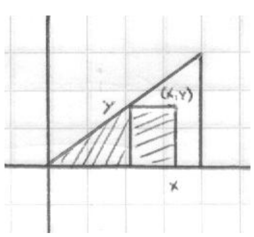


Abbildung 1: $F_{(X,Y)}(x,y)$

$F_{(X,Y)}$ für $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x$



$F_{(X,Y)}(x,y) = \underbrace{\int_0^y\int_0^u 8uv\,dv\,du}_{3eck} + \underbrace{\int_y^x\int_0^y 8uvdvdu}_{4eck} = \int_0^y 4u^3\,du + \int_y^x 4uy^2\,du =$

$y^4 + 2y^2(x^2-y^2) = -y^4 + 2x^2y^2$

Stochastisch unabhängig? Gegenbeispiel:

$F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3})^4 \neq (\frac{1}{3})^4(\frac{8}{9} - (\frac{2}{3})^4) = F_X(\frac{1}{3})F_Y(\frac{2}{3})$

$\Rightarrow$ nicht s.u.

Aufgabe 23

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$

$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

X_1, X_2 s.u.

(a) $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) = \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x_2}$

(b) (i) Gesucht: $P(Y = X_1 + X_2 \leq 1)$

$$F_{X_1+X_2}(z) = \iint\limits_{0 \leq x_1+x_2 \leq z} \lambda_1\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}\, dx_1\, dx_2$$
$$= \int_0^z \int_0^{z-x_2} \lambda_1\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}\, dx_1\, dx_2$$
$$= \int_0^z \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}[1 - e^{-\lambda_1(z-x_2)}]dx_2 = \int_0^z \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} - \lambda_2 e^{(-\lambda_2+\lambda_1)x_2 - \lambda_1 z} dx_2$$
$$= 1 - e^{-\lambda_2 z} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(1 - e^{(-\lambda_2+\lambda_1)z})e^{-\lambda_1 z} = 1 - e^{-\lambda_2 z} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_1 z} e^{-\lambda_2 z})$$
$$= 1 - \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z})$$
$$= 1 - \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 z})$$

$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ (Vorl. Bsp.4.14) $F_{X_1+X_2}(z) = 1 - e^{-\lambda_1 z} - \lambda_1 z e^{-\lambda_2 z}$

$$F_{X_1+X_2}(1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 e^{-\lambda_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_1}) & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1 - e^{-\lambda_1} - \lambda_1 e^{-\lambda_1} & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

(ii) $Y = max\{X_1, X_2\}$

Gesucht: $P(Y \leq 1)$

$P(Y \leq z) = P(X_1 \leq z, X_2 \leq z) \underbrace{=}_{s.u.} P(X_1 \leq z)P(X_2 \leq z)$

$= F_{X_1}(z)F_{X_2}(z) = (1 - e^{-\lambda_1 x_1})(1 - e^{-\lambda_2 x_2})$

$\Rightarrow P(Y \leq 1) = 1 - e^{-\lambda_1} - e^{-\lambda_2} + e^{-\lambda_1 \lambda_2}$

(iii) $Y = min\{X_1, X_2\}$

Gesucht: $P(Y \leq 1)$

$P(Y \leq z) = 1 - P(Y > z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z) \underbrace{=}_{s.u.} 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z) = 1 - (1 - P(X_1 \leq z))(1 - P(X_2 \leq z)) = 1-(1-(1-e^{-\lambda_1 z}))(1-(1-e^{-\lambda_2 z})) = 1-e^{-\lambda_1 z-\lambda_2 z} = 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}$

$\Rightarrow Y \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$

$P(Y \leq 1) = 1 - e^{-\lambda_1 - \lambda_2}$

Teillösung 7. Übung

22. Juli 2002

Aufgabe 24

$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei die Folge der gemessenen Temperaturen, $T_i \sim \mathrm{N}(400, 9)$.

$$S = \min\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; T_n \in (-\infty, 395] \cup (405, \infty)\right\}$$

ist die Erste Eintrittszeit, des über-/unterschreitens der vorgegebenen Temperaturspanne.

$$\begin{aligned} P(T_i \in (-\infty, 395] \cap (405, \infty)) &= P(T_i \leq 395) + P(T_i \geq 405) \\ &= P(T_i \leq 395) + 1 - P(T_i \leq 405) = \Phi\left(\frac{395 - 400}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{405 - 400}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2 - 2\,\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0.096 \end{aligned}$$

Es gilt $P(S = k) = (1 - p)^{k-1}p$ mit $p = P(T_i \in (-\infty, 395] \cup (405, \infty))$

$$\Rightarrow \quad P(S > 10) = 1 - P(S \leq 10) = 1 - \sum_{k=1}^{10}(1 - p)^{k-1}p = (1 - p)^{10} \approx 0.364$$

Aufgabe 25 b)

$X = (X_1, X_2)$ gleichverteilt auf $Q = (0,1)^2$ mit Dichte $f_X(X_1, X_2) = \Im_Q(X_1, X_2) \Leftrightarrow X_1, X_2 \sim R(0,1)$ iid.

$T(X_1, X_2) = (\sqrt{-2\ln X_1}\sin(2\pi X_2), \sqrt{-2\ln X_1}\cos(2\pi X_2))\ \ X_1, X_2 \in Q$

$\det(\frac{\partial T_i}{\partial X_j}) = \begin{vmatrix} \frac{-\sin(2\pi X_2)}{\sqrt{-2\ln X_1}X_1} & \sqrt{-2\ln X_1}\cos(2\pi X_2)2\pi \\ \frac{-\cos(2\pi X_2)}{\sqrt{-2\ln X_1}X_1} & \sqrt{-2\ln X_1}\sin(2\pi X_2)2\pi \end{vmatrix}$

$= \frac{2\pi}{X_1}\sin^2(2\pi X_2) + \frac{2\pi}{X_1}\cos^2(2\pi X_2) = \frac{2\pi}{X_1} \neq 0 \forall X_1 \in (0,1)$

T ist injektiv und stetig diffbar

Berechne $T^{-1} : Y_1^2 = -2\ln X_1 \sin^2(2\pi X_2)$

$Y_2^2 = -2\ln X_1 \cos^2(2\pi X_2)$

$Y_1^2 + Y_2^2 = -2\ln X_1$

$\Leftrightarrow X_1 = e^{-\frac{1}{2}(Y_1^2+Y_2^2)}$

$\Rightarrow X_2$ durch Einsetzen

Transformationssatz: $f_Y(Y_1, Y_2) = \frac{f_X(T^{-1}(y))}{|\det(\frac{\partial T}{\partial X_j})|_{T^{-1}(y)}|} = \Im_{T(Q)}(Y_1, Y_2)$

$= \frac{1}{|\frac{2\pi}{X_1}|_{X_1 = e^{-\frac{1}{2}(Y_1^2+Y_2^2)}}|}\Im_{\mathbb{R}^2}(Y_1, Y_2)$

$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{Y_1^2+Y_2^2}{2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y_1^2}{2}}}_{\sim N(0,1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y_2^2}{2}}$

Aufgabe 26

Die Lösung der Aufgabe wird vom Lehrstuhl bereitgestellt. Wichtig ist, wie man die Integralsgrenzen herausfindet. Diese holt man aus den Indikatorfunktionen, die im Integral stehen. In diesem Beispiel $\Im_{(0,\infty)}(t)$ und $\Im_{(0,1)}(z-t)$, also $0 \leq t \leq \infty$ und $0 \leq z - t \leq 1$. Nach t auflösen ergibt: $0 \leq t \leq \infty$ und $z \geq t \geq z-1$. Für die obere Grenze nehmen wir $Min\{z, \infty\}$. Für die untere Grenze nehmen wir $Max\{0, z-1\}$.

Aufgabe 25 a)

$$X \sim \text{Rec}(0,1) \quad \Rightarrow \quad f_x(t) = \mathbb{1}_{(0,1)}(t)$$
$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in (0,1)$$

$Y = T(X)$ ist nicht standardnormalverteilt, da $T\big(\,(0,1)\,\big) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\;e}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \neq (-\infty, \infty)$

T ist injektiv und stetig differenzierbar auf $(0,1)$, $T^{-1}(y) = \sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\;y\right)}$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;x\;e^{-x^2} \neq 0 \quad \forall\; x > 0$$

$\Rightarrow$ Transformationssatz anwendbar:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X\left(T^{-1}(y)\right)}{\left|\det\left(\frac{dT}{dx}\right)\Big|_{T^{-1}(y)}\right|}\,\mathbb{1}_{T((0,1))}(y) \\
&= \frac{f_X\left(\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\;y\right)}\right)}{\left|-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;x\;e^{-x^2}\Big|_{\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\;y\right)}}\right|}\,\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\;e},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y) \\
&= \frac{1}{2y\sqrt{-\log\left(\sqrt{2\pi}\;y\right)}}\,\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\;e},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}(y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 26

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Rec}(0,1)$, X, Y s.u.

Faltungsformel:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\; f_Y(z-t)\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\; e^{-\lambda t}\;\; \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)\mathbb{1}_{[0,1]}(z-t)\; dt \\
&= \int_{\max\{0,z-1\}}^{z} \lambda\; e^{-\lambda t}\;\; dt\;\; \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) = \; -e^{-\lambda t}\Big|_{\max\{0,z-1\}}^{z}\; \mathbb{1}_{[0,\infty)}(z) \\
&= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \le z \le 1 \\ e^{-\lambda(z-1)} - e^{-\lambda z}, & z > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27

Zwischenankunftszeiten $Z_i \sim Erl\,(2, \lambda)$

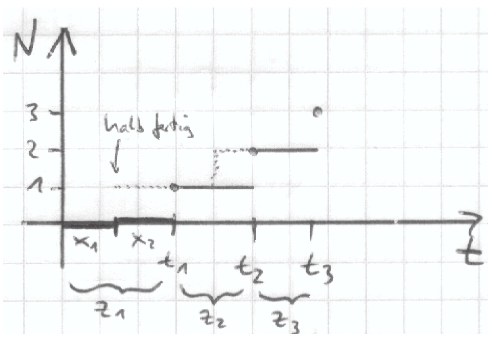
$Erl\,(2, \lambda) = Exp\,(\lambda) * Exp\,(\lambda) \quad X_i \sim Exp(\lambda), iid.$

$Z_i = X_{2i} + X_{2i-1} \quad i \in \mathbb{N}$

$N(t) \mathrel{\hat{=}} \#$ der ankommenden Jobs

$N(t) = max\,\{n \in \mathbb{N} \mid \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i \leq t\} = max\,\{n \in \mathbb{N} \mid \sum\limits_{i=1}^{n} (X_{2i} + X_{2i-1}) \leq t\}$

$= max\,\{n \in N \mid \sum\limits_{j=1}^{2n} X_j \leq t\}$



Definiere $M(t) = max\,\{m \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^{m} X_j \leq t\}$

$X_j \sim Exp\,(\lambda), X_j\; s.u. \quad \Rightarrow M(t)$ ist $PP(\lambda)$

$\Rightarrow M(t) \sim Poi\,(\lambda t)$

$N(t) = \lfloor \frac{M(t)}{2} \rfloor$

$P(N(t) = k) = P(\lfloor \frac{M(t)}{2} \rfloor = k) = P(\frac{M(t)}{2} = k) + P(\frac{M(t)-1}{2} = k)$

$= P(M(t) = 2k) + P(M(t) = 2k+1) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} + e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Für $\lambda = t = 1$,

$k = 0: \; P(N(t) = 0) = e^{-1}(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}) = 2e^{-1} \approx 0,736$

$k = 2: \; P(N(t) = 2) \approx 0,018$

$k = 4: \; P(N(t) = 4) \approx 1,01 \cdot 10^{-5}$

Aufgabe 28

X_1, X_2 diskret mit Träger $\mathbb{N}_0$, s.u.

$f_{X_1,X_2}(k) = P(X_1 + X_2 = k) = P(\bigcup_{i=0}^{k}\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = k-i\})$

$= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i, X_2 = k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k-i)$

$= \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) f_{X_2}(k-i)$

Aufgabe 29

(a) $Bin(n_1, p) * Bin(n_2, p)$?

Zunächst: $Bin(n_1, p) * Bin(1, p) \stackrel{!}{=} Bin(n_1 + 1, p)$

$f_{X_1+X_2}(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) \cdot \underbrace{f_{X_2}(k-i)}_{\neq 0 \Leftrightarrow i \in \{k, k-1\}}$

$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}(1-p) + \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} p$

$= p^k (1-p)^{n-k+1} [\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}] = p^k (1-p)^{n-k+1} \binom{n+1}{k}$

$\Rightarrow$ ist Verteilung von einer $Bin(n+1, p)$ verteilten Zufallsvariablen

$Bin(n_1, p) = \underbrace{Bin(1,p) * Bin(1,p) * ... * Bin(1,p)}_{n_1 - mal}$

$= Bin(n_1, p) * Bin(n_2, p) = \underbrace{Bin(1,p) * ... * Bin(1,p)}_{n_1 . mal} * \underbrace{Bin(1,p) * ... * Bin(1,p)}_{n_2 . mal}$

$= Bin(n_1 + n_2, p)$

(b) $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$

$X_2 \sim Poi(\lambda_2)$

$f_{X_1+X_2}(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) f_{X_2}(k-i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}$

$= e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} \frac{k!}{k!} = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}$

$\underbrace{=}_{binom.Formel} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k$

$X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

(c) $X_1 \sim \overline{Bin}(n_1,p), X_2 \sim \overline{Bin}(n_2,p)$

$\overline{Bin}(n_1,p) * \overline{Bin}(n_2,p) = \underbrace{Geo(p) * ... * Geo(p)}_{n_1-mal} * \underbrace{Geo(p) * ... * Geo(p)}_{n_2-mal}$

$= \overline{Bin}(n_1+n_2,p)$

Aufgabe 30

$X \sim Exp(\lambda)$

$Y \sim R(0,1) \quad X,Y$ s.u.

$Z = \frac{X}{Y}$

$f_Z(z) = \int_0^\infty t f_X(zt) f_Y(t) dt \mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z)$

$= \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda zt}\mathfrak{I}_{(0,1)}(t)\, dt \mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z) = \int_0^1 \underbrace{t}_{u} \lambda \underbrace{e^{-\lambda zt}}_{v'} dt \mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z)$

$= \lambda[[-t\frac{1}{\lambda z}e^{-\lambda zt}]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\lambda z}e^{-\lambda zt}dt]\mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z)$

$= \lambda[-\frac{1}{\lambda z}e^{-\lambda z} + [-\frac{1}{(\lambda t)^2}e^{-\lambda zt}]_0^1]\mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z)$

$= \lambda[-\frac{1}{\lambda z}e^{-\lambda z} + \frac{1}{(\lambda t)^2} - \frac{1}{(\lambda z)^2}e^{-\lambda z}]\mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z)$

$= \frac{1}{\lambda z^2} - \frac{1}{z}(1+\frac{1}{\lambda z})e^{-\lambda z}\mathfrak{I}_{(0,\infty)}(z)$

$E(Z) = \int_{-\infty}^\infty z f_Z(z) dz = \int_0^\infty z(\frac{1}{\lambda z^2} - \frac{1}{z}(1+\frac{1}{\lambda z})e^{-\lambda z})dz$

$= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda Z} - (1+\frac{1}{\lambda z})e^{-\lambda z}dz$

$= -\int_0^\infty e^{-\lambda z}dz + \int_0^\infty \frac{1-e^{-\lambda z}}{\lambda z}dz$

$$= \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda z}dz}_{=c} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1-e^{-\lambda z}}{\lambda z}dz}_{>0=c'} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1-e^{-\lambda z}}{\lambda z}dz}_{\frac{1}{\lambda}\int_1^\infty \frac{1-e^{-\lambda z}}{z} > \frac{1}{\lambda}\int_1^\infty \frac{1-e^{-\lambda}}{z}dz = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{z}dz}_{=\infty}}$$

$\Rightarrow$ EW existiert nicht

Aufgabe 31

(a) $Z = max\{X, Y\} \quad X, Y \sim R(0,1)$

$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(max\{X, Y\} \leq x)$

$= P(X \leq x, Y \leq x) \underbrace{=}_{s.u.} P(X \leq x)P(Y \leq x) = P^2(X \leq x)$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$F_X(x) = F_Y(x) = x \cdot \mathfrak{I}_{(0,1)}(x)$

(b) $E(Z) = \underbrace{-\int_{-\infty}^{0} F_Z(x)dx}_{=0} + \int_0^\infty (1 - F_Z(x))dx$

$= \int_0^1 (1 - x^2)dx = [x - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$E(X) = \frac{1}{2} = E(Y)$

$\Rightarrow max\{E(X), E(Y)\} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow E(max\{X, Y\}) \neq max\{E(X), E(Y)\}$

Aufgabe 32

(a) $X \sim Poi(\lambda)$

$E(X) = \sum_{i=0}^\infty i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^\infty i \frac{\lambda^i}{i(i-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda^i}{(i-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \sum_{i=0}^\infty i^2 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^\infty \frac{i\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^\infty \frac{\frac{d}{d\lambda}\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda^i}{(i-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda}(\lambda \sum_{i=0}^\infty \frac{\lambda^i}{i!}) = \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda}(\lambda e^{\lambda}) = \lambda e^{-\lambda}(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda + \lambda^2$

$Var(X) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

Teillösung 9. Übung

12. Juli 2002

Aufgabe 32

b)

$$X \sim \overline{\text{Bin}} = \underbrace{\text{Geo}(p) * \ldots * \text{Geo}(p)}_{n}$$

$$Y_i \sim \text{Geo}(p) \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{s.u.}, \quad X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\text{E}(X) = \text{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{E}\left(Y_i\right) = n\,\text{E}\left(Y_1\right) = \frac{n(1-p)}{p} =: n\frac{q}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \underset{\text{s.u.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}\left(Y_i\right) = n\,\text{Var}\left(Y_1\right)$$

Bezeichnung: $Y = Y_1$

$$\text{Var}(Y) = \text{E}(Y^2) - (\text{E}(Y))^2$$

$$\text{E}(Y^2) = \text{E}(Y(Y-1) + Y) = \text{E}(Y(Y-1)) + \text{E}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)q^k p + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{q}{p} = pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2} q^k + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \sum_{k=2}^{\infty} q^k + \frac{q}{p}$$

$$= pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \frac{q^2}{1-q} + \frac{q}{p} = pq^2 \frac{d}{dq} \frac{2q - q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{p} = 2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Var}(Y) = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Var}(X) = n\frac{1-p}{p^2}$$

c) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
Berechne die Laplace-Transformierte:

$$\begin{aligned}
L(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\, f(x)\, dx \\
&= \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-(\lambda+s)x}\, dx \\
&\quad \text{Substituiere: } (\lambda+s)x = y \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1} e^{-y}\, \frac{1}{\lambda+s}\, dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^\alpha \Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy}_{\Gamma(\alpha)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= -L^{'}(0) = -\left(\alpha\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{\alpha-1}\left(-\frac{\lambda}{(\lambda+s)^2}\right)\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha}{\lambda} \\
\mathrm{E}(X^2) &= L^{''}(0) = \left(-\alpha\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+s)^{\alpha+1}}\right)^{'}\Bigg|_{s=0} \\
&= \left(-\alpha\lambda^\alpha(-\alpha-1)\frac{1}{(\lambda+s)^{\alpha+2}}\right)\Bigg|_{s=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-t}^t \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx \\
&= \left[\ln\frac{1}{2}(1+x^2)\right]_{-t}^t \\
&\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x f_x(x)\, dx = 0 \\
\text{Aber} &: \quad \mathrm{E}(|X|) = 2\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \infty \\
&\Rightarrow \quad \text{Der Erwartungswert existiert nicht.} \\
&\Rightarrow \quad \text{Die Varianz existiert ebenfalls nicht.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 33

a) X, Y absolut-stetig: siehe Skript.
X, Y diskret, mit Träger T_X, T_Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX + bY) &= \sum_{x \in T_X} \sum_{y \in T_Y} (ax + by) P(X = x, Y = y) \\
&= a \sum_{x \in T_X, y \in T_Y} x\, P(X = x, Y = y) + b \sum_{x \in T_X, y \in T_Y} y\, P(X = x, Y = y) \\
&= a \sum_{x \in T_X} x\, P(X = x) + b \sum_{y \in T_Y} y\, P(Y = y) \\
&= a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

b) $X \leq Y \quad \Rightarrow \quad Y - X \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}(Y - X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{X \in T_X, Y \in T_Y} (y - x) P(X = x, Y = y) \ \geq \ 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f_{(X,Y)}(x, y) \ \geq \ 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{mit a)}}{\Rightarrow} \quad \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(Y) \geq E(X).$$

31

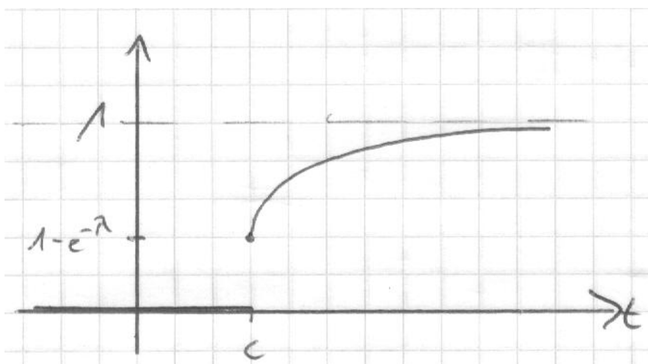
Aufgabe 34

$X \hat{=}$ Gesprächsdauer $\quad X \sim Exp(\lambda)$ (in Minuten)

Minutenpreis: c $K = T(X) = \begin{cases} c & X \leq 1 \\ cX & X > 1 \end{cases} \quad X \geq 0$

$P(K < c) = 0$

$t \geq c \quad P(K \leq t) = P(\frac{K}{c} \leq \frac{t}{c}) = P(X \leq \frac{t}{c}) = 1 - e^{-\frac{\lambda t}{c}}$



Verteilung ist weder diskret noch absolut stetig

$E(K) = -\int_{-\infty}^{0} F_K(t)\,dt + \int_0^\infty (1 - F_K(t))\,dt = 0 + \int_0^\infty (1 - F_K(t))\,dt$

$= \int_0^c 1\,dt + \int_c^\infty e^{-\frac{\lambda t}{c}}\,dt = c + [-\frac{c}{\lambda} e^{-\frac{\lambda t}{c}}]_c^\infty = c + \frac{c}{\lambda} e^{-\lambda}$

$Var(K) = E(K^2) - E(K)^2$

$P(K^2 \leq z) = P(K \leq \sqrt{z}), \quad z \geq 0$

$P(K^2 \leq z) = P(K \leq \sqrt{z}) = \begin{cases} 0 & \sqrt{z} \leq c \Rightarrow z \leq c^2 \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{c}\sqrt{z}} & \sqrt{z} \geq c \Rightarrow z \geq c^2 \end{cases}$

$E(K^2) = -\int_{-\infty}^{0} F_K(z)\,dz + \int_0^\infty (1 - F_{K^2}(z))\,dz = c^2 + \int_{c^2}^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}\sqrt{z}} dz$

$\underbrace{=}_{x=\sqrt{z},\ dz=2xdx} c^2 + \int_c^\infty \underbrace{2x}_{u} \underbrace{e^{-\frac{\lambda}{c}x} dx}_{v'} = c^2 + 2([-x\frac{c}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{c}x}]_c^\infty + \int_c^\infty \frac{c}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{c}x} dx)$

$= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2[-\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\frac{\lambda}{c}x}]_c^\infty$

$= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\lambda}$

$Var(K) = E((K - E(K))^2) = E(K^2) - (E(K))^2$

$= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + c^2\lambda^2 e^{-\lambda} - (c + \frac{c}{\lambda}e^{-\lambda})^2$

$= c^2 + 2\frac{c^2}{\lambda}e^{-\lambda} + 2\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\lambda} - c^2 - 2\frac{c^2}{\lambda^2}e^{-\lambda} - \frac{c^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda} = \frac{c^2}{\lambda^2}(2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda})$

Aufgabe 35

$X_{n+1} = 2X_n - 1 \quad n \in \mathbb{N}_0$

$X_0 \sim R(0,1)$

$Cov(X_{n+k}, X_n) \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

Annahme: $\Rightarrow X_{n+k} = 2^k X_n - 2^k + 1$

Beweis per vollst. Induktion:

Anfang für k=1: $X_{n+1} = 2X_n - 1\surd$

Schritt von k nach k+1: $X_{n+k+1} = 2X_{n+k} - 1 = 2^{k+1}X_n + 1 - 2^{2k+1}\surd$

$Cov(X_{n+k}, X_n) = E((X_{n+k} - E(X_{n+k}))(X_n - E(X_n)))$

$\underbrace{=}_{Annahme} \quad E((2^k X_n - 2^k + 1 - E(2^k X_n - 2^k + 1))(X_n - E(X_n)))$

$= E((2^k X_n - 2^k E(X_n))(X_n - E(X_n)))$

$= 2^k E((X_n - E(X_n))^2) \qquad (\text{ mit } X_n = 2^n X_0 - 2^n + 1)$

$= 2^k E((2^n X_0 - 2^n + 1 - E(2^n X_0 - 2^n + 1))^2)$

$= 2^k E((2^n(X_0 - E(X_0)))^2) = 2^{k+2n}E((X_0 - E(X_0))^2)$

$= 2^{k+2n} \quad \underbrace{Var(X_0)}_{\frac{1}{12}, da\, X_0 \sim R(0,1)} \quad = \frac{1}{12}2^{k+2n}$

Aufgabe 36

$K \sim Bin(n, p)$

G_n sei der Gewinn, $G_n = \sum_{i=1}^{K} iX_i - I_n$

$X_i \sim Bin(1, p) \qquad X_i, K$ s.u.

$E(G_n) = \sum_{k=1}^{n} E(G_n | K = k) P(K = k)$

$= \sum_{k=1}^{n} E(\sum_{i=1}^{k} iX_i - I_n) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i=1}^{k} i \cdot \underbrace{E(X_i)}_{p} - I_n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^{n} (p \frac{k(k+1)}{2} - I_n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^{n} (\frac{k^2 p}{2} + \frac{kp}{2} - I_n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$= \frac{1}{2} p \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{E(K^2)} + \frac{1}{2} p \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{E(K)} - I_n \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{1}$$

$E(K^2) = Var(K) + (E(K))^2 = np(1-p) + n^2 p^2$

$E(G_n) = \frac{1}{2} p (np(1-p) + n^2 p^2 - np) - I_n \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2} n^2 p^3 - \frac{1}{2} np^3 + np^2$

Aufgabe 37

$f_{(X,Y)}(x, y) = 6xy(2 - x - y) \mathfrak{I}_{(0,1)^2}(x, y)$

Gesucht: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 6xy(2 - x - y) \mathfrak{I}_{(0,1)^2}(x, y) dx = \int_0^1 6xy(2 - x - y) dx \mathfrak{I}_{(0,1)}(y)$

$= y(4 - 3y) \mathfrak{I}_{(0,1)}(y)$

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{6xy(2-x-y)\mathfrak{I}_{(0,1)^2}(y)}{y(4-3y)} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} \mathfrak{I}_{(0,1)^2}(x, y)$

$E(X | Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} \mathfrak{I}_{(0,1)^2}(x, y)\, dx = \int_0^1 \frac{6x^2(2-x-y)}{4-3y} dx \mathfrak{I}_{(0,1)}(y)$

$= \int_0^1 \frac{12x^2 - 6x^3 - 6x^2 y}{4-3y} dx \mathfrak{I}_{(0,1)}(y) = \frac{2{,}5-2y}{4-3y} = \frac{5-4y}{8-6y}$

Aufgabe 38

N diskret, Träger $T_N = \mathbb{N}_0$; $\quad X_1, X_2, ...$ iid. $\quad N, X_i$ s.u.$\forall i \in \mathbb{N}$

(a) $E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n) P(N = n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n) P(N = n)$

$E(\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n) \underbrace{=}_{X_i, N\, s.u.} E(\sum_{i=1}^{n} X_i) \underbrace{=}_{X_i iid} nE(X_1)$

$E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \sum_{n=0}^{\infty} nE(X_1) P(N = n)$

$= E(X_1) \sum_{n=0}^{\infty} nP(N = n) = E(N)E(X_1)$

(b) $Var(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E((\sum_{i=1}^{N} X_i)^2) - (E(\sum_{i=1}^{N} X_i))^2$

$E((\sum_{i=1}^{N} X_i)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} E((\sum_{i=1}^{N} X_i)^2 | N = n) P(N = n)$

Da $Var(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) \Leftrightarrow E(Z^2) = Var(Z) + E^2(Z)$

gilt mit $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$E((\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 | N = n) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) + (E(\sum_{i=1}^{n} X_i))^2$

$\underbrace{=}_{X_i\, iid.} n \cdot Var(X_1) + (nE(X_1))^2$

$E((\sum_{i=1}^{N} X_i)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot Var(X_1) + (nE(X_1))^2) P(N = n)$

$= Var(X_1) \sum_{n=0}^{\infty} nP(N = n) + (E(X_1))^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N = n)$

$= Var(X_1)E(N) + (E(X_1))^2 \cdot E(N^2)$

$Var(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E(N)Var(X_1) + E(N^2)(E(X_1))^2 - (E(\sum_{i=1}^{N} X_i))^2$

$= E(N)Var(X_1) + E(N^2)(E(X_1))^2 - (E(N))^2(E(X_1))^2$

$= E(N)Var(X_1) + E(X_1)^2(E(N^2) - (E(N))^2)$

$= E(N)Var(X_1) + E(X_1)^2 Var(N)$

Aufgabe 37*

X_i iid. Gewicht der Männer $E(X_i) = 80 \qquad Var(X_i) = 49$

Y_i iid. Gewicht der Frauen $E(X_i) = 65 \qquad Var(X_i) = 36$

$Z_i \sim Bin(1, \frac{1}{2})$ iid. X_i, Y_i, Z_i s.u.

G_i Gewicht des i-ten Passagiers (mit p=$\frac{1}{2}$ Mann/Frau)

$G_i = Z_i X_i + (1 - Z_i) Y_i \qquad (Z_i$ ist entweder 1 oder 0)

$E(G_i) = E(Z_i X_i + (1 - Z_i) Y_i) = E(Z_i X_i) + E(Y_i) - E(Z_i Y_i)$

$\underbrace{=}_{s.u.} E(Z_i)E(X_i) + E(Y_i) - E(Z_i)E(Y_i) = \frac{1}{2}E(X_i) + E(Y_i) - \frac{1}{2}E(Y_i)$

$= \frac{1}{2}(E(X_i) + E(Y_i)) = 72,5kg$

$E(G_i^2) = E(G_i^2|Z_i = 1) \cdot P(Z_i = 1) + E(G_i^2|Z_i = 0) \cdot P(Z_i = 0)$

$= \frac{1}{2}E(X_i^2) + \frac{1}{2}E(Y_i^2)$

$Var(G_i) = E(G_i^2) - (E(G_i))^2 = \frac{1}{2}E(X_i^2) + \frac{1}{2}E(Y_i^2) - (\frac{1}{2}(E(X_i) + E(Y_i)))^2$

$= \frac{1}{2}(E(X_i^2) - (E(X_i))^2) + \frac{1}{4}E(X_i)^2 + \frac{1}{2}(E(Y_i^2) - E(Y_i)^2) + \frac{1}{4}E(Y_i)^2 + \frac{1}{2}(E(X_i) - E(Y_i))$

$= \frac{1}{2}(Var(X_i) + Var(Y_i) + \frac{1}{2}(E(X_i) - E(Y_i))^2) = 98,75kg^2$

$E(G_i) = 72,5kg \qquad Var(G_i) = 98,75kg^2 \qquad G_i$ s.u.

ZGWS: $P(\sum_{i=1}^{100} G_i > 7500) = 1 - P(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{100}(G_i - E(G_i))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100} Var(G_i)}}}_{Z \sim N(0,1) asymptotisch} \leq \frac{7500 - n \cdot E(G_1)}{\sqrt{n \cdot Var(G_1)}})$

$= 1 - P(Z \leq \frac{7500 - 7250}{\sqrt{9875}}) = 1 - \Phi(2,518) \approx 1 - 0,994 = 0,006$

Aufgabe 38*

$X_1, ..., X_n$ s.u. $n \in \mathbb{N}$ $\qquad X_i$ iid.

$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \forall x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Bestimme max. Likelihood-Schätzer für λ.

Gemeinsame Dichte: $f(x_1, ..., x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^n 2\lambda x_i e^{-\lambda x_i^2} = 2^n \lambda^n \prod_{i=1}^n x_i e^{-\lambda \sum_{j=1}^n x_j^2}$

Likelihood-Funktion: $L(\lambda|x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n|\lambda)$

Bestimme $arg\ max_\lambda L(\lambda|x_1, ..., x_n) \underbrace{=}_{x_i \neq 0 \forall i} arg\ max_\lambda \log L(\lambda|x_1, ..., x_n)$

$\log L(\lambda|x_1, ..., x_n) = n \log 2 + n \log \lambda + \sum_{i=1}^n \log x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$

Bestimme Max.:

$\frac{\partial}{\partial\lambda} \log L(\lambda|x_1, ..., x_n) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i^2 \overset{!}{=} 0$

$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \log L(\lambda|x_1, ..., x_n) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$

$\Rightarrow$ lokales Maximum bei $\hat{\lambda}$

$\Rightarrow$ Funktion ist konvex

$\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $\hat{\lambda}$

$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ist der ML-Schätzer für λ.

Aufgabe 39

$X \sim \mathrm{N}(\Theta, \sigma^2)$

$\Theta \sim \mathrm{N}(\mu, \tau^2)$, sei die a-priori-Verteilung

$$\Rightarrow \quad f_\Theta(\Theta) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\Theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right), \quad f_{x|\Theta}(x|\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\Theta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Theta|x}(\Theta|x) = \frac{f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta)}{\int f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta) d\Theta}$$

es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\Theta)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\Theta-\mu)^2}{2\tau^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\tau^2(x^2 - 2\Theta x + \Theta^2) + \sigma^2(\Theta^2 - 2\Theta\mu + \mu^2)}{2\tau^2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{(\tau^2+\sigma^2)\Theta^2 - \Theta(2\tau^2 x + 2\sigma^2\mu) + x^2\tau^2 + \mu^2\sigma^2)}{2\tau^2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{\left(\Theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2 + g(x,\tau,\mu,\alpha)}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

Der Term $g(x, \tau, \mu, \alpha)$ ist nicht von Θ abhängig.

$\displaystyle\int f_{x|\Theta}(x|\Theta) f_\Theta(\Theta) d\Theta$ normiert $f_{\Theta|x}(\Theta|x)$, somit gilt

$$f_{\Theta|x}(\Theta|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{\left(\Theta - \frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu\right)^2}{2\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)$$

Die Verteilung von Θ unter $X = x$ ist somit eine

$\mathrm{N}\left(\frac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \frac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu, \sqrt{\frac{\tau^2\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}}\right)$-Verteilung

Somit gilt, Bayes-Schätzer $\mathrm{E}(\Theta) = \dfrac{\tau^2}{\tau^2+\sigma^2}x - \dfrac{\sigma^2}{\tau^2+\sigma^2}\mu.$

Aufgabe 40

Gesucht wird Konfidenzintervall $\left[0, \frac{b}{X_1+X_2}\right] = B$ für λ zum Niveau 1-α

$X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ s.u.

$P(\lambda \in B) = 1 - \alpha = 0,9$

$P(0 \leq \lambda \leq \frac{b}{X_1+X_2}) = P(0 \leq \lambda(X_1+X_2) \leq b) = P(0 \leq \underbrace{X_1+X_2}_{\sim Erl(2,\lambda)} \leq \frac{b}{\lambda})$

Sei $Z \sim Erl(2,\lambda)$

$P(\lambda \in B) = P(0 \leq Z \leq \frac{b}{\lambda}) = P(Z \leq \frac{b}{\lambda})$

$$\begin{aligned} 0,9 &= \int_0^{\frac{b}{\lambda}} \lambda^2 \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{v'} dx = \lambda(\left[-x \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^{\frac{b}{\lambda}} + \int_0^{\frac{b}{\lambda}} e^{-\lambda x} dx) \\ &= \lambda(-\frac{b}{\lambda}e^{-b} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-b}) = -b \cdot e^{-b} + 1 - e^{-b} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow e^{-b}(1+b) = \alpha = 0,1$

$\Rightarrow b \approx 3,89$ (numerisch oder grafisch lösen)