Stochastik - Erläuterungen zum Skript

Klaus Ridder (klaus.ridder@gmx.de)

WARNUNG: bisher absolut unkorrigiert und unvollständig!

July 10, 2002

Contents

HINWEIS: Diese Zusammenfassung erhebt weder einen Anspruch auf Korrektheit noch auf Vollständigkeit. Sie enthält genau das, was ich persönlich glaube, verstanden zu haben. Sie ist ausschließlich in Zusammenhang mit dem Sktipt zu verstehen, und soll für die einzelnen Sätze ein paar Erklärungen geben.

1 Einführung

2 σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir betrachten Experimente, bei denen verschiedene **Ergebnisse** auftreten können (z.B. Würfel: 1–6). Wir fassen mögliche Ergebnisse zu **Ereignismengen** zusammen (z.B. $\{1,2\}$ und $\{3,4,5,6\}$).

Zeichen	Bedeutung
ω	**Ergebnis**: Ein Ergebnis des Versuchs (z.B. $\{4\}$)
Ω	**Ergebnismenge**: Alle möglichen Ergebnisse (z.B. $\{$1,2,3,4,5,6$\}$)
A	**Ereignis**: Teilmenge von ω (z.B. $\{$1,2$\}$)
$\mathfrak{P}(\Omega)$	**Ereignismenge**: Alle möglichen Ereignisse (also Potenzmenge von Ω)
$\mathfrak{A}$	Algebra: Ereignismenge, die nicht die ganze Potenzmenge der Ergebnisse enthält (siehe Def. 2.6)

Nun wird jedem Ereignis (also jedem einzelnen Element der Potenzmenge) eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet, wobei

1. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ist, (daraus ergibt sich):
2. Das Komplement eines Ereignisses hat die Wahrscheinlichkeit"1-Wahrscheinlichkeitdes Ereignisses"
3. Die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse addieren sich, wenn diese disjunkt sind.
4. Die Wahrscheinlichkeitaller disjunkten Ereignisse ist die Summe ihrer Wahrscheinlichkeitwen.

2.1 Definition: Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laplace-Verteilung = diskrete Gleichverteilung: Alle Ergebnisse (!) sind gleichwahrscheinlich. (z.B. 1,2,3,4,5,6). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Teilmenge der Ergebnismenge, z.B. (1,2) ist nun

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{MaechtigkeitdesEreignisses}{Ergebnismenge} = \frac{2}{6}$$

2.2 Beispiel: binäre Suche

Wir haben ein Feld mit 2^n Elementen, d.h. wir können es immer mit 1 Pivot-Element in der Mitte halbieren.
A_k ist nun jeweils die Menge der Elemente, die im k-ten Schritt gefunden werden:

A_1	`-------x-------`	1	2^{1-1}
A_2	`---x--- ---x---`	2	2^{2-1}
A_3	`-x- -x- -x- -x-`	4	2^{3-1}
A_4	`x x x x x x x x`	8	2^{4-1}

Da es insgesamt 2^n (8) Felder gibt, ist die Wahrscheinlichkeit für A_k also:

$$P(A_k) = \frac{2^{k-1}}{2^4} \left(= \frac{2^{1-1}}{2^4}, \frac{2^{2-1}}{2^4}, \frac{2^{3-1}}{2^4}, \frac{2^{4-1}}{2^4} \right)$$

Da gilt $2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$, gilt z.B. für die Wahrscheinlichkeit

$$P(B_4) = \frac{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3}{2^4} = \frac{2^4 - 1}{2^4}$$

2.3 Beispiel: Hashing

U: Universum
M: Teilmenge mit **k** Werten, die in einem
a: Hash-Array mit **n** Werten gespeichert werden.
S = Menge der n Speicherplätze.
Ω = Ergebnismenge: Alle Arten, k Daten abzulegen.
gesucht: A_{kn}: Menge aller Arten, die Daten ohne Kollision abzulegen.
Diese Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{A_{kn}}{\Omega} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}$$

Das ist klar, denn im Zähler steht die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente auf n Plätze zu verteilen. (das erste der k Elemente hat n Plätze zur Auswahl, das zweite $(n-1)$, ...

Gleichverteilung

Wenn Ω unendlich ist, oder sogar überabzählbar, oder die Wahrscheinlichkeitnicht gleichverteilt ist, reicht der Laplasche Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht mehr aus.

2.4 Beispiel: unendlicher Münzwurf

Problem:

Wir werfen eine Münze unendlich oft. Jede der unendlichen Wurfserien ist eines der *Ergebnisse.* Wenn man jedem dieser (unendlich vielen) Ergebnisse nun eine Wahrscheinlichkeitgrößer als 0 zuordnet, ist die Gesamtwahrscheinlichkeit der (unendlich vielen) Ergebnisse ∞ , und damit größer 1.

2.5 Beispiel: Gleichverteilung über $[0, 1]$

z.B. die Wahrscheinlichkeitkeit, dass ein Ereignis, das auf jeden Fall zwischen 0 und 1 Uhr eintritt, zwischen 0:20 (a) und 0:40 (b) Uhr eintritt.::

```
0-----a------b------1.
```

Also $P([a, b]) = b - a$.
Diese Wahrscheinlichkeit soll $\sigma-$additiv sein, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung von Ereignissen ist gleich die Summer ihrer Wahrscheinlichkeiten.
Eine solche Funktion existiert nicht:

2.6 $\mathfrak{A}$: σ-Algebra

Daher betrachten wir in Zukunft kleinere Ereignismengen, nicht die ganze Potnzmenge:
Diese Menge von Ereignissen (Teilmengen von Ω) nennt man *"σ-Algebra von Ereignissen über* Ω, und es müssen logischerweise folgendes gelten:

2.6.1 Regeln zur Algebra

1. Alle Ergebnisse Ω müssen in der Algebra $\mathfrak{A}$ enthalten sein. (z.B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

2. Wenn ein Ereignis drin liegt, liegt auch sein Komplement drin ($\{(1, 2)\}$ liegt drin $\rightarrow \{(3, 4, 5, 6)\}$ liegt auch drin)

3. Die Vereinigung beliebiger Ereignisse liegt auch in der Algebra.

2.6.2 Meßraum

Das Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ heisst *Meßraum.*

2.6.3 der Schnitt beliebiger Ereignisse liegt in der Algebra

Mit den DeMorgan-Regeln folgt:

- Beispiel: wir haben die Ereignisse {(1,2),(2,3,4)}.

- Das Komplement jedes Ereignisses liegt in der Algebra {(3,4),(1)}, und somit auch jede Vereinigung von Komplementen {(1,3,4)}.

- Damit liegt auch das Komplement der Vereinigung beliebiger Komplemente in der Algebra. {(2)}

- *Damit liegt der Schnitt beliebiger Ereignisse in der Algebra.*

σ - Algebren enthalten alle Ereignisse, die durch Verknüpfungen mit "nicht", "oder", "und" entstehen.

2.7 Beispiele für σ - Algebren

- Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ heißt "*feinste σ - Algebra*".
- Die Ergebnismenge, vereinigt mit der leeren Menge, heißt "*gröbste σ - Algebra*".
- Die Ergebnismenge {"natürliche Zahlen","gerade Zahlen","ungerade Zahlen","leere Menge"} ist eine Algebra.
- Die Ergebnismenge "zusammenhängende Ausschnitte aus $\mathbb{R}$ ist keine σ - Algebra, da 2 nicht zusammenhängende Ausschnitte vereinigt nicht wieder in der Algebra liegen.

2.8 Lemma: "die von ε erzteugte σ - Algebra"

Wenn ε eine Teilmenge der Potenzmenge von Ω ist, heißt die kleinste Algebra, die all diese Ereignisse enthält, "*die von ε erzeugte σ - Algebra*".

2.9 Definition: Borelsche σ -Algebra

Die *Borelsche σ -Algebra* (über $\mathbb{R}^n$) ist die kleinste σ -Algebra , die alle offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält.

2.10 Definition: Wahrscheinlichkeitsraum

$\mathfrak{A}$ Eine Abbildung heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$**, wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse 1 sind, und Wahrscheinlichkeitder Vereinigung aller Ereignisse gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind. (klar.)

Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** P, zusammen mit der **Sigma-Algebra** $\mathfrak{A}$ und der **Ergebnismenge** Ω heißt *Wahrscheinlichkeitsraum.*

Der Laplasche Wahrscheinlichkeitsbegriff ist ein Speziallfall hiervon: Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung aller Laplaceschen Ereignisse ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse (klar).

Aufsteigende Ereignisse

Eine Folge von Ereignissen heißt aufsteigend, wenn ein Ereignis jeweils das vorherige (und damit auch alle vorherigen) ethält; die Ereignisse also praktsich "geschachtelt" sind.

Die Vereinigung aller (verschachtelten) Ereignisse, also der Ereignisfolge, nennen wir den **Limes der Mengenfolge** A_n.

2.11 Lemma: Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1. Die Wahrscheinlichkeitdes Komplements eines Ereignisses = 1 - Wahrscheinlichkeitdes Ereignisses.

2. Die Wahrscheinlichkeitder Vereinigung zweier Wahrscheinlichkeiten = Die Summe der Wahrscheinlichkeiten - Schnittmenge der Wahrscheinlichkeiten.

3. Wenn ein Ereignis A Teilmenge des Eregnisses B ist, ist die Wahrscheinlichkeitfür A $\leq$ der Wahrscheinlichkeitfür B.

4. Ist A Teilmenge von B, muss man, um die Wahrscheinlichkeitvon B ohne A zu bekommen, die Wahrscheinlichkeitvon A von der Wahrscheinlichkeitvon B abziehen.

5. Wenn wir ineinander verschachtelte Ereignisse haben, ist die Wahrscheinlichkeitdes größten Ereignisses gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten bis zu diesem größten Ereignis. (klar).

2.12 Siebformel von Poincare-Sylvester

Erst alle Mengen addieren, dann die Überschneidungen von jeweils 2 Mengen subtrahieren, dann die Überschneidungen von jeweils 3 Mengen wieder addieren, etc.

Bonferroni-Ungleichung

Alle Mengen addiert ist eine obere Schranke der Vereinigung, wenn man alle Zweier-Überschneidungen subtrahiert, erhält man eine unterer Schranke, wenn man nun alle 3-er Überschneidungen wieder addiert, erhält man eine (kleinere) obere Schranke, etc.

2.13 Beispiel: Recontre-Problem

gegeben: Plätze $1 - n$, Elemente $1 - n$.

A_j = Ereignis, bei dem das j-te Element vorsortiert ist.
A_{i_j} = Ereignis, bei dem das i_j-te Element vorsortiert ist.

gesucht:
Teil A: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Element an der richtigen Position ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die ersten l Elemente an der richtigen Position befinden, ist

$$\frac{(n-l)!}{n!}$$

da die ersten l Elemente fest liegen, und man alle darauflogenden $(n-1)$ beliebig permutieren kann.
Es gibt

$$\binom{n}{l}$$

Möglichkeiten, l Elemente aus n auszuwählen.
Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens ein Element an der richtigen Position befindet:

$$\binom{n}{l} \cdot \frac{(n-l)!}{n!} = \frac{\binom{n}{l}}{\binom{n}{l} \cdot l!} = \frac{1}{l!}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mind. ein Element an der richtigen Stelle ist (also – für ein beliebiges j – jeweils das j-te Element an der richtigen Stelle ist), muss mit der Siebformel ermittelt werden:

Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass ein Element an der richtigen Stelle steht
− Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass mind. 2 Elemente an der richtigen Stelle stehen
+ Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass mind. 3 Elemente an der richtigen Stelle stehen …

Dies ist dann nach der vorherigen Formel

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

Für $n \to \infty$ konvertiert dies (mit der Magie der Analysis) gegen $1 - e^{-1} \approx 0,6321$.

Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, ob mindestens ein Element in einem Feld der Länge n an der richtigen Position ist, für große n fast unabhängig von n ist.

Teil B: Wie wir oben gezeigt haben, ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens k Elemente vorsortiert sind,

$$\frac{1}{k!}$$

.

Teil C:

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Feld $n-k$ kein Element vorsortiert ist, ist genau $1-$ der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Element vorsortiert ist, und das haben haben wir oben ausgerechtet, also ist es

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

. Multipliziert mit der Anzahl aller Anordnungen von $n-k$ Elementen, haben wir also so viele Anordnungen, in denen kein Element vorsortiert ist:

$$(n-k)! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

Nun können wir diese $n-k$ Elemente, die alle nicht vorsortiert sind, noch auf $\binom{n}{k}$ Arten auf das Feld mit n Elementen aufteilen. Das ganze dann durch die Anzahl aller Möglichkeiten($n!$) ergibt also die *Wahrscheinlichkeit, dass k Elemente vorsortiert sind*:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\binom{n}{k}(n-k!)\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right).
\end{aligned}$$

2.14 Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung, dass B gilt (z.B. dass Chips defekt sind, wenn sie von Fa. B kommen).

Dies heisst "*bedingte Wahrscheinlichkeit unter der Hypothese B*". Dies ist die Wahrscheinlichkeit von (A geschnitten B) durch die Wahrscheinlichkeit von B.

2.15 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\forall A \in \mathfrak{A} : \quad P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

Die Summe der Produkte der Wahrscheinlichkeiten unter einer Hypothese und der Wahrscheinlichkeit der Hypothese ist gleich der Gesemtwahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip von irgendwem defekt ist
= Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip von Intel defekt ist · der Wahrscheinlichkeit dass der Chip von Intel kommt
+ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip von AMD defekt ist · der Wahrscheinlichkeit dass der Chip von AMD kommt.

Bayes-Formel

direkt herleitbar aus den oben genannten Sätzen:

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n) \cdot P(B_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

2.16 stochastische Unabhängigkeit

$$P(A)\,P(B) = P(A \cap B).$$

Wenn man mehrere Ereignisse hat, die voneinander unabhängig sind (es regnet, Windows stürzt ab, ein Glas kippt um) ist die Wahrscheinlichkeit , dass alle Ereignisse eintreten, das Produkt der Wahrscheinlichkeiten. (es regnet, Windows stürzt ab und ein Glas kippt um).

2.17 Lemma: Die Komplementbildung erhält die stochastische Unabhängigkeit

Wenn man von einem der Ereignisse das Komplement bildet, sind die Ereignisse immer noch stochastisch unabhängig (klar).

2.18 Beispiel: Netzwerk

ein schönes Beispiel, siehe Skript.

2.19 Beispiel: unendlicher Münzwurf

Ereignis A_n = im n-ten Wurf fällt Kopf.// Es fällt unendlich oft Kopf = Für jedes beliebig große k fällt danach immer noch mind. 1x Kopf.

2.20 Definition Limes superior, Limex inferior

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \text{ heißt } \textit{Limes superior} \text{ der Mengenfolge } \{A_n\} \\ \liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \text{ heißt } \textit{Limes inferior} \text{ der Mengenfolge } \{A_n\} \end{aligned} \tag{1}$$

$lim.sup.$: ein Ereignis tritt **unendlich oft** ein. $im.inf.$: d.h., ein Ereignis tritt **endlich oft** ein.
WICHTIG !!!

2.21 Borel-Cantelli-Lemma

Wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Ereignisfolge $< \infty$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit des limes superior **0**.
Wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Ereignisfolge mit *stochastisch unabhängigen (!) Ereignissen* $= \infty$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit des limes superior **1**. .

3 Zufallsvariablen und ihre Verteilung

3.1 Diskrete Verteilunbgen, Zufallsvariablen

$P(X)$
Eine Abbildug $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *diskrete Zufallsvariable*, falls jedes Urbild eines Elementes aus der borelschen σ - Algebra ein Ereignis ist. Diese Bedingung heiss *Messbarkeit.* (keine Angst; hab ich auch nicht verstanden.)

3.2 Lemma: Verteilung der Zufallsvariablen X

$P^X(B) = P(X \in B)$ heißt Verteilung der Zufallsvariablen X.

3.3 Binominalverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

klar.

3.4 Diskrete Verteilungen, Zufallsvariablen, Zähldichte

Anschaulich kann man sagen, dass X eine endliche Menge ist, die man aufzählen kann (z.B. Würfelaugen: $1, 2, 3$). Der "*Träger T*" ist hierbei die Grundmenge, aus der X genommen wird (z.B. alle Augen $1, 2, 3, 4, 5, 6$).

$(A \cap T) = (A)$, klar, weil A Teilmenge von T.

d.h. (nach endlich vielen Schritten): Die Verteilung P^X von X ist eindeutig festgelegt durch die $P(X = t_i)$; $i = 1, 2, ...$

3.5 Definition Zähldichte

Wenn man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Trägerpunkte (die in unserer Teilmenge A enthalten sind) addiert, erhält man die **Zähldichte**. (z.B. $3 \cdot \frac{1}{6}$ für die Augen $1, 2, 3$).

3.6 Beispiel: geometrische Verteilung

Frage: "Wann fällt zum ersten mal Kopf?" $\rightarrow$geometrische Verteilung
Träger $T = \mathbb{N}_0$.
$P(X = k)$: Wahrscheinlichkeit, k Würfe zu warten: dies umfasst alle Ergebnisse, in denen vor k nur Nullen auftreten, und k eine 1 ist, also die "Zähldichte":

$$f_x(k) = (1-p)^k \cdot p$$

3.7 Beispiel: Poissonverteilung, Gesetz seltener Ereignisse

Diese Näherung kann man verwenden, wenn $n \cdot p_n$ für $n \to \infty$ gegen einen Wert λ konvergiert:

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

3.8 Definition Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktionen sind

- monoton steigend
- streben gegen 1
- sind rechtsseitig stetig

3.9 Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$P(X \leq x)$ ist eine Verteilungsfunktion und bedeutet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gesuchter Wert X kleiner als x ist.

3.10 Verteilungsfunktion und Verteilung

. Verteilungsfunktion und Verteilung ist das gleiche

3.11 Beispiel: Veteilungsfunktion

3.11.1 Gleichverteilung

Gleichverteilung, Rechteckverteilung: zwischen 0 und 1 alles gleich verteilt. (wir betrachten die Funktion y=x im Bereich 0 bis 1, sonst ist die Fkt. waagerecht.)

Dies ist eine Verteilugsfunktion:

- rechtsseitig stetig, sogar stetig
- gegen $-\infty \to 0$
- gegen $+\infty \to 1$
- monoton steigend (bewegt sich also nur zwischen 0 und da 1).

Wir zeigen jetzt, dass die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Intervalls zwischen 0 und 1 $(a, b]$ gleich der Länge dieses Intervalls ist, also $b - a$.

Eine Gleichverteilung (Rechteckverteilung) kann man nicht nur zwischen 0 und 1 definieren, sondern auch zwischen beliebigen Intervallen$(a, b]$.

3.11.2 Exponentialverteilung

X heißt *exponentialverteilt*, wenn

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

(siehe Abbildung Skript).

3.11.3 Diskrete Verteilungen

Wir haben beliebige Trägerpunkte auf der x-Achse. Jeder Punkt hat seine Wahrscheinlichkeit:

$$f_X(t_k) = p_k, \qquad p_k \geq 0$$

Summe der Wahrscheinlichkeiten ist 1.

Wir haben dann eine "Treppenpunktion": Die Einfach die Wahrscheinlichkeiten als Punkte eintragen, und von den Punkten aus die Linien waagerecht nach rechts verlängern bis zum nächsten Punkt; dort ist dann ein Sprung.

3.11.4 Beispiel: geometrische Verteilung

(Die geometrische Verteilung war die Wartezeit bis zur ersten 1 beim Münzwurf.)

$$f_X(k) = (1-p)^k p, \quad k \in \mathbb{N}_0 \ (0 < p \leq 1)$$

Die Summe all dieser Wahrscheinlichkeiten ist, wie man ausrechnen kann (siehe Skript):

$$1 - (1-p)^{k+1}$$

3.12 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch Verteilungsfunktionen

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

und a kleiner b.

Nehmen wir eine Zahlenfolge a_n, die von links gegen a strebt (immer kleiner werdende Intervalle zu a). Dann ist der limes $n \to \infty = a$.

Dies bedeutet: Bei einer stetigen Funktion ist die Wahrscheinlichkeit für einzelne Punkte immer 0.

Wenn wir jedoch einen "Sprung" in der Funktion haben, ist die Wahrscheinlichkeit für dein eizelnen Sprungpunkt die Höhe des Sprunges. (Siehe Abbildung im Skript).

MERKE:

Wahrscheinlichkeit eines offenen Intervalls: Punkt bis rechtsseitiger Grenzwert,

Wahrscheinlichkeit eines geschlossenen Intervalls: Punkt bis linksseitiger Grenzwert.

Ich suche die Zeit α, so dass die Bedienzeit eines Servers zu 99% kürzer ist als diese Zeit α, also:

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha$$

3.12.1 α-Quantil:

D as kleinste x mit der Eigenschaft, dass der sein Funktionswert größer als α ist. Dieses

$$F_x^-(t)$$

heißt *Pseudoinverse* von F_X.

Falls F invertierbar ist, kann man natürlich auch die Inverse nehmen.

3.12.2 Median:

$\alpha = \frac{1}{2}$: Das kleinste x, ab dem die Funktion $\geq \frac{1}{2}$ ist.

3.12.3 Beispiel mittlere Studienzeit

Dies wird bei der Berechnung der mittleren Studienzeit verwendet, da hier die großen Ausreißer mit 100 Semestern nicht so ins Gewicht fallen.

3.13 Erzeugende Funktionen

$f_X(t_k)$ =Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable den Wert t_k annimmt.

Bei diskreten Zufallsvariablen ordnen wir jedem Ergebnis (z.B. Würfelwurf 1,2,3,4,5,6) eine Wahrscheinlichkeit p zu. Wir haben also eine Folge von p-Werten. Daraus können wir eine "erzeugende Funktion" bilden, d.h. diese einzelnen Werte in eine Potenzreihe abbilden:

$$G_X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \ |z| < 1,$$

Wir wie bereits in Diskrete Strukturen gelernt haben, ist dies eine bijektive Abbildung, d.h. aus dieser Funktion $G_X(z)$ lassen sich eindeutig wieder die einzelnen Wahrscheinlichkeitswerte herleiten.

Beispiel Würfelwurf mit 2 Würfeln:
p(2) = 1/36
p(3) = 2/36
p(4) = 3/36
p(5) = 4/36
p(6) = 5/36
p(7) = 6/36
p(8) = 5/36
p(9) = 4/36
p(10) = 3/36
p(11) = 2/36
p(12) = 1/36

Die zugehörige erzeugende Funktion lautet dann:

$$\frac{1}{36} \cdot z^2 + \frac{2}{36} \cdot z^3 + \cdots + \frac{1}{36} \cdot z^{12}$$

3.14 Laplace-Transformierte

Was für diskrete Zufallsvariablen die erzeugende Funktion ist, ist für stetige Zufallsvariablen die Laplace-Transformierte.

Die Laplace-transformierte ist das Integral über (Dichte * e^{-sx}, wobei $s > 0$ ist.

WICHTIG: DIe Transformierte bestimmten die Verteilung eindeutig!

3.15 Satz: Inversionsformeln

Aus einer erzeúgenden Funktion kann man folgendermaßen wieder die Zäldichte zurückgewinnen:

$$P(X = t_k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0).$$

Auch aus einer Laplace-transformierten kann man wieder die Dichte zurückgewinnen:

$$f_X(x) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iy}^{c+iy} e^{sx} L_X(s) ds \quad \forall c \in \mathbb{R}$$