Stochastik Übung 3. Mai 2001

geTEXt von Matthias Hensler

3. Mai 2001

Korrektur zu 2c

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \omega_i \in \{1, \dots, n\} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

$$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | \exists i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i \neq j$$

so daß $\omega_i = \omega_j$ und $\omega_i \neq \omega_k, \omega_k \neq \omega_l \forall k, l \in \{1, \dots, n\}$ mit $j, i \neq k; k \neq l\}$

$$|A| = n \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{2} (n-2)! = n! \binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)n!$$

Aufgabe 4

Bezeichne x die Ankunftszeit von A, y die Ankunftszeit von B. Wartezeit: $z = |x - y|$.

4.a

Damit sie sich treffen: $|x - y| \leq 10$.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 60; 0 \leq y \leq 60\}$$

$$T = \{(x, y) \in \Omega | |x - y| \leq 10\}$$

$$\begin{aligned} |x - y| \leq 10 &\Leftrightarrow (x - y \leq 10 \wedge x - y \geq -10) \\ &\Leftrightarrow (y \geq x - 10 \wedge y \leq x + 10) \end{aligned}$$

$\mu(\Omega) = 60^2, \mu(T) = 60^2 - 2\left(\frac{1}{2} \cdot 50^2\right)$

$$P(T) = \frac{\mu(T)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} \approx 0,306$$

4.b

$$T_2 = \{(x,y) \in \Omega | x \leq y + 20 \wedge y \leq x + 5\} = \{(x,y) \in \Omega | x - 20 \leq y \leq x + 5\}$$

$$\mu(T_2) = 60^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 40^2 + \frac{1}{2} 55^2\right)$$

$$\Rightarrow P(T) = \frac{\mu(T_2)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 40^2 + \frac{1}{2} \cdot 55^2\right)}{60^2} = \frac{103}{288} \approx 0,358$$

Aufgabe 5

5.a

$\Omega, I \neq \emptyset$ $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ Familie von σ-Algebren über Ω.
zu zeigen: $\mathfrak{a} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ ist σ-Algebra.

dazu:

1. zu zeigen: $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$
   $\forall i \in I : \Omega \in \mathfrak{a}_i \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$

2. $A \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i \Rightarrow A^C \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$
   $\Rightarrow \forall i : A \in \mathfrak{a}_i \Rightarrow \forall i\ A_i^C \in \mathfrak{a}_i$
   $\Rightarrow A^C \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}$

3. zu zeigen: $A_k\ in \mathfrak{a}, k \in \mathrm{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{a}$
   dazu: $\forall k \in \mathrm{n} : A_k \in \mathfrak{a}$
   $\Rightarrow \forall i \in I, k \in \mathrm{N} : A_k \in \mathfrak{a}_i$
   $\Rightarrow \forall i \in I : \bigcup_{k \in \mathrm{N}} A_k \in \mathfrak{a}_i$
   $\bigcup_{k \in \mathrm{N}} A_k \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \quad \square$

5.b

Gegenbeispiel: $I = \{1, 2\}, \Omega = \{1, 2, 3\}$.
$\mathfrak{a}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\mathfrak{a}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist keine σ-Algebra: $\{1, 3\} \cup \{2, 3\} \in \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2$ (Widerspruch).

Aufgabe 6

$$(\Omega, \mathfrak{a}, P) \text{ und } A, B \in \mathfrak{a}$$

6.a

zu zeigen: $P(A^C) = 1 - P(A)$.
dazu: $1 \underset{Def.2.10(i)}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^C) \underset{Def.2.10(ii)}{\overset{*}{=}} P(A) + P(A^C) \qquad \square$

Bemerkung: Aus $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ folgt (*) mit $A_n = \emptyset\, \forall n > m$

6.b

zu zeigen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
dazu: $P(A \cup B) = P(A \cup B \backslash A) = P(A) + P(B \backslash A) = P(A) + P(B \backslash (A \cap B)) \underset{6.d}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \square$

6.c

zu zeigen: $P(A) \leq P(B)$ für $A \subset B$.
dazu: $P(B \backslash A) \underset{6.d}{=} P(B) - P(A) \geq 0$

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A) \quad \square$$

6.d

zu zeigen: $P(B) - P(A) = P(B \backslash A)$ für $A \subset B$.
dazu: $P(B) \underset{A \subset B}{=} P(A \cup B \backslash A) \underset{Def.2.10(ii)}{=} P(A) + P(B \backslash A)$

6.e

zu zeigen: $\{A_n\}$ absteigend $\Rightarrow P\left(\lim_{n\to\infty}(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
dazu: $\{A_n\}$ absteigend $\Rightarrow \left\{{A_n}^C\right\}$ aufsteigend.

$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^C\right) \underset{Lemma 2.11e)1}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} P({A_n}^C) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \quad \square$

Aufgabe 7

$A, B \in A, \omega$-Raum (Ω, A, P).
zu zeigen: $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$. dazu: $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B) = 1 - P\left((A \cap B^C)^C\right) + P(A^C \cap B) = 1 - P(A^C \cup B) + P(A^C \cap B) \geq 1 - P(A^C) - P(B) = P(A) - P(B)$

$P(A \cup B^C) + P(A^C \cap B) = P(A \cap B^C) + 1 - P(A \cup B^C) \geq 1 - P(A) - P(B^C) = P(B) - P(A)$

daraus folgt: $\geq |P(A) - P(B)|$