Stochastik Übung 26. April 2001

Matthias Hensler

26. April 2001

Aufgabe 1

1a

$$\Omega_I = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in A^n | \omega_i \neq \omega_j \,\text{für}\, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

mit $A = \{1, 2, \ldots, 52\}$, wobei Karten $1 \ldots 13$ Herz, $14 \ldots 26$ Karo, $27 \ldots 39$ Pik, $40 \ldots 52$ Kreuz.

$$|\Omega_I| = \frac{N!}{N - n!} = 52!$$

$A = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{52}) \in \Omega_I | \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13} \leq 13 \leq \omega_{14}, \ldots, \omega_{26} \leq 26 \leq \omega_{27}, \ldots, \omega_{39} \leq 39 \leq \omega_{40}, \ldots, \omega_{52} \leq 52\}$ $|A| = 13! \cdot 13! \cdot 13! \cdot 13! = (13!)^4$ $\Rightarrow P(A) = \frac{(13!)^4}{52!} = 1,86 \cdot 10^{-29}$

1b

$$\Omega_{II} = \left\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13}) \in A'^{13} | \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{13}\right\}$$

Asse haben die Nummern $1 \ldots 4$

$$(\Omega_{II}) = \binom{N}{n} = \binom{52}{13}$$

$$A_2 = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13}) \in \Omega_{II} | \omega_1 \in \{1, 2, 3, 4\}; \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{13} \notin \{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$|A_2| = \binom{4}{1}\binom{48}{12}$$

$$P(A_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \approx 0,44$$

1c

schwarze Karten $S = \{1, 2, \ldots, 26\}$

$A_i = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13}) \in \Omega_{II} | \omega_k \leq 26 \, \forall k \in \{1, 2, \ldots, 13\} k \leq i; \omega_j > 26 \, \forall j \in \{1, 2, \ldots, 13\} j > i\} \hat{=}$ genau i schwarze Karten.

$$|A_i| = \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}$$
$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$
$$|A| = \sum_{i=0}^{4} \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_{II}|} \approx 0,1$$

Aufgabe 2

2a

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \omega_i \in \{1, \dots, n\} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$
$|\Omega| = n^n$
$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | \omega_1 = 1\}$
$|A| = n^{n-1}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

2b

$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | \omega_i \neq 1 \, \forall i = 1, \dots, n\}$
$|A| = (n-1)^n$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$$

2c

$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega | \exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$, so daß $\omega_i = \omega_j$ und $\omega_i \neq \omega_k, \omega_j \neq \omega_k \, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq k, j \neq k\}$
$|A| = n!(n-1)$

$$\Rightarrow P(a) = \frac{(n-1)n!}{n^n}$$

Erklärung: Für die erste Kugel haben wir noch n Plätze zur Verfügung, danach nur noch $(n-1)$ bis wir schließlich für die vorletzte nur noch 2 zur Auswahl haben. Es gilt dann: $n \cdot (n-1) \dots 2 = n \dots 2 \cdot 1 = n!$.

2d

$$n = 4 :\Rightarrow p \approx 0,28$$
$$n = 5 :\Rightarrow p \approx 0,15 \qquad \text{(I.A)}$$

Zeige das es für $n+1 > n$ fallend ist, per vollständiger Induktion:

$$\frac{n!(n-1)}{n^n} < 0,2 \Leftrightarrow 5(n-1)n! < n^n$$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$5n(n+1)!\ 5\cdot n(n+1)n! = 5\cdot n!(n-1)\frac{n}{n-1}(n+1)$
$\underbrace{\leq}_{N} < n^n\frac{n}{n-1}(n+1) \leq (n+1)^{n+1}$

Aufgabe 3

$\Omega_m = \{1,\dots,n\}^m$
Interpretation: $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_m)$ bedeutet, daß Fisch ω_i im i-ten Versuch gefangen wird.
$|\Omega_n| = n^m$

$A_{k,m}$ sei das Ereignis, daß k markierte Fische gezogen werden.

$$A_{k,m} = \{\omega \in \Omega | \{1,\dots,m\} | \omega_i \leq s\}| = k\}$$

Behauptung: $|A_{k,m}| = \begin{cases} n^m \cdot \binom{m}{k}\left(\frac{s}{n}\right)^k\left(1-\frac{s}{n}\right)^{m-k} & \text{für } k\leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis per Induktion über m:
Induktionsanfang: $m = 1$
$A_{0,1} = \{s+1,\dots,n\}$ $A_{1,1} = \{1,\dots,s\}$ $A_{k,1} = \emptyset$ für $k \notin \{0,1\}$

$|A_{k,1}| = \begin{cases} (n-s) & \text{für } k=0 \\ s & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Induktionsschritt: $m \to m+1$:

$n-s$ Möglichkeiten im $(m+1)$-ten Versuch *kein* markierten Fisch zu ziehen
s Möglichkeiten im $(m+1)$-ten Versuch einen Fisch zu ziehen

$$|A_{k,m+1}| = (n-s)|A_{k,m}| + s|A_{k+1,m}|$$

$$\underset{I.V.}{=} (n-s)n^m\binom{m}{k}\left(\frac{s}{n}\right)^k\left(1-\frac{s}{n}\right)^{m-k} + s\cdot n^m\binom{m}{k-1}\left(\frac{s}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)$$

$$= n^m\left(\frac{s}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{m-k}\left[(n-s)\binom{m}{k}\left(\frac{s}{n}\right) + s\binom{m}{k-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)\right]$$

$$= sn^m\left(\frac{s}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{m-k+1}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]$$

$$n^{m+1}\left(\frac{s}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{m-k+1}\binom{m+1}{k} \quad \square$$