**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 26.04.01
bis 15:45 Uhr

## 1. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 1

Bei einem Kartenspiel mit 52 Karten werden an jeden der vier Spieler ($A$, $B$, $C$ und $D$) 13 Karten ausgegeben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

**a)** Spieler $A$ alle Karten der Farbe Herz, $B$ alle der Farbe Karo, $C$ alle der Farbe Pik und $D$ alle der Farbe Kreuz bekommt,

**b)** Spieler $A$ genau ein Ass bekommt,

**c)** Spieler $A$ weniger als fünf schwarze Karten bekommt.

### Aufgabe 2

In $n$ Urnen mit den Nummern 1 bis $n$ werden $n$ Kugeln mit den Nummern 1 bis $n$ zufällig verteilt.

**a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt Kugel 1 in Urne 1?

**b)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt Urne 1 leer?

**c)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt genau eine Urne leer?

**d)** Ab welchem $n$ ist die Wahrscheinlichkeit $p$ für genau eine leere Urne kleiner als 0.2?

### Aufgabe 3

In einem Teich befindet sich eine unbekannte Anzahl $n \in \mathbb{N}$ von Fischen. Um an eine Schätzung für $n$ zu gelangen, geht man z. B. wie folgt vor:
Zunächst werden $s \leq n$ Fische gefangen und markiert. Die markierten Fische werden anschließend zurück in den Teich geworfen. Nach einiger Zeit werden $m$ Fische gefangen, wobei die Fische einzeln gefangen werden und jeder Fisch, nachdem notiert worden ist, ob er markiert ist oder nicht, in den Teich zurückgeworfen wird (Ziehen mit Zurücklegen). Bei diesem Vorgehen seien $k$ markierte Fische beobachtet worden. Nun bestimmt man $n^*$, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, $k$ markierte Fische zu beobachten, maximal wird.

**a)** Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von $n$, $s$, $m$ und $k$) die Wahrscheinlichkeit, daß unter $m$ gefangenen Fischen $k$ markiert sind.

**b)** Bestimmen Sie $n^* \in \mathbb{N}$, so daß die in a) bestimmte Wahrscheinlichkeit für gegebenes $s$, $m$ und $0 < k < m$ maximal wird. Was erhält man für $k \in \{0, m\}$?

## Aufgabe 27

**a)** Ein Zufallszahlengenerator auf einem Computer liefert auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallszahlen, $X \sim R(0, 1)$. Für eine Simulation werden standardnormalverteilte Zufallszahlen benötigt, die aus diesen berechnet werden sollen.
Ist eine Zufallszahl $Y := e^{-X^2}$ standardnormalverteilt?
Wie sieht die Dichtefunktion von $Y$ aus?

**b)** Zeigen Sie, dass Sie aus zwei stochastisch unabhängigen gleichverteilten Zufallszahlen $X_1, X_2 \sim R(0, 1)$ durch die Transformation

$$Y_1 = \sqrt{-2 \ln X_1} \sin(2\pi X_2)$$
$$Y_2 = \sqrt{-2 \ln X_1} \cos(2\pi X_2)$$

zwei standardnormalverteile stochastisch unabhängige Zufallszahlen $Y_1, Y_2 \sim N(0, 1)$ erhalten (*Box/Muller* Verfahren (1958)).

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 03.05.01
bis 15:45 Uhr

## 2. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 4

Zwei Personen A und B verabreden, sich an einem bestimmten Ort zwischen 11 und 12 Uhr zu treffen. Beide kommen irgendwann während dieser Zeitspanne zufällig an. Die Ankunftszeiten der beiden seien unabhängig voneinander.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie sich treffen, falls

**a)** A und B jeweils 10 Minuten warten,

**b)** A nur 5 Minuten und B 20 Minuten wartet?

### Aufgabe 5

$\Omega$ und $I$ seien nichtleere Mengen und $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren über $\Omega$.

**a)** Zeigen Sie, daß $\mathfrak{A} := \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ ebenfalls eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist.
(s. Lemma 2.8 der Vorlesung)

**b)** Ist $\mathfrak{B} := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ stets eine $\sigma$-Algebra?

### Aufgabe 6

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$.
Zeigen Sie (s. Lemma 2.11 der Vorlesung)

**a)** $P(A^C) = 1 - P(A)$,

**b)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

**c)** $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

**d)** $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

**e)** $\{A_n\}$ absteigend $\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

### Aufgabe 7

$A, B \in \mathcal{A}$ seien Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Zeigen Sie:

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B).$$

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 10.05.01
bis 15:45 Uhr

## 3. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 8

Bei der Serienfertigung von Prozessoren werden diese von der Endkontrolle mit der Wahrscheinlichkeit 0,1 als Ausschuss ausgesondert. Eine Überprüfung der Endkontrolle ergab, dass diese fehlerfreie Prozessoren mit der Wahrscheinlichkeit 0,042 und defekte Prozessoren mit der Wahrscheinlichkeit 0,94 als fehlerhaft deklariert.

**a)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prozessor fehlerhaft ist, und mit welcher Warscheinlichkeit wird ein funktionierender bzw. ein fehlerhafter Prozessor falsch deklariert?

**b)** Wie ändert sich das Ergebnis, wenn alle Prozessoren die Kontrolle ein zweites Mal durchlaufen und nur diejenigen Stücke ausgesondert werden, die zweimal als Ausschuss bezeichnet wurden? Dabei sei vorausgesetzt, dass das Ergebnis der ersten Kontrolle auf die zweite Kontrolle keinen Einfluss hat.

### Aufgabe 9

Aus einem Korb mit 4 Bällen, nummeriert mit $\{1, 2, 3, 4\}$, wird zufällig ein Ball entnommen, wobei jeder Ball mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Finden Sie Ereignisse, die paarweise stochastisch unabhängig aber nicht (gemeinsam) stochastisch unabhängig sind.

### Aufgabe 10

Von drei Gefangenen $A$, $B$ und $C$ werden zufällig zwei zur Hinrichtung ausgewählt, der dritte wird begnadigt. $A$ ist neugierig und möchte etwas über sein Schicksal herausfinden, merkt aber, dass der Wärter, der weiß, wer begnadigt wird, seine Frage nicht direkt beantworten darf. Also bittet er den Wärter darum, ihm den Namen eines anderen Gefangenen (also $B$ oder $C$) zu nennen, der hingerichtet wird. Der Wärter, von dem bekannt ist, dass er die Wahrheit sagt, nennt $B$. $A$ ist erleichtert, da sich die Wahrscheinlichkeit seines Überlebens von $1/3$ auf $1/2$ erhöht hat.

**a)** Wie kommt $A$ auf diese Idee?

**b)** Welche Information benötigt man, um zu prüfen, ob $A$ zu Recht erleichtert ist?

**c)** Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die fehlende Information bekannt ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $A$ überlebt, wenn der Wärter $B$ benannt hat.

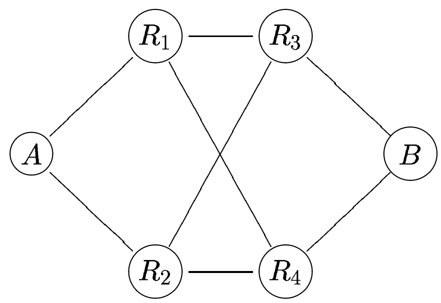
**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 10.05.01
bis 15:45 Uhr



## Aufgabe 11

Bei dem folgenden Netzwerk seien die Router $R_1, R_2, R_3, R_4$ unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p_i$ intakt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ defekt, $0 < p_i < 1$, $1 \leq i \leq 4$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von $A$ nach $B$ eine intakte Verbindung hergestellt werden kann.



**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 17.05.01
bis 15:45 Uhr

## 4. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 12

Gegeben seien zwei Urnen. Urne 1 enthalte $w_1$ weiße und $s_1$ schwarze Kugeln, Urne 2 hingegen $w_2$ weiße und $s_2$ schwarze. Aus einer der Urnen $i$, $i = 1, 2$, die mit Wahrscheinlichkeit $p_i$, $p_1 + p_2 = 1$, gewählt wird, werden $n \leq \min\{w_1 + s_1, w_2 + s_2\}$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Urne $i$ gewählt wurde, wenn $m \leq \min\{w_1, w_2\}$ weiße Kugeln gezogen wurden.

### Aufgabe 13

Eine faire Münze werde unendlich oft geworfen, wobei die Ergebnisse der einzelnen Würfe gemeinsam stochastisch unabhängig seien.

**a)** Zeigen Sie, daß jede endliche Sequenz aus „Kopf“ und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit 1 in der Münzwurffolge auftritt.

**b)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige endliche Sequenz sogar unendlich oft auftritt?

### Aufgabe 14

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

**a)** $X$ ist genau dann eine Zufallsvariable, wenn

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{X \leq \alpha\} := \{X \in (-\infty, \alpha]\} \in \mathfrak{A}$$

gilt.

**b)** Ist $X$ eine Zufallsvariable, dann ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch $a + bX$ eine Zufallsvariable.

**c)** Ist $X$ eine Zufallsvariable, dann ist auch $X^2$ eine Zufallsvariable.

**Hinweis zu a):** Zeigen Sie, daß

$$\mathfrak{X} := \{B \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$$

eine $\sigma$-Algebra über $\mathbb{R}$ ist.

### Aufgabe 15

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ mit Parametern $p \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Modalwerte $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$, dieser Verteilung, d.h. bestimmen Sie alle $k$ für die gilt,

$$P(X = k) \; = \max_{0 \leq k' \leq n} P(X = k'), \qquad \text{mit} \qquad k' \in \mathbb{N}_0.$$

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 25.05.01
bis 10:00 Uhr

## 5. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 16

Es seien $\lambda > 0$ und $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

gilt.

### Aufgabe 17

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

**a)** $F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$ ist eine Verteilungsfunktion (siehe Satz 3.9),

**b)** $P^X = P^Y \Rightarrow F_X = F_Y$ (einfache Richtung von Satz 3.10).

### Aufgabe 18

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilung einer Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$, mit $X \geq 0$, heißt *gedächtnislos*, wenn

$$P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$$

für alle $x, y \geq 0$.
Bestimmen Sie alle gedächnislosen Verteilungen mit stetiger Verteilungsfunktion.
**Hinweis:** Die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y), x, y \geq 0$, hat für stetiges $f$ außer der Nullfunktion nur Lösungen der Form $e^{ax}, a \in \mathbb{R}$.

### Aufgabe 19

Die Dauer eines Telefongesprächs (in Sekunden) sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0,01$.

**a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch

1. mehr als 100 Sekunden,
2. zwischen 25 und 300 Sekunden bzw.
3. höchstens 150 Sekunden

dauert.

**b)** Bestimmen Sie $x$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gespräch höchstens $x$ Sekunden dauert, 0,5 beträgt.

**c)** Bestimmen Sie ein Zeitintervall $(u_1, u_2]$, $0 \leq u_1 < u_2$, kürzester Länge $u = u_2 - u_1$, so dass die Dauer eines Gesprächs mit Wahrscheinlichkeit 0,9 in diesem Intervall liegt.

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 31.05.01
bis 15:45 Uhr

## 6. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 20

Bei der Qualitätskontrolle von Speicherbausteinen hat sich herausgestellt, dass 5% der Bausteine von Anfang an defekt sind und die restlichen eine mit Parameter $\lambda = 0,001$ exponentialverteilte Lebensdauer haben. Mit welcher Verteilungsfunktion würden Sie die Lebensdauer eines zufällig herausgegriffenen Speicherchips beschreiben? Ist die zugehörige Verteilung diskret oder absolut-stetig?

### Aufgabe 21

Ist es möglich, zwei Würfel so zu verfälschen, dass beim unabhängigen Wurf der Würfel alle möglichen Augensummen $(2, \ldots, 12)$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten?

### Aufgabe 18

Ein Programm besteht aus zwei Algorithmen mit Laufzeiten $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$, die nacheinander ausgeführt werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichgkeit $p$, dass die Laufzeit des gesamten Programms kleiner oder gleich 1 ist.

**a)** Bestimmen Sie dazu zunächst die (gemeinsame) Dichte von $(X_1, X_2)$.

**b)** Lösen Sie anschließend die obige Fragestellung, indem Sie die Menge $B = \{(x_1, x_2) \| x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1 + x_2 \leq 1\}$ betrachten und $p := P^{(X_1,X_2)}(B) = P((X_1, X_2) \in B)$ berechnen.

### Aufgabe 19

$X_1, \ldots, X_n$ seien diskrete Zufallsvariablen mit Trägern $T_1, \ldots, T_n$. Beweisen Sie Lemma 4.10 der Vorlesung:
$X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig

$$\Leftrightarrow \; P(X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = t_i) \qquad \forall\, t_i \in T_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 15.06.01
bis 10:00 Uhr

## 7. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 24

Bei einem Rechnernetzwerk werden die Anzahl der aktiven Benutzer und die mittlere Nutzungsdauer durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $N$ und $T$ beschrieben, wobei $N$ poissonverteilt ist mit Parameter $\lambda = 5$ und $T$ exponentialverteilt mit Parameter $\mu = 0,01$.

**a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 4 Benutzer aktiv sind und die mittlere Nutzungsdauer kürzer als 50 Zeiteinheiten ist.

**b)** Im Netzwerk entstehen keine Wartezeiten, wenn $N \leq 12$ und $NT \leq 300$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dies der Fall?

### Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Dichte der Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda) * \Gamma(\beta, \lambda)$
(Beispiel 5.5 der Vorlesung).
**Hinweis:** Benutzen Sie ohne Beweis

$$\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

### Aufgabe 26

Auf einer waagerechten ebenen Fläche befinden sich parallele Linien im Abstand 1. Eine Nadel der Länge 1 wird zufällig auf die Ebene fallen gelassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Linien schneidet, wenn keine Richtung oder Position für die Nadel ausgezeichnet ist?

**Hinweis:**

**a)** Betrachten Sie den Abstand des Zentrums der Nadel als eine und den Winkel zwischen der Nadel und den Linien als zweite Zufallsvariable und bestimmen Sie deren gemeinsame Dichte.

**b)** Überlegen Sie sich anhand einer Zeichung, welche Bedingung für den Winkel und den Abstand gelten muss, damit die Nadel eine Linie schneidet.

**c)** Berechnen Sie anhand dieser Überlegung die gefragte Wahrscheinlichkeit.

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 21.06.01
bis 15:45 Uhr

## 8. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 28

Bestimmen Sie die Zähldichten der folgenden Verteilungen:

**a)** $\mathrm{Bin}(n_1, p) * \mathrm{Bin}(n_2, p), \;\; n_1, n_2 \in \mathbb{N}, 0 \le p \le 1,$

**b)** $\mathrm{Poi}(\lambda_1) * \mathrm{Poi}(\lambda_2), \;\; \lambda_1, \lambda_2 > 0,$

**c)** $\mathrm{Geo}(p) * \ldots * \mathrm{Geo}(p),\ 0 < p < 1,$

**d)** $\overline{\mathrm{Bin}}(n_1, p) * \overline{\mathrm{Bin}}(n_2, p), \;\; n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \; 0 < p < 1.$

### Aufgabe 29

Die Bearbeitungszeiten (in Stunden) anstehender Programme in einer Warteschlange werden durch stochastisch unabhängige Exp(2)-verteilte Zufallsvariablen beschrieben. Ein Server arbeitet die Programme hintereinander ohne Zeitverzug ab. Wieviel Programme dürfen zur Zeit $t$ höchstens anstehen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Warteschlange 6 Stunden später abgearbeitet ist, größer als $0,95$ ist, falls in der Zwischenzeit keine neuen Jobs hinzukommen?

### Aufgabe 30

Beweisen Sie Lemma 5.11 der Vorlesung: $X_1, X_2$ seien stochastisch unabhängige absolut-stetige Zufallsvariablen mit Dichten $f_{X_1}, f_{X_2}$. Es gelte $f_{X_i}(x) = 0$, falls $x \le 0$. Dann gilt:

**a)** $Y = X_1 X_2$ ist absolut-stetig mit Dichte

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f_{X_1}\left(\frac{y}{t}\right) f_{X_2}(t)\,dt\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

**b)** $Z = \frac{X_1}{X_2}$ ist absolut-stetig mit Dichte

$$f_Z(z) = \int_0^\infty t f_{X_1}(zt) f_{X_2}(t)\,dt\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(z).$$

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 28.06.01
bis 15:45 Uhr

## 9. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 31

Bestimmen Sie – falls existent – den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $X$ für

**a)** $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$,

**b)** $X \sim \overline{\mathrm{Bin}}(n, p)$,

**c)** $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$,

**d)** $X$ cauchyverteilt, d.h. $f_X$ definiert durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R},$$

ist eine Dichte der Verteilung von $X$.

**Hinweis:** Berechnen Sie in Teilaufgabe **c** zunächst die Laplace–Transformierte

### Aufgabe 32

Zeigen Sie für absoulut-stetige und für diskrete Zufallsvariablen $X, Y$ die folgenden Eigenschaften des Erwartungswertes (siehe Satz 6.6 a und b):

**a)** $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

**b)** $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$.

### Aufgabe 33

Die Zufallsvariable $T$, welche die Dauer der im Betrieb geführten privaten Telefongespräche beschreibt war bisher exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{2}$. Da dabei einige Gespräche sehr lang dauerten wurde angeordnet jedes Privatgespräch nach spätestens 3 Minuten zu beenden. Berechenen Sie, unter der Annahme, dass sich das Telefonverhalten in den ersten 3 Minuten nicht ändert, alle jedoch die Anweisung befolgen und nach der dritten Minute auflegen, den Erwartungswert der neuen Zufallsvariable $\overline{T}$. Wie ist das Verhältnis $\frac{E[T]}{E[\overline{T}]}$.

### Aufgabe 34

Seinen $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ unabhängig voneinander. Zeigen Sie

$$E[\min\{X, Y\}] \neq \min\{E[X], E[Y]\}$$

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 05.07.01
bis 15:45 Uhr

## 10. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 35

**a)** Seien $X$ und $Y$ stochastisch unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda_1$ bzw. $\lambda_2$. Berechnen Sie die bedingte Zähldichte und den bedingten Erwartungswert von $X$ für festes $X + Y = n$.

**b)** Seien $X, Y \sim \text{Bin}(n, p)$ nun stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Berechnen Sie die bedingte Zähldichte, den bedingten Erwartungswert und den Erwartungswert von $X$ für gegebenes $X + Y = m$.

**Hinweis:** Interpretieren Sie die bedingte Zähldichte in b) als Zähldichte der Verteilung, die Sie erhalten, wenn Sie aus einer Urne mit $n$ roten und $n$ schwarzen Kugeln $m$ Kugeln ohne Zurücklegen ziehen (hypergeometrische Verteilung). Nutzen Sie dieses, um den bedingten Erwartungswert zu bestimmen.

### Aufgabe 36

Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $X$ und $Y$ sei gegeben durch

$$f_{(X,Y)}(x, y) = 6xy(2 - x - y)\mathbb{1}_{(0,1)^2}(x, y).$$

Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von $X$ bei gegebenem $Y = y$, $0 < y < 1$.

### Aufgabe 37

Die Anzahl von Schadensfällen pro Jahr bei einer Versicherung werde beschrieben durch eine diskrete Verteilung $N$ mit Träger $\mathbb{N}_0$. Die stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ bezeichnen die jeweilige Schadenshöhe, wobei die $X_1, X_2, \ldots$ auch von $N$ unabhängig sind.
Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtschadenhöhe gilt:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= E[N]E[X_1], \\ \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E[N]\,\text{Var}(X_1) + (E[X_1])^2\,\text{Var}(N), \end{aligned}$$

wobei gilt $\sum_{i=1}^{0} z_i := 0$.

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 12.07.01
bis 15:45 Uhr

## 11. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 38

Elektrische Impulse erreichen ein Messgerät entsprechend einem Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda$. Die Amplitude dieser Impulse nimmt exponentiell mit der Zeit ab, d.h. ein Puls $i$, der bei seiner Ankunft zur Zeit $S_i$ eine Amplitude von $A_i$ hat, hat zur Zeit $t > S_i$ die Amplitude $A_i(t) = A_i \dot{e}^{-\alpha(t-S_i)}$. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Anfangsamplituden $A_i$ der verschiedenen Pulse stochastich unabhängig identisch verteilt sind, den Erwartungswert der Gesamtamplitude

$$E[A(t)] = \sum_{i=1}^{N(t)} A_i e^{-\alpha t - S_i}.$$

### Aufgabe 39

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\mathrm{Var}(X_n) \leq M < \infty$. Zeigen Sie direkt mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung das *Schwache Gesetz der großen Zahlen*, d. h.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i]) \longrightarrow 0 \text{ P-stochastisch } (n \to \infty).$$

### Aufgabe 40

Seinen $X_2, X_3, \ldots$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, für die gilt

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log(n)}, \; P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n)}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge das schwache, aber nicht das starke Gesetz der großen Zahlen erfüllt, also dass

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i])$$

zwar stochastisch, nicht aber fast sicher gegen 0 konvergiert.

### Aufgabe 41

In einem $n$-dimensionalen Einheitswürfel seien zwei Punkte $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\overline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ gegeben, wobei die $X_i, Y_i$ stochastisch unabhängige, identisch $R(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen sind. Zeigen Sie, dass für den Abstand $D_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)^2}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} E[D_n] = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

**Prof. Dr. R. Mathar**
**Daniel Catrein**

RWTH Aachen, SS 2001
Abgabe: 19.07.01
bis 15:45 Uhr

## 12. Übung zur Einführung in die Stochastik für Informatiker

### Aufgabe 42

Ein Verkehrsflugzeug hat in Abteilung $A$ (vor den Tragflächen) 80 Sitze und in Abteilung $B$ (hinter den Tragflächen) 160 Sitze. Es kann angenommen werden, dass das Gewicht der Passagiere durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_i$ mit $E[X_i] = 75$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 49$ beschrieben werden kann. Das Flugzeug fliegt im optimalen Trimmbereich, wenn das Gesamtgewicht in Abteilung $A$ 6800 kg, in Abteilung $B$ 13600 kg nicht überschreitet und das Gesamtgewicht in Abteilung $B$ höchstens das 2,5-fache des Gesamtgewichts in Abteilung A beträgt. Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass der optimale Trimmbereich verlassen wird.
**Hinweis:** Werten Sie nach dem Anwenden des zentralen Grenzwertsatzes das Integral numerisch aus.

### Aufgabe 43

$X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängig, identisch $R(0, \theta)$-verteilt mit Dichte $f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$, $\theta > 0$. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta$.
Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $E[\alpha\hat{\theta}] = \theta$ für alle $\theta > 0$.
**Hinweis:** Unterscheiden Sie bei der Maximierung von $L(\theta|x_1, \ldots, x_n)$ die Fälle $\theta < \max\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$ und $\theta \geq \max\{x_i | 1 \leq i \leq n\}$

### Aufgabe 44

Sei $f(x) > 0$ für alle $x$. Zeigen Sie, dass $\log f(x)$ seine Maxima an den selben Stellen wie $f(x)$ annimmt.

### Aufgabe 45

Sei $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$ gegeben und fest ist. Die a-priori-Verteilung für $\theta$ sei $N(\mu\tau^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \tau^2 > 0$. Bestimmen Sie einen Bayes-Schätzer $\hat{\theta}$ zu dieser a-priori-Verteilung.