Stochastik

geTeXt von

Frank Eckert
Frank.Eckert@post.rwth-aachen.de

und

Thomas Huppertz
thuppert@fh-niederrhein.de

Letzte Änderung:

4.Juli.2000

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorische Grundformeln

n Stichproben aus $A = \{1 \dots n\}$	mit Zurücklegen (mit Wiederholung)	ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)
in Reihenfolge	N^n	$\frac{N!}{(N-n)!} = \binom{N}{n} n!$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+N-1}{n}$	$\binom{N}{n}$

2 Diskrete Verteilungen

2.1 Verteilung, Erzeugende Funktion und Faltung

	$P(X = k)$	$G_X(z)$	$X_1 + X_2$
Binominalverteilung $X \sim Bin(n, p)$ $X_i \sim Bin(n_i, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\to$ S.22	$(1 - p + pz)^n$ $\to$ Übung	$Bin(n_1 + n_2, p)$ $\to$ S.49
Geom. Verteilung $X \sim Geo(p)$ $X_i \sim Geo(p)$	$(1-p)^k p$ $\to$ S.24	$\frac{p}{1-z+pz}$ $\to$ S.31	$\overline{Bin}(2, p)$ $\to$ S.49
Poissonverteilung $X \sim Poi(\lambda)$ $X_i \sim Poi(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\to$ S.24	$e^{-\lambda(1-z)}$ $\to$ S.32	$Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$ $\to$ S.49

2.2 Erwartungswert und Varianz

	$E(X)$	$Var(X)$
Binominalverteilung $X \sim Bin(n, p)$ $X_i \sim Bin(n_i, p)$	np $\to$ S.60	$np(1-p)$ $\to$ S.60
Geom. Verteilung $X \sim Geo(p)$ $X_i \sim Geo(p)$	$\frac{1-p}{p}$ $\to$ S.54	$-$
Poissonverteilung $X \sim Poi(\lambda)$ $X_i \sim Poi(\lambda)$	λ $\to$ Übung	λ $\to$ Übung

3 Stetige Verteilungen

3.1 Erwartungswert, Dichte, Laplace-Transformierte

	$P(X \leq k)$	$f(x)$	$L_X(s)$
Rechteckverteilung $X \sim R(a,b)$	$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$ → S.26	$\frac{1}{b-a}\ \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$ → S.29	$\frac{1-e^{-s}}{s}$ → S.32
Exponentialverteilung $X \sim Exp(\lambda)$	$1 - e^{-\lambda x}\ \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ → S.26	$\lambda e^{-\lambda x}\ \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$ → S.29	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$ → S.32
Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-(x-\mu)^2}}{2\sigma^2}$ → S.29	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{e^{-(x-\mu)^2}}{2\sigma^2}$ → S.29	$exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t)$ → S.127, Mathar

3.2 Erwartungswert und Varianz

	$E(X)$	$Var(X)$
Rechteckverteilung $X \sim R(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$ → S.127, Mathar	$\frac{(b-a)^2}{12}$ → S.127, Mathar
Exponentialverteilung $X \sim Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$ → S.54	$\frac{1}{\lambda^2}$ → Übung
Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	μ → S.54	σ^2 → S.61

4 Summenformeln

- $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$
- $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
- $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)n$
- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| \leq 1$
- $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2}^y = 1$
- $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k} = (x+y)^n$

5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

- $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \mid B_n) \cdot P(B_n)$
- $P(B_n \mid A) = \frac{P(A|B_n) \cdot P(B_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$, wenn die B_j eine Partition des gesammten W´raumes bilden

6 Erzeugende Funktion und Laplace-Transformierte

6.1 Berechnung ...

- für diskrete Zufallsvariable:
  $G_X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad |z| < 1 \quad$ für $f_X(t_k) = p_k$
- für stetige Zufallsvariable:
  $L_X(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx, \quad s \geq 0 \quad$ für $f_X(x) = 0$, falls $x < 0$

6.2 Inversionsformel

- $P(X = t_k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$
- $f_X(x) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iy}^{c+iy} e^{sx} L_X(s) ds \quad \forall c \in R$

7 Summe von Zufallsvariabeln

- **absolut stetige** Zufallsvariabeln X_1, X_2:
  - $f_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t, y-t)\, dt \quad y \in R$
- **absolut stetige, stochastig unabhängig** :
  - $f_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(y-t)\, dt \quad y \in R$
- Beispiel:
  - $\Gamma(\alpha, \lambda) * \Gamma(\beta, \lambda) = \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$
  - $N(\mu_1, \sigma_1^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
  - $N(0,1) * \ldots * N(0,1) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ für n Stück
  - $Exp(\lambda) * \ldots * Exp(\lambda) = \Gamma(n, \lambda)$ für n Stück
- **diskrete Zufallsvariable**:
  - $f_{X_1+X_2}(k) = \sum_{i=0}^{k} f_{X_1}(i) f_{X_2}(k-i)\, dt \quad k \in N_0$
- Beispiele
  - $Geo(p) * \ldots * Geo(p) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} (1-p)^k p^n = \overline{Bin}(n,p)$ für n Stück
  - $Bin(1,p) * \ldots * Bin(1,p) = Bin(n,p)$ für n Stück
  - $\overline{Bin}(n_1, p) * \overline{Bin}(n_2, p) = \overline{Bin}(n_1 + n_2, p)$
  - $Poi(\lambda_1) * Poi(\lambda_2) = Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$
  - $Poi(\lambda) * \ldots * Poi(\lambda) = Poi(n\lambda)$ n Stück

8 Produkt und Division zweier Zufallsvariabel

Seien X_1, X_2 stochastisch unabhängig, absolut stetig:

- $f_{X_1 \cdot X_2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} f_{X_1}\left(\frac{y}{t}\right) f_{X_2}(t)\, dt \cdot 1_{(0,\infty)}$
- $f_{\frac{X_1}{X_2}} = \int_0^{\infty} t f_{X_1}(yt) f_{X_2}(t)\, dt \cdot 1_{(0,\infty)}$

9 Erwartungswert

9.1 Definition

Ist g eine reelwertige Funktion, dann gilt ...

- diskret:
  $E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot P(X = x_i)$
- stetig:
  $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$

9.2 Eigenschaften des Erwartungswertes

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $P(|X| > c) \leq \frac{E(|X|)}{c} \quad \forall c > 0$
- X, Y stochastisch unabhängig:
  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

9.3 Definitionen zum Erwartungswert

- k-tes Moment: $E(X^k)$
- k-tes zentrales Moment: $E((X - EX)^k)$
- Varianz : $E((X - EX)^2) = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Standardabweichung : $\sqrt{E((X - EX)^2)} = \sqrt{Varr(X)}$
- Kovarianz: $Cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$
- Korrelation: $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$
- $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$
- $Cov(X, X) = E(X^2) - E(X)^2 = Var(X)$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X) \quad \forall a, b \in R$
- $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}$
- $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$
- für paarweise unkorrelierte ZV´en :
  $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

9.4 Erzeugende Funktionen/ Laplace Tranformierte und Erwartungswert

- $G_{X_1+x_2}(z) = G_{X_1}(z) \cdot G_{X_2}(z) \quad |z| \leq 1$
- $L_{X_1+x_2}(z) = L_{X_1}(s) \cdot L_{X_2}(s) \quad |z| \geq 1$
- $E(X) = G'(1)$
- $E(X(X-1)\dots(X-k+1)) = G^{(k)}(1)$
- $E(X^2) = G'(1) + G''(1)$

9.5 Bedingte Verteilungen und Erwartungswerte

9.5.1 diskreter Fall

Sie $f_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ die gemeinsame Verteilung von X und Y

1. bedingte Zähldichte von X unter Y = y

$$f_{X|Y} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f_{(x,y)}(x,y)}{f_Y(y)}$$

falls $f_Y(y) > 0$, sonst beliebige andere Zähldichte

2. Die Zähldicht von X:

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in T_y} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y), \qquad x \in T_X$$

3. bedingter Erwartungswert von g(X) unter Y = y

$$E(g(X)) = \sum_{y \in T_y} E(g(X)|Y = y) f_Y(y)$$

9.5.2 absolut stetiger Fall

Sie $f_{(X,Y)}(x,y)$ die gemeinsame Verteilung von X und Y

1. bedingte Dichte von X unter Y = y

$$f_{X|Y} = \frac{f_{X|Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

falls $f_Y(y) > 0$, sonst beliebige andere Dichte

2. Die Dichte von X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y),\, dy$$

3. bedingter Erwartungswert von g(X) unter Y = y

$$E(g(X)) = \int_{-\infty} \infty E(g(X)|Y = y) f_Y(y)$$