1

Gegeben sei ein Parallelrechner mit 5 Prozessoren und 3 verschiedene Jobs.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es die 3 Jobs auf die 5 Prozessoren zu verteilen, wenn jedem Prozessor höchstens ein Job zugeteilt werden darf? und

(i) die Jobs unterschieden werden

(ii) die Jobs nicht unterschieden werden

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es bei (i) bzw. (ii) dafür, daß die ersten drei Prozessoren zwei Jobs und die restlichen beiden einen Jobs erhalten?

c) Bestimmen Sie unter (i) und (ii) die Wahrscheinlichkeit, daß das in b) beschriebene Ereignis bei einer zufälligen Verteilung der Jobs auftritt.

a) (i) $\frac{5!}{2!} = 60$
(ii) $\binom{5}{3} = 10$

b) (i) $\frac{3!}{1!}\frac{2!}{1!} \cdot 3 = 36$
(ii) $\binom{3}{2}\binom{2}{1} = 6$

c) (i) $\frac{36}{60} = 0,6$
(ii) $\frac{6}{10} = 0,6$

2

Gegeben sind abzählbar viele Urnen $U_n, n \geq 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ∞ viele schwarze Kugeln zu ziehen, wenn aus jeder Urne eine Kugel gezogen wird und

a) in U_n 1 schwarze und $n-1$ weiße Kugeln sind.

b) in U_n 1 schwarze und n^2-1 weiße Kugeln sind.

Hinweis: Borell-Cantelli

2a) $A_k = \{\text{schwarze Kugel aus Urne } k\} = \{w \in \Omega | w_k = 1\}$
$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega_k|} = \frac{1}{k}$
$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
$\Rightarrow P(\limsup A_k) = 1$

2b) $\Omega := \bigtimes_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ mit $\Omega_k := \{i : 1 \leq i \leq k\}$
$w_i = 1$ schwarze, $w_i \neq 1$ weiße
$A_k = \{w \in \Omega | w_k = 1\}$
$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\Omega_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$
$\Rightarrow P(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0$

3

Gegeben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.
Sei $\widetilde{\mathfrak{A}} := \{A \in \mathfrak{A} | P(A) = 0 \vee P(A) = 1\}$
$\mathcal{E} := \{A \in \mathfrak{A} | P(A) = 0\}$
Zeige $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \widetilde{\mathfrak{A}}$
<u>Lösung:</u>
$\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{E} \\ \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}}}$ $\quad \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{E})$ $\quad$ $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ ist σ-Algebra
kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält
Zeige $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ist σ-Algebra

i) $\Omega \in \widetilde{\mathfrak{A}}$, da $P(\Omega) = 1$

ii) $A \in \widetilde{\mathfrak{A}} \Rightarrow P(A) = 1 \vee P(A) = 0 \Rightarrow P(A^C) = 0 \vee P(A^C) = 1 \Rightarrow A^C \in \widetilde{\mathfrak{A}}$

iii) $(A_n) \in \widetilde{\mathfrak{A}}$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \begin{cases} \text{1. Fall: } P(A_n) = 0 \forall n \geq 0, \text{ denn } 0 \leq P(\bigcup A_n) \leq \sum P(A_n) = \sum 0 = 0 \\ \text{2. Fall: } \exists n_0 \text{ mit } P(A_n) = 1 \ldots = 1, \text{ denn } 1 \geq P(\bigcup A_n) \geq P(A_{n_0}) = 1 \end{cases}$$

Insgesamt: $\widetilde{\mathfrak{A}}$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$
$\Rightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{A}(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \widetilde{\mathfrak{A}}$
Zeige: $\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{E})$

$$\text{Sei } A \in \widetilde{\mathfrak{A}} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E}) \\ P(A) = 1 \Rightarrow P(A^C) = 0 \Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}(\mathcal{E}) \Rightarrow A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E}) \end{cases}$$

4

Sei Ω überabzählbar
Zeige:

i) $\mathfrak{A} := \{A \subset \Omega | A \text{ abz. oder } A^C \text{ abz.}\}$ ist σ-Algebra

ii) $P : \mathfrak{A} \to [0,1], A \mapsto \begin{cases} 1, A^C \text{ abz.} \\ 0, A \text{ abz.} \end{cases}$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß

Lösung:

a) (i) $\Omega \in \mathfrak{A}$, da $\emptyset = A^C$ abz

(ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ abz} \Rightarrow A^C \text{ überabz.} \Rightarrow A^C \in \mathfrak{A} \\ A^C \text{ abz} \Rightarrow A \text{ überabz.} \Rightarrow A \in \mathfrak{A} \end{cases}$

(iii) $(A_k) \subset \mathfrak{A}$

1. Fall: A_k abz $\forall k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ abz., denn abzählbare Vereinigung von abz. Mengen ist wieder abzählbar
$\Rightarrow \bigcup A_k \in \mathfrak{A}$

1. Fall: $\exists_0^k$ mit A_{k_0} abz$\Rightarrow A_{k_0}$ überzabzählbar
$(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^C = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^C$ abz.$\Rightarrow (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^C \in \mathfrak{A} \overset{\text{id}}{\Rightarrow} \bigcup A_k \in \mathfrak{A}$

b) (i) $P(\Omega) = 1$, da Ω^C abz.

(ii) $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

5

In Deutschlan seien 8000 der 80 Mio. Einwohner an einem tötlichen Virus erkrankt. Es wurde ein Test für die Krankheit entwickelt, der jedoch in 1% der Fälle ein falsches Ergebnis liefert. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit vom Virus befalen zu sein bei pos. Testergebnis?

Lösung:
$\Omega = \{1, \ldots, 80 \cdot 10^6\}$
A : Vom Virus befallen, $A = \{1, \ldots, 8000\}$
$P(A) = \frac{1}{10000}$
B : positiver Test
$P(B|A) = \frac{99}{100}, \qquad P(B|A^C) = \frac{1}{100}$
$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{99}{100000}$
Gesucht: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)} = \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{10000}}{\frac{99}{100}\frac{1}{10000} + \frac{9999}{10000}\frac{1}{100}} = \frac{99}{10098} = 0,0098$$

Andere Möglichkeit:
$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)$ totale Wahrscheinlichkeit
$P(A|B) = \frac{P(A\cap B}{P(B)}$

$\boxed{6}$

Gegeben seien Zufallsvariablen X mit $P^X = \mathcal{E}_2$, d.h. $P(X=2)=1$, $Y \sim \text{Bin}(1, \frac{1}{3})$, $Z \sim R[-1,1]$ stoch unabh.
Bestimme:

i) $|X|$, $|Y|$, $|Z|$

ii) $X+Y$, $X+Z$, $Y+Z$

iii) X^2, Y^2, Z^2

iv) $2X$, $2Y$, $2Z$

v) $X \cdot Y$, $X \cdot Z$, $Y \cdot Z$

<u>Lösung:</u>

i) $|X| = X$, da $X(w) = 2 = |2| = |X(w)|\ \forall n \in \Omega$
$|Y| = Y$, da $Y(w) \geq 0\ \forall n \in \Omega$
$|Z| = R[0,1]$

$$\begin{aligned} F_{|Z|}(x) &= P(|Z| \leq x) = P((Z \leq x) \wedge (Z \geq -x)) \\ &= P((Z \leq x) \vee (Z \geq -x)) + P(Z \leq x) + P(Z \geq -x) \\ &= \begin{cases} x \leq 0 : -2 \cdot \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1-x) = 0 \\ x \geq 0 : -1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1) = x \end{cases} \\ F_{|Z|} &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_{|Z|} = F'_{|Z|} \Rightarrow f_{|Z|} = \mathbb{1}_{[0,1]} \Rightarrow |Z| \sim R[0,1]$$

ii) $X+Y : P^{X+Y}(2) = \frac{2}{3}$, $P^{X+Y}(3) = \frac{1}{3}$
$P(X+Y=2) = P(X=2, Y=0) = P(X=2)P(Y=0) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$X+Y \ \sim\ R[1,3]$

$$\begin{aligned} F_{X+Z}(x) &= P(X+Z \leq x) = P(2+Z \leq x) \\ &= P(Z \leq x-2) = F_Z(x-2) \end{aligned}$$

$Y+Z \sim \frac{2}{3}R[-1,1] + \frac{1}{3}R[0,2]$

$$f_{Y+Z}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} : x \in [-1,0) \\ \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} : x \in [0,1) \\ \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6} : x \in [1,2) \end{cases}$$

iii) $P^{X^2} = \mathcal{E}_4$, d.h. $P(X^2 = 4) = 1$
$Y^2 = Y$

$$Z^2 : F_{Z^2}(x) = P(Z^2 \leq x) = P(|Z| \leq \sqrt{x} = \begin{cases} x < o : 0 \\ 0 \leq x \leq 1 : \sqrt{x} \\ x \geq 1 : 1 \end{cases}$$

iv) $P^{2X} = E_4$
$P^{2Y}(0) = \frac{2}{3}$ $\quad P^{2Y}(2) = \frac{1}{3}$

$$F_{ZZ}(x) = P(2Z \leq x) = P(Z \leq \tfrac{1}{2}x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, & -2 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_{YZ}(x) = P(YZ \leq x)$$
$$= \begin{cases} x \leq -1 & : \ 0 \\ -1 \leq x < 0 & : \ P(YZ \leq x) = P(Y = 1, Z \leq x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}x \\ 0 \leq x < 1 & : \ P(YZ \leq x) = P(Y = 0) + P(Y = 1, Z \leq x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}x \\ x \geq 1 & : \ 1 \end{cases}$$

7

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, A, B st.-unabh.
<u>Zeige:</u> $P(A \cup B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = P(B)$ und $P(A) \in \{0, 1\}$

„$\Rightarrow$“ $P(A \cup B) = -P(A \cap B) + P(A) + P(B)$
$\Rightarrow P(A) + P(B) = 2 \cdot P(A \cap B) = 2 \cdot P(A) \cdot P(B)$

1. Fall: $P(A) = 0 \Rightarrow P(B) = 0 = P(A)$
2. Fall: $P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 2 \cdot P(B) - 1 \Rightarrow P(B) = 1$
3. Fall: $P(A) \in (0, 1) \Rightarrow 1 + \frac{P(B)}{P(A)} = 2 \cdot P(B)$
   $\Leftrightarrow 1 = 2 \cdot P(B) - \frac{P(B)}{P(A)}$
   $1 = P(B)(2 - \frac{1}{P(A)}) < 1$ Wid.

„$\Leftarrow$“ 1. Fall: $P(A) = 0 = P(B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = P(A) \cdot P(B)$
$= P(A \cap B)$

2. Fall: $P(A) = 1 = P(B) = P(A \cup B) = 1 + 1 - P(A \cap B) = 2 - 1 \cdot 1 = P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B$

q.e.d.

8

Seien X_1, X_2 unabhängig und identisch verteilt.
Zeige oder widerlege:

$$X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_1$$

<u>Dazu:</u> $X_1 \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$

$$P(X_1 \cdot X_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = 1)$$
$$= \tbinom{1}{1}(\tfrac{1}{2})^1(\tfrac{1}{2})^1 \cdot 2\tbinom{2}{2}(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^0 = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}$$
$$P(X_1 \cdot X_1 = 2) = 0$$

9

Seien $m, n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1], X \sim \text{Bin}(n, p), Y \sim \text{Bin}(m, p)$ unabh.
<u>Zeige:</u> $X + Y \sim \text{Bin}(m + n, p)$

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X = j, Y = k - j) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j)P(Y = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \tbinom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j} \tbinom{m}{k-j} p^{k-j} (1 - p)^{m-(k-j)} \\ &= p^k (1 - p)^{n+m-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{n! \cdot m!}{(n-j)! \cdot j! (n-k+j)!(k+j)!} \\ &\stackrel{!}{=} p^k (1 - p)^{n+m-k} \tbinom{n+m}{k} \end{aligned}$$

10

Gegeben Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}^1, P)$ mit $P(A) := \int_A f(\xi)d\xi, A \in \mathfrak{L}^1$, wobei
$f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < b \\ c(\frac{b}{x})^2 & , \quad x \geq b \end{cases}$, $\quad b > 0$ beliebig

a) Bestimme die Konstante c

b) Bestimme die VF $F(x)$

c) Bestimme due Wahrscheinlichkeit der Mengen $[-5, 2b], [4b, 5b][z, \infty)$ $z \in \mathbb{R}$

d) Bestimme $P(A|b)$ für $A = [2b, 3b], B = [2b, \infty)$

a) $1 = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)d\xi = \int_b^\infty c(\frac{b}{\xi}^2 d\xi = c \cdot b^2 \int_b^\infty \frac{1}{\xi} d\xi$
$= c \cdot b^2(0 + \frac{1}{b}) = cb \Leftrightarrow c = \frac{1}{b}$

b) $F_X(x) = P((-\infty, x]) = \begin{cases} X < b & : & 0 \\ X \geq b & : & \int_b^x \frac{b}{\xi} d\xi \end{cases} = \begin{cases} 0 & : & X < b \\ b[-\frac{1}{\xi}]_b^x = b(-\frac{1}{x} + \frac{1}{b}) & : & X \geq b \end{cases}$
$= \begin{cases} 0 & : & X < b \\ 1 - \frac{b}{x} & : & X \geq b \end{cases}$

c) $P([-5, 2b]) = F(2b) - F(-5) = 1 - \frac{b}{2b} - 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$P([4b, 5b]) = 1 - \frac{b}{5b} - 1 + \frac{b}{4b} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$
$P([z, \infty)) = 1 - P((-\infty, z)) = P((-\infty, z]) = 1 - F(z)$

d) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P([2b,3b])}{P([2b,\infty))} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - 1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

11

Gegeben m diskrete Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1), \ldots, (\Omega_m, \mathcal{P}(\Omega_m), P_m)$
<u>Zeige:</u> Es ex. genau eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über

$$(\Omega, \mathfrak{A}) := (\bigtimes_{i=1}^m \Omega_i, \mathcal{P}(\bigtimes_{i=1}^m \Omega_i)) \quad \text{mit} \quad P(\bigtimes_{i=1}^m E_i) = \prod_{i=1}^m P_i(E_i) \quad \forall E_i \in \mathcal{P}(\Omega_i), 1 \leq i \leq m$$

<u>Lösung:</u>
Def. $p : \Omega \to [0, 1], (w_1, \ldots, w_m) \mapsto \prod_{i=1}^m$
$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1], E \mapsto \sum_{(w_1,\ldots,w_m) \in E} P((w_1, \ldots, w_m))$
Zeige p ist zähldichte:

$$\begin{aligned} \sum_{(w_1,\ldots,w_m) \in \Omega} P((w_1, \ldots, w_m)) &= \sum_{(w_1,\ldots,w_m) \in E} \prod_{i=1}^m p_i(w_i) = \sum_{w_1 \in \Omega_1} \cdots \sum_{w_m \in \Omega_m} p_1(w_1) \cdots p_m(w_m) \\ &= \sum_{w_1 \in \Omega_1} \cdot \sum_{w_2 \in \Omega_2} \underbrace{\cdots \underbrace{\sum_{w_m \in \Omega_m}}_{1}}_{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bigtimes_{i=1}^m E_i) &= \sum_{(w_1,\ldots,w_m) \in \bigtimes_{i=1}^m} p((w_1, \ldots, w_m)) = \sum_{w_1 \in E_1} \cdots \sum_{w_m \in E_m} \prod_{i=1}^m p_i(w_i) \\ &= (\sum_{w_1 \in E_1} p_1(w_1)) \cdots (\sum_{w_m \in E_m} p_m(w_m)) = \prod_{i=1}^m p_i(E_i) \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Seien P_1, P_2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen über $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit obigen Bedingungen

$\Longrightarrow \exists$ Zähldichten $p_1, p_2 : \Omega \to [0,1]$ mit $P_k(A) = \sum_{w\in A} p_k(w) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), k = 1,2$
Sei $(w_1, \ldots, w_m) \in \Omega$ beliebig, $E_i := \{w\} \quad 1 \leq i \leq m$
$\Rightarrow p_1((w_1, \ldots, w_m)) = P_1'(\bigtimes_{i=1}^m E_i) = \prod_{i=1}^m p_i(E_i) = P_2'(\bigtimes_{i=1}^m E_i) = p_2((w_1, \ldots, w_m))$
$\Rightarrow P_1 \equiv P_2$

12

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sei eine diskrete 2-dim Zufallsvariable $(X,Y) : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{N}_0^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^2))$ mit Zähldicht

$$p_{ij} = P_{(X,Y)}(\{(i,j)\}) = \begin{cases} c \cdot 2^{-(j+1)} \cdot (1-p)^{i-j} & , \quad i \geq j \\ 0 & , \quad i < j \end{cases} \quad , \ i,j \in \mathbb{N}$$

definiert. Dabei sei $0 < p < 1, c \in \mathbb{R}$

a) Bestimme die Randdichten von P^X, P^Y

b) Berechne den Wert der Konstanten c

a)

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{Y\in\mathbb{N}_0} f(x,y) = \sum_{y=x}^{\infty} c \cdot 2^{-(y+1)}(1-p)^{x-y} \\
&= \frac{c}{2}(1-p)^x \sum_{y=0}^{\infty} 2^{-y}(1-p)^{-y} \\
&= \frac{c}{2}(1-p)^x \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2(1-p)})^{x+1}}{1 - \frac{1}{2(1-p)}} \\
&= \frac{c}{2}(1-p)^x \frac{[c(1-P)]^{x+1} - 1}{[c(1-P)]^{x+1}} \cdot \frac{2(1-p)}{2(1-p) - 1} \\
&= \frac{c}{2} \frac{[2^{x+1}(1-p)^{x+1} - 1]}{2^x[1-2p]} \\
&= \frac{c}{2} \frac{2(1-p)^{x+1} - 2^{-x}}{1-2p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x\in\mathbb{N}_0} f(x,y) = \sum_{x=y}^{\infty} c \cdot 2^{-(y+1)}(1-p)^{x-y} \\
&= c \cdot 2^{-(y+1)}(1-p)^{-y} \sum_{x=y}^{\infty} (1-p)^x \\
&= c \cdot 2^{-(y+1)}(1-p)^{-y} \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^{x+y} \\
&= c \cdot 2^{-(y+1)} \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = c \cdot 2^{-(y+1)} \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
1 &\stackrel{!}{=} \sum_{y=0}^{\infty} c \cdot 2 - (y+1) \frac{1}{p} = \frac{c}{p \cdot 2} \sum_{y=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^y = \frac{c}{p \cdot 2} \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{p} \\
\Leftrightarrow \quad & c = p
\end{aligned}$$

13

X, Y seien stoch. unabh. Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $X \sim \text{Exp}(\lambda), P(Y=-1) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$

Bestimme die Verteilungfunktion $F(z) := P(X \cdot Y \leq z)$ der Zufallsvariable $X \cdot Y$

Dazu: $Z(z) = P(X \cdot Y \leq z) = P(X \cdot Y \leq z, Y=-1) + P(X \cdot Y \leq z, Y=1)$
$= P(X \cdot Y \leq z | Y=-1)P(Y=-1) + P(X \cdot Y \leq z | Y=1)P(Y=1)$
$\frac{1}{2}[P(X \geq z) + P(X \leq z)]$

1. Fall: $z < 0 \Rightarrow P(X \leq z) = 0$
   $F(z) = \frac{1}{2}P(X \geq -z) = \frac{1}{2}(1-(1-e^{\lambda z})) = \frac{1}{2}e^{\lambda z}$
2. Fall: $x \geq 0 : F(z) = \frac{1}{2}[\underbrace{P(X \geq -z)}_{1} + P(X \leq z)] = \frac{1}{2}(1+1-e^{-\lambda z}) = \frac{1}{2}(2-e^{-\lambda z})$

14

Gegeben folgendes Spiel:
Eine Münze wird so oft geworfen, bis das erste Mal „Kopf“ erscheint. Bis dahin erhält der Spieler vom Spielleiter für jede „Zahl“ im k-ten Wurf 2^k DM.
Was ist der faire Einsatz für dieses Spiel?
$X \widehat{=}$ Auszahlung an den Spieler
$EX = \sum_{k=1}^{\infty}(2^k-2)\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{2^{k-1}} = \infty$

Y das gleiche, aber max. 10 Würfe
$EY = \sum_{k=1}^{10}(2^k-2)\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{10}}(2^k-2) = \sum_{k=1}^{10}(1-\frac{1}{2^{k-1}}) + 2 - \frac{1}{2^9}$
$= 10 - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{2^k} + 2 - \frac{1}{2^9} = 10 - \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} + 2 - \frac{1}{2^9} \approx 10$

15

(X, Y) sei eine Zufallsvektor mit λ^2-Dichte:
d.h. $f_{X,Y}(x,y) = c \cdot (1 + xy(x^2-y^2))\mathbb{1}_{[0,1]}(\max(|x|,|y|))$

1. Bestimme c
2. Ermittle die Randdichten f_X, f_Y
3. Sind X, Y st. unabh.
4. Bestimme $f_X * f_Y$
5. $EX, EY, E(X+Y)$

1. $1 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} c(1+xy(x^2-y^2))dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(c+cx^3y-cxy^3)dx\,dy$
   $= c\int_{-1}^{1}[x+\frac{1}{4}x^4y-\frac{1}{2}x^2y^3]_{x=-1}^{1}dy = c\int_{-1}^{1}(1+\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}y^3+1-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}y^3)dy$
   $= c\int_{-1}^{1}2dy = c \cdots 4 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$
2. $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)dy = \cdots = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$
   $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+xy(x^2-y^2))\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)dx = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$

3. $f_X(x)\cdots f_Y(y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$
   $\Rightarrow$ nicht st. unabh. $f_{X,Y}(x,y)$

4. $(f_X * f_Y)(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(t, z-t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{4}(1 + t(z-t)(t^2 - (z-t)^2))\mathbb{1}_{[0,1]}\max(|t|, |z-t|)dt$

1. Fall: $-2 \le z \le 0$

$$\int\limits_{-1}^{z+1} \frac{1}{4}(1 + t(z-t)(t^2 - z^2 + 2zt - t^2))dt$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{z+1} 1 + (zt - t^2)(t^2 - z^2 + 2zt - t^2)dt$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{z+1} 1 - z^3t + 2z^2t^2 + z^2t^2 - 2zt^3\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{z+1} 1 - z^3t + 3z^2t^2 - 2zt^3\,dt$$
$$= \frac{1}{4}[t - \frac{z^3}{2}t^2 + z^2t^3 - \frac{1}{2}zt^4]_{t=-1}^{z+1}$$
$$= \frac{1}{4}[z + 1 - \frac{z^3}{2}(z+1)^2 + z^2(z+1)^3 - \frac{1}{2}z(z+1)^4 - \cdots$$
$$= \cdots = \frac{1}{4}(2+z)$$

2. Fall: $0 < z \le 2$

$$\int\limits_{z-1}^{1} \ldots dt = \ldots = \frac{1}{4}(2-z)$$

$$(f_X * f_Y)(z) = \begin{cases} (2+z)\frac{1}{4} & , \quad z \in [-2, 0] \\ (2-z)\frac{1}{4} & , \quad z \in [0, 2] \end{cases}$$

5. $EX = \int\limits_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-1) = 0$
   $EY = 0$
   $E(X+Y) = EX + EY = 0 + 0 = 0$

16

Seien $n \in \mathbb{N}, \Omega = \{1, \ldots, N\}^n, \mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
$P(w) = N^{-n}\,\forall w \in \Omega, X(w) := \min\limits_{1 \le i \le n}(w_i)$

a) Berechne $P(X = k)$ für $1 \le k \le N$

b) Zeige: $E(X) = N^{-n}\sum\limits_{k=1}^{N} k^n$

a) $P(X = k) = P(X^{-1}(k)) = ((\{k, \ldots, N\}^n - \{k+1, \ldots, N\}^n))N{-}n = ((N-k+1)^n - (N-k)^n)N^{-n}$

b) $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} k((N-k+1)^n - (N-k)^n)N^{-n} = N^{-n}(\sum\limits_{k=1}^{N} k(N-k+1)^n - \sum\limits_{k=1}^{N} k(N-k)^n)$
$= N^{-n}(\sum\limits_{k=0}^{N-1}(k+1)(N-k)^n - \sum\limits_{k=1}^{N} k(N-k)^n) = N^{-n}(\sum\limits_{k=0}^{N-1} k(N-k+1)^n - \sum\limits_{k=0}^{N-1}(N-k)^n - \sum\limits_{k=0}^{N-1} k(N-k)^n)$
$= N^{-n}(\sum\limits_{k=0}^{N-1}(N-k)^n) = N^{-n}\sum\limits_{k=1}^{N} k^n$

17

Gegeben 2 Objekte mit (unbekannten) Gewichten a, b.
Problem: Bestimme a und b mit Hilfe einer Balkenwaage.
Seien $X_a, X_b, X_{a+b}, X_{a-b}$ unabh. Zufallsvariablen die Ergebnisse der Wiegevorgänge $a, b, a+b, a-b$ mit
$E(X_a) = a,\ E(X_b) = b,\ E(X_{a+b}) = a+b,\ E(X_{a-b}) = a-b,$
$\text{Var}(X_a) = \text{Var}(X_b) = \text{Var}(X_{a+b}) = \text{Var}(X_{a-b}) = \sigma^2 > 0$
Welche der beideen Methoden zur Bestimmung von a, b liefert die geringere Standardabweichung:

1. $\widehat{a} := X_a,\ \widehat{b} := X_b)$
2. $\widehat{a} := \frac{1}{2}(X_{a+b} + X_{a-b}),\ \widehat{b} := \frac{1}{2}(X_{a+b} - X_{a-b})$

1. $\mathrm{Var}(\widehat{a}) = \mathrm{Var}\widehat{b} = \sigma^2$
2. $\mathrm{Var}(\widehat{a} = \mathrm{Var}(\frac{1}{2}(X_{a+b} + X_{a-b}))$
   $= \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_{a+b}) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_{a-b} == \frac{\sigma^2}{2}$
   $\mathrm{Var}(\widehat{b}) = \ldots$

$\boxed{18}$

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Eine Folge von Würfen $\quad 0 < \epsilon < \frac{5}{2}, 0 < c < 1$

a) Wie oft muss man würfeln, damit $P(|\overline{X}_n - \frac{7}{2}| < \epsilon) > c$ garantiert ist?

b) Berechne n für
   i) $\epsilon = 0.5; c = 0.1$
   ii) $\epsilon = c = 0.01$

$\mathrm{Var}X_i = \frac{35}{12}$

a) Einsetzen in Tschebyscheff:

$$
\begin{aligned}
P(|\overline{X}_n - \frac{7}{2}| \geq \epsilon) &\leq \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} \\
P(|\overline{X}_n - \frac{7}{2}| < \epsilon) &\leq 1 - \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} \\
&= 1 - \frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{n\epsilon^2} = 1 - \frac{35}{12n\epsilon^2} \overset{!}{\geq} c
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow n \geq \frac{35}{(1-c)12\epsilon^2}$$

b) i) $n \geq 13$
   ii) $n \geq 29462$

$\boxed{19}$

Sei $\Theta = \mathbb{R}$ Parameterraum für $\vartheta \in \Theta$ sei $f_\vartheta(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\vartheta|)$ eine Dichte.
Bestimme einen ML-Schätzer für ϑ
Dazu:
Betrachte log-Likelyhood-Funktion

$$\log L(\vartheta, x_1, \ldots, x_n) = \log \prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i) = \sum_{i=1}^n \log(\tfrac{1}{2}\exp(-|x-\vartheta|)) = \underbrace{n \log \frac{1}{2}}_{\text{unabh. von } \vartheta} - \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i - \vartheta|}_{\text{min}}$$

Minimiere $g(\vartheta) := \sum_{i=1}^n |x_i - \vartheta| =$
$sum_{i=1}^n |x(i) - \vartheta|$, wobei $x(1) \leq \ldots \leq x(n)$
g stetig auf $\mathbb{R}$ und differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{x(i) | 1 \leq i \leq n\}$ mit
$g'(\vartheta) = \sum_{i=1}^n -\mathrm{sgn}(x(i) - \vartheta) = \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(\vartheta - x(i))$
O.E. Ex. $i_0 = i_0(\vartheta)$ mit $1 \leq i_0 \leq n-1$, so daß $x(i_0) < \vartheta < x(i_0+1)$, da
g auf $(-\infty, x(1)) \cup (x(n), \infty)$ kein Min hat

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow g'(\vartheta) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{sgn}(\vartheta - x_i) \\
&= \mathrm{sgn}(\vartheta - x(1)) + \ldots + \mathrm{sgn}(\vartheta - x(i_0)) + \mathrm{sgn}(\vartheta - x(i_0+1)) + \ldots + \mathrm{sgn}(\vartheta - x(n)) \\
&= i_0 - (n - i_0) = 2i_0 - n
\end{aligned}
$$

$g'(\vartheta) < 0$, falls $i_0 < \frac{n}{2} \Leftrightarrow x(i_0 < \vartheta < x(i_0))$ für $1 \leq i_0 \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$
$\Rightarrow g \searrow$strg. auf $[x(1), x(\lfloor \frac{n-1}{2} + 1 \rfloor))$
$g'(\vartheta) = 0$, falls $i_0 = \frac{n}{2} \Rightarrow x(\frac{n}{2}) < \vartheta < x(\frac{n}{2} + 1)$ tritt nur ein, wenn n <u>gerade</u>.
$\Rightarrow g'(\vartheta) > 0$, falls $i_0 > \frac{n}{2} \Leftrightarrow x(i_0) < \vartheta < x(i_0 + 1)$ für $\lfloor \frac{n-1}{2} + 1 \rfloor \leq i_0 \leq n - 1$
$\Rightarrow g \nearrow$strg. auf $[x(\lfloor \frac{n-1}{2} + 1 \rfloor), x(n)]$
$\Longrightarrow$
falls n gerade: ϑ ML-Schätzer $\forall \vartheta \in [x(\frac{n}{2}), x(\frac{n}{2} + 1)]]$
falls n ungerade: $\vartheta = (\frac{n+1}{2})$ ist ML-Schätzer.