Raibot SS90 (Wust)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei (Ω,P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Zeigen Sie, daß für $A,B,C \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:

a) Aus $P(A|C) \geq P(B|C) \wedge P(A|C^c) \geq P(B|C^c)$ folgt:

$P(A) \geq P(B)$.

b) Aus $A \cap B = \emptyset \wedge P(A \cap C) \geq P(A)P(C) \wedge P(B \cap C) \geq P(B)P(C)$ folgt:

$P((A \cup B) \cap C) \geq P(A \cup B)P(C)$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachten Sie 3 mit jeweils 50 Gummibärchen gefüllte Tüten: In der ersten befinden sich genau $n \geq 2$ und in der dritten genau $m \geq 2$ grüne Bärchen, während die zweite Tüte nur grüne Bärchen enthält.
Sie entnehmen zufällig der ersten Tüte ein Bärchen und mischen dieses, ohne die Farbe festgestellt zu haben, unter die Bärchen der zweiten Tüte. Dieser entnehmen Sie - wieder zufällig und ohne die Farbe zu betrachten - ein Bärchen und legen es in die dritte Tüte, aus der Sie jetzt zufällig 2 Bärchen ziehen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keines dieser Bärchen grün?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Bei einer (Fußball-) Weltmeisterschaft wird die Mannschaft A Gruppenerster, wenn sie gegen die Mannschaften M_1 und M_2 gewinnt. Die Mannschaft B wird dagegen schon erster in ihrer Gruppe, wenn sie gegen M_3 gewinnt.
Nehmen Sie an, daß die Ergebnisse dieser 3 Spiele unabhängig voneinander sind und jeder Sieg von A bzw. B dieselbe Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ hat.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{0,1\}^3$ an.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens eine der Mannschaften A und B Gruppenerster?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Waldstück mit 1000 Bäumen werde von einem Schwarm von 3000 Borkenkäfern befallen, die sich zufällig auf diese Bäume verteilen mögen. (Jeder Käfer sucht sich genau einen Baum aus!)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) werden genau 7 Bäume nicht und mindestens 7 Bäume von jeweils mindestens 77 Borkenkäfern besetzt?

b) bleibt mindestens ein Viertel aller Bäume vom Käferbefall verschont?

Hinweis zu a):
7 Bäume sind käferfrei, 7 Bäume sind von je 77 Käfern besetzt; die restlichen Käfer verteilen sich auf 993 befallene Bäume.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

$\mathfrak{A}$ sei eine σ-Algebra über der Menge $\Omega \neq \emptyset$. Für eine beliebige Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sei die Mengenfamilie $\mathfrak{A}_A$ definiert durch

$$\mathfrak{A}_A := \{(A \cap B) \cup (A^c \cap C) \mid B, C \in \mathfrak{A}\} .$$

Zeigen Sie:

$\mathfrak{A}_A$ ist eine σ-Algebra über $\Omega \quad \forall\ A \in \mathfrak{P}(\Omega)$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Zwei Personen wählen unabhängig voneinander je eine natürliche Zahl zufällig aus der Menge $\{1,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich diese beiden Zahlen (betragsmäßig) höchstens um $m \in \{0,1,\dots,n-1\}$ unterscheiden, durch

$$1 - \frac{(n-m-1)(n-m)}{n^2}$$

gegeben ist.

b) Wie groß ist der erwartete (betragsmäßige) Unterschied zwischen beiden Zahlen?

Hinweis:
Betrachten Sie die Zufallsvariablen X und Y auf $\Omega = \{1,\dots,n\}^2$ mit $X(\omega_1,\omega_2) = \omega_1$, $Y(\omega_1,\omega_2) = \omega_2$ für $(\omega_1,\omega_2) \in \Omega$ und benutzen Sie $P(X-Y > m) = P(Y-X > m)$.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Prüfen Sie, ob die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion f mit

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[(\sqrt{2}\, e^{-x^2/2} - e^{-x^2})\, e^{-y^2} + (\sqrt{2}\, e^{-y^2/2} - e^{-y^2})\, e^{-x^2}\right] ; \ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2,$$

eine Dichtefunktion eines zweidimensionalen Zufallsvektors ist.

Hinweis: siehe Normalverteilung!

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Die Verteilungen P^X und P^Y der diskreten Zufallsvariablen X und Y auf (Ω, P) mögen jeweils den Träger $\{0,1\}$ besitzen.

Zeigen Sie:

X und Y sind unkorreliert genau dann, wenn sie stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Mit X_n werde die Anzahl der in einer Folge von n voneinander unabhängigen Würfen mit einem (symmetrischen) Würfel auftretenden "Sechsen" bezeichnet.

Bestimmen Sie

a) die Zähldichte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_n.

b) für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| \geq \varepsilon)$.

c) eine Mindestanzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so daß die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Mittelwert der Anzahl auftretender "Sechsen" in n_0 Würfen betragsmäßig um weniger als 0,01 von 1/6 unterscheidet, mindestens 0,6 beträgt.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Ein blindes Huhn findet jeden Tag mit je Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ mindestens ein Weizen- bzw. Roggen- bzw. Gerstenkorn. Diese 3 Ereignisse sind paarweise unabhängig und treten nicht alle gleichzeitig ein.

Für welchen Wert von p ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Huhn jeden Tag (mindestens) eins der obigen Körner findet, maximal?

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\{P_\vartheta | \vartheta > 0\}$. Die Dichtefunktion von P_ϑ sei gegeben durch

$$f_\vartheta(x) = \frac{2}{\vartheta^2}\, x \cdot 1_{[0,\vartheta]}(x)$$

$X_1,\dots,X_n$ seien stochastisch unabhängige, je nach P_ϑ verteilte Zufallsvariablen.

Prüfen Sie, ob die Schätzfunktionen

$$\delta_1(X_1,\dots,X_n) = \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad \delta_2(X_1,\dots,X_n) = \frac{2n+1}{2n} \max\{X_1,\dots,X_n\}$$

erwartungstreu für ϑ sind.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) $$\begin{aligned} P(A) &= P((A\cap C)+(A\cap C^c)) && \text{,da } C+C^c=\Omega \\ &= P(A\cap C)+P(A\cap C^c) \\ &= P(A|C)P(C)+P(A|C^c)P(C^c) && \text{,per Definition (4.2)} \\ &\geq P(B|C)P(C)+P(B|C^c)P(C^c) && \text{,da } P(C),P(C^c)\geq 0, \text{ Vor.} \\ &= P(B\cap C)+P(B\cap C^c) \\ &= P(B) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P((A\cup B)\cap C) &= P((A\cap C)\cup(B\cap C)) \\ &= P((A\cap C)+(B\cap C)) && \text{,da } A\cap B=\emptyset \\ &= P(A\cap C)+P(B\cap C) \\ &\geq P(A)P(C)+P(B)P(C) && \text{,Vor.} \\ &= (P(A)+P(B))P(C) \\ &= P(A\cup B)P(C) && \text{,da } A\cap B=\emptyset \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Alle Gummibärchen, die nicht grün sind, seien der Einfachheit halber rot.
Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit, aus der dritten Tüte zwei rote Bärchen zu ziehen.
Dies kann auf drei verschiedene Weisen geschehen:

a) Ziehe ein rotes Bärchen aus der ersten Tüte, danach noch ein rotes aus der zweiten Tüte und schließlich 2 rote aus der dritten Tüte.

Es sind also zu Beginn 50-n rote und n grüne Bärchen in der ersten Tüte. Vor der zweiten Ziehung sind dann 1 rotes und 50 grüne Bärchen in der zweiten Tüte. Vor der dritten Ziehung sind 51-m rote und m grüne Bärchen in der dritten Tüte. Das letzte Bärchen kann dann aus 50-m roten und m grünen gezogen werden.

Als Wahrscheinlichkeit für diese Ziehung Z_1 ergibt sich damit:

$$P(Z_1) = \frac{50-n}{50}\cdot\frac{1}{51}\cdot\frac{51-m}{51}\cdot\frac{50-m}{50}$$

Beachte: Diese Ziehung ist nur für $m,n\leq 49$ möglich, da sonst kein rotes in der ersten bzw. nur eins in der dritten Tüte vorhanden ist. Für m oder n=50 liefert die obige Formel aber ebenfalls das korrekte Ergebnis (nämlich 0).

b) Ziehe ein rotes Bärchen aus der ersten Tüte, danach ein grünes aus der zweiten Tüte und schließlich 2 rote aus der dritten Tüte.

Es sind also zu Beginn 50-n rote und n grüne Bärchen in der ersten Tüte. Vor der zweiten Ziehung sind dann 1 rotes und 50 grüne Bärchen in der zweiten Tüte. Vor der Ziehung aus der dritten Tüte sind dort 50-m rote und m+1 grüne Bärchen enthalten.
Als Wahrscheinlichkeit für diese Ziehung Z_2 ergibt sich damit:

$$P(Z_2) = \frac{50-n}{50}\cdot\frac{50}{51}\cdot\frac{50-m}{51}\cdot\frac{49-m}{50}$$

Beachte: Diese Ziehung ist nur für $n \le 49$, $m \le 48$ möglich (analog zu oben). Für $n=50$ oder $m \ge 49$ liefert auch diese Formel wieder das korrekte Ergebnis 0.

c) In analoger Argumentation zu oben ergibt sich für die Ziehung Z_3 je eines grünen Bärchens aus den ersten beiden Tüten und zweier roter aus der dritten Tüte:

$$P(Z_3) = \frac{n}{50} \cdot \frac{51}{51} \cdot \frac{50-m}{51} \cdot \frac{49-m}{50}$$

d) Der Fall, daß aus der ersten Tüte ein grünes und aus der zweiten ein rotes Bärchen gezogen wird, kann nicht auftreten, da in der zweiten Tüte kein rotes Bärchen vorhanden wäre.

Insgesamt ergibt sich so die gesuchte Wahrscheinlichkeit als:

$$P(Z_1)+P(Z_2)+P(Z_3)$$

$$= \frac{50-n}{50} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{51-m}{51} \cdot \frac{50-m}{50} + \frac{50-n}{50} \cdot \frac{50}{51} \cdot \frac{50-m}{51} \cdot \frac{49-m}{50} + \frac{n}{50} \cdot \frac{51}{51} \cdot \frac{50-m}{51} \cdot \frac{49-m}{50}$$

$$= \frac{(50-m)(62525-1275m-n)}{3251250}$$

Bemerkungen:

α) Man kann die Ziehung der letzten beiden Bärchen aus der dritten Tüte auch durch die hypergeometrische Verteilung beschreiben (z.B. in Fall a):

Gesamtzahl	: 51
defekte Stücke (rote Bärchen)	: 51-m
Stichprobengröße	: 2
defekte Probestücke	: 2

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit:

$$\binom{2}{2}\binom{49}{49-m}\binom{51}{51-m}^{-1} = \frac{49!}{(49-m)!m!} \cdot \frac{(51-m)!m!}{51!} = \frac{(51-m)(50-m)}{51 \cdot 50}$$

β) Man kann die Kette der einzelnen Ziehungen auch durch eine Folge von bedingten Wahrscheinlichkeiten darstellen:

P("2 rote aus Tüte 3")

= P("2 rote aus Tüte 3"|"1 grünes aus Tüte 2") · P("1 grünes aus Tüte 2")
+ P("2 rote aus Tüte 3"|"1 rotes aus Tüte 2") · P("1 rotes aus Tüte 2")

= P("2 rote aus Tüte 3"|"1 grünes aus Tüte 2")
· [P("1 grünes aus Tüte 2"|"1 grünes aus Tüte 1") · P("1 grünes aus Tüte 1")
+ P("1 grünes aus Tüte 2"|"1 rotes aus Tüte 1") · P("1 rotes aus Tüte 1")]
+ P("2 rote aus Tüte 3"|"1 rotes aus Tüte 2")
· [P("1 rotes aus Tüte 2"|"1 grünes aus Tüte 1") · P("1 grünes aus Tüte 1")
+ P("1 rotes aus Tüte 2"|"1 rotes aus Tüte 1") · P("1 rotes aus Tüte 1")]

Wenn man dies ausmultipliziert, erhält man genau die 4 (1 unmöglichen und 3 mögliche) oben behandelten Fälle.

Aufgabe 3

a) Es sei $\Omega=\{0,1\}^3=\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)|\omega_i\in\{0,1\}$ für $i=1,2,3\}$ mit folgender Bedeutung:
$\omega_1=1$: Mannschaft A gewinnt gegen M_1
$\omega_2=1$: Mannschaft A gewinnt gegen M_2
$\omega_3=1$: Mannschaft B gewinnt gegen M_3

Dabei ist Ω in jeder Komponente binomialverteilt, d.h.

$$P(\omega_i) = b(\omega_i|1,p) = \begin{cases} p & \text{,falls } \omega_i=0 \\ 1-p & \text{,falls } \omega_i=1 \end{cases} \quad \text{für } i=1,2,3$$

Aus der Unabhägigkeit der Ergebnisse folgt damit:

$$P((\omega_1,\omega_2,\omega_3)) = b(\omega_1|1,p)\cdot b(\omega_2|1,p)\cdot b(\omega_3|1,p)$$

Hierdurch ist der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) eindeutig bestimmt.

b) G sei das Ereignis, daß eine der beiden Mannschaften A und B Gruppenerster wird. Es gewinnt also B gegen M_3 oder A gegen M_1 und M_2. Damit hat G folgende Darstellung:

$$G=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0)\}$$

$$\Rightarrow P(G)=(1-p)(1-p)p+(1-p)pp+p(1-p)p+ppp+pp(1-p)$$
$$=p+p^2-p^3$$

Bemerkung: Man kann sich auch direkt klar machen, daß die ersten vier Ergebnisse zusammen die Wahrscheinlichkeit p haben: Sie hängen nur davon ab, ob B gewinnt. Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit jedoch p.

Aufgabe 4 (siehe auch A16 Übung 4 im SS 90 und A11 Übung 4 im SS 89)

$\Omega=U^{3000}(\{1,\ldots,1000\})$

$\Rightarrow$ Es gibt insgesamt $|\Omega|=|U^{3000}(\{1,\ldots,1000\})|=\binom{3000+1000-1}{3000}$ Möglichkeiten,

die 3000 Käfer auf die 1000 Bäume zu verteilen.

a) Es gibt $\binom{1000}{7}$ Möglichkeiten, die 7 unbefallenen Bäume aus den 1000 Bäumen auszuwählen.

Es gibt $\binom{993}{7}$ Möglichkeiten, die 7 von mindestens 77 Borkenkäfern angegriffenen Bäume aus den restlichen 993 auszuwählen.

Plaziere $7\cdot 77$ Borkenkäfer auf die ausgewählten Bäume und 986 auf die restlichen Bäume, damit keiner von ihnen frei bleibt.
Die restlichen $3000-7\cdot 77-986=1475$ Borkenkäfer, die jetzt noch nicht verteilt wurden, können sich jetzt auf die 993 noch zu belegenden Bäume "stürzen".

Dies sind $\binom{1475+993-1}{1475} = \binom{2467}{1475}$ Möglichkeiten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also:

$$\binom{1000}{7}\binom{993}{7}\binom{2467}{1475}\binom{3999}{3000}^{-1} \approx 2{,}02 \cdot 10^{-220}$$

b) Bezeichne i die Anzahl der unbefallenen Bäume.

Analog zu oben gibt es $\binom{1000}{i}$ Möglichkeiten, diese Bäume auszusuchen.

1000-i Käfer belegen die Bäume, die nicht frei bleiben dürfen.
Die restlichen 3000-(1000-i)=2000+i Käfer werden auf die 1000-i bereits mit einem Käfer belegten Bäume verteilt.

Hierfür gibt es $\binom{1000-i+2000+i-1}{2000+i} = \binom{2999}{2000+i}$ Möglichkeiten.

Da es zwischen 250 und 999 unbefallene Bäume geben kann, lautet die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\binom{3999}{3000}^{-1} \sum_{i=250}^{999} \binom{1000}{i}\binom{2999}{2000+i} \approx 0{,}509$$

Aufgabe 5

Zu zeigen (Definition einer σ-Algebra (7.2)) :

a) $\Omega \in \mathfrak{R}_A$

b) $B \in \mathfrak{R}_A \Rightarrow B^c \in \mathfrak{R}_A$

c) $A_n \in \mathfrak{R}_A \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}_A$

(Bemerkung: $\mathfrak{R}$ ist σ-Algebra, hierfür gelten also die obigen drei Axiome.)

zu a)
$$\begin{aligned} \Omega &= (A \cup A^c) \cap \Omega && ,\text{da } A \cup A^c = \Omega \\ &= (A \cap \Omega) \cup (A^c \cap \Omega) \in \mathfrak{R}_A && ,\text{da } \Omega \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

zu b) Sei $B \in \mathfrak{R}_A$, d.h.

$B = (A \cap B_1) \cup (A^c \cap B_2)$ mit $B_1, B_2 \in \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B^c &= ((A \cap B_1) \cup (A^c \cap B_2))^c \\ &= (A \cap B_1)^c \cap (A^c \cap B_2)^c && ,\text{de Morgan} \\ &= (A^c \cup B_1^c) \cap (A \cup B_2^c) && ,\text{de Morgan, } (A^c)^c = A \\ &= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap A) \cup (B_1^c \cap B_2^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B_1^c) \cup (A^c \cap B_2^c) \cup (\Omega \cap (B_1^c \cap B_2^c)) \\ &= (A \cap B_1^c) \cup (A^c \cap B_2^c) \cup (A \cap (B_1^c \cap B_2^c)) \cup (A^c \cap (B_1^c \cap B_2^c)) \\ &= (A \cap B_1^c) \cup (A^c \cap B_2^c) && ,\text{da } B_1^c,\ B_2^c \supset B_1^c \cap B_2^c \\ &\in \mathfrak{R}_A && ,\text{da } B_1^c,\ B_2^c \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

zu c) Sei $A_n \in \mathfrak{R}_A \ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h.

$A_n = (A \cap B_n) \cup (A^c \cap C_n)$ mit $B_n, C_n \in \mathfrak{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} ((A \cap B_n) \cup (A^c \cap C_n))$$

$$= (\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_n)) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} (A^c \cap C_n))$$

$$= (A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n)) \cup (A^c \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_n)) \in \mathfrak{A}_A \quad \text{,da } \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n, \bigcup_{i=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{A}$$

Aufgabe 6

$\Omega = \{1,\dots,n\}^2 = \{(\omega_1,\omega_2) | 1 \leq \omega_i \leq n \text{ für } i=1,2\}$

A_m bezeichne das Ereignis, daß sich die beiden gezogenen Zahlen im Betrag um m unterscheiden.

$\Rightarrow A_0 = \{(1,1),(2,2),\dots,(n,n)\}$
$Am = \{(1,1+m),(2,2+m),\dots,(n\text{-}m,n),(1+m,1),(2+m,2),\dots,(n,n\text{-}m)\}$ für $1 \leq m \leq n\text{-}1$

$\Rightarrow |\Omega| = n^2, \quad |A_0| = n, \quad |A_m| = 2(n\text{-}m)$ für $1 \leq m \leq n\text{-}1$

a) Da bei der Ziehung der Zahlen kein Ergebnis bevorzugt wird, handelt es sich um ein Laplace-Experiment.
Damit folgt:

$P(A_0) = |A_0| / |\Omega| = n/n^2 = 1/n$

$P(A_m) = |A_m| / |\Omega| = 2(n\text{-}m)/n^2$ für $1 \leq m \leq n\text{-}1$

$\Rightarrow$ P("Die Zahlen unterscheiden sich höchtens um m")

$$= \sum_{i=0}^{m} P(A_i)$$

$$= P(A_0) + \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

$$= 1/n + 2/n^2 \sum_{i=1}^{m} n\text{-}i$$

$$= 1/n + 2/n^2 (\sum_{i=1}^{m} n - \sum_{i=1}^{m} i)$$

$$= 1/n + 2/n^2 (mn\text{-}m(m+1)/2)$$

$$= (n+2mn\text{-}m^2\text{-}m)/n^2$$

$$= (n^2\text{-}n^2+nm+mn\text{-}m^2+n\text{-}m)/n^2$$

$$= 1 - \frac{(n\text{-}m\text{-}1)(n\text{-}m)}{n^2}$$

b) Der erwartete Unterschied entspricht dem Erwartungswert:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot P(A_i)$$

$$= 2/n^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)$$

$$= 2/n^2 \left(n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right)$$

$$= \frac{2}{n^2} \cdot \left(n \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{3}(n - \frac{1}{n})$$

Aufgabe 7

Zu zeigen:
a) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^2$
b) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = 1$

zu a) $x^2/2 \leq x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow e^{-x^2/2} \geq e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (\sqrt{2}\, e^{-x^2/2} - e^{-x^2})\, e^{-y^2} \geq 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$,da $e^{-y^2} \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x,y) \geq 0 \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$,Symmetrie

zu b) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \left[(\sqrt{2}\, e^{-x^2/2} - e^{-x^2})\, e^{-y^2} + (\sqrt{2}\, e^{-y^2/2} - e^{-y^2})\, e^{-x^2} \right] dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{2}\, e^{-x^2/2} - e^{-x^2})\, e^{-y^2}\, dxdy \qquad \text{(Symmetrie)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2}\, e^{-x^2/2} - e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy \qquad \text{(siehe Bemerkung)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz \right) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz \qquad \text{(Umbenennung)}$$

(Substituiere $z = x/\sqrt{2}$ und damit $dz = dx/\sqrt{2}$)

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx - 1/\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx \right) \cdot 1/\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx$$

(Der Wert dieser Integrale ist von der Normalverteilung bekannt:
$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$)

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi} - 1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi} \right) \cdot 1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} \right) \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= 1$$

Bemerkung:

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x)h(y)\ dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)h(y)\ dx \right) dy \qquad \text{,per Definition}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\ dx \right) dy \qquad \text{,da } h(y) \text{ konstant bezüglich } x \text{ ist}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dx \cdot \int_{\mathbb{R}} h(y)\ dy \qquad \text{,da } \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dx \text{ eine Konstante ist}$$

Aufgabe 8 (siehe auch Satz (10.11))

$$E(XY) = \sum_{i,j \in \{0,1\}} i \cdot j \cdot P^{(X,Y)}(\{i,j\})$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot P^{(X,Y)}(\{0,0\}) + 0 \cdot 1 \cdot P^{(X,Y)}(\{0,1\}) + 1 \cdot 0 \cdot P^{(X,Y)}(\{1,0\}) + 1 \cdot 1 \cdot P^{(X,Y)}(\{1,1\})$$

$$= P^{(X,Y)}(\{1,1\})$$

$$E(X) \cdot E(Y) = \left(\sum_{i \in \{0,1\}} i \cdot P^X(\{i\}) \right) \cdot \left(\sum_{j \in \{0,1\}} j \cdot P^Y(\{j\}) \right)$$

$$= (0 \cdot P^X(\{0\}) + 1 \cdot P^X(\{1\})) \cdot (0 \cdot P^Y(\{0\}) + 1 \cdot P^Y(\{1\}))$$

$$= P^X(\{1\}) \cdot P^Y(\{1\})$$

a) "stochastisch unabhängig $\Rightarrow$ unkorreliert"

Seien also X und Y stochastisch unabhängig.

$$\Rightarrow E(XY) = P^{(X,Y)}(\{1,1\})$$

$$= P^X(\{1\}) \cdot P^Y(\{1\}) \qquad \text{,da stochastisch unabhängig}$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

D.h. X und Y sind unkorreliert.

b) "unkorreliert $\Rightarrow$ stochastisch unabhängig"

Seien also X und Y unkorreliert.

$$\Rightarrow P^{(X,Y)}(\{1,1\}) = E(XY)$$

$$= E(X) \cdot E(Y) \qquad \text{,da unkorreliert}$$

$$= P^X(\{1\}) \cdot P^Y(\{1\})$$

D.h. die Ereignisse $\{1\}$ unter X und $\{1\}$ unter Y sind stochastisch unabhängig. Damit sind aber auch jeweils die Ereignisse $\emptyset$, Ω (also $\{0,1\}$) und die Komplemente (also $\{0\}$) stochastisch unabhängig.

Da dies alle Teilmengen der Träger $\{0,1\}$ sind, gilt:

$$P^{(X,Y)}(A \times B) = P^X(A) \cdot P^Y(B) \qquad \forall A,B \in \mathfrak{P}(\{0,1\})$$

D.h. X und Y sind stochastisch unabhängig.

Aufgabe 9

a) Jeder einzelne Wurf mit dem symmetrischen Würfel ist ein Laplace-Experiment. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit p, bei einem Wurf eine "Sechs" zu würfeln, genau 1/6.
Bei der unabhängigen Hintereinanderausführung der Würfe handelt es sich dann um eine Bernoulli-Kette (siehe auch (5.9)).
Da X_n die Anzahl der auftretenden "Sechsen" bezeichnet, ist X_n binomialverteilt mit den Parametern n und $p=1/6$, d.h

$$P^{X_n}(k) = b(k|n,1/6) \quad \text{für } k \in \{0,\dots,n\}$$

Zur Erinnerung: Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Würfel - die dann eine "Sechs" anzeigen sollen - aus den n Würfeln auszuwählen. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Würfel dann "Sechsen" anzeigen, ist p^k. Die Wahrscheinlichkeit, daß die anderen n-k Würfel keine "Sechs" anzeigen, ist $(1-p)^{n-k}$. Insgesamt ergibt sich so die Wahrscheinlichkeit $b(k|n,p)$.

b) $E(\frac{X_n}{n}) = \frac{1}{n} \cdot E(X_n) = \frac{1}{n} \cdot np = p = \frac{1}{6}$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\Rightarrow P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| \geq \varepsilon) = P(|\frac{X_n}{n} - E(\frac{X_n}{n})| \geq \varepsilon)$$

$$\leq \frac{Var(\frac{X_n}{n})}{\varepsilon^2} \qquad \text{(Ungleichung von Tschebyscheff)}$$

$$= \frac{Var(X_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$= \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0 \quad \text{,da } \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} \text{ konstant ist.}$$

c) $P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| < 0{,}01) \geq 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| \geq 0{,}01) \leq 0{,}4$

Außerdem gilt (siehe b):

$\Leftrightarrow P(|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}| \geq 0{,}01) \leq \frac{1/6(1-1/6)}{n \cdot 0{,}01^2} = \frac{12500}{9n}$

Für $\frac{12500}{9n} \leq 0{,}4$ ist also die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Mittelwert der Anzahl auftretender "Sechsen" in n Würfen betragsmäßig um weniger als 0,01 von 1/6 unterscheidet, mindestens 0,6.

$\frac{12500}{9n} \leq 0{,}4 \Leftrightarrow 12500 \leq 3{,}6n \Leftrightarrow n \geq 3472\frac{1}{9}$

Also erfüllt $n_0 = 3473$ die Anforderung der Aufgabe.

Aufgabe 10

Es seien die drei Ereignisse W, R und G wie folgt definiert:
W : das Huhn findet (mindestens) ein Weizenkorn
R : das Huhn findet (mindestens) ein Roggenkorn
G : das Huhn findet (mindestens) ein Gerstenkorn

Da die drei Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit p haben, gilt:

$P(W)=P(R)=P(G)=p$

Da die drei Ereignisse paarweise (!) unabhängig sind, folgt:

$P(W\cap R)=P(W)P(R)=p^2$ (das Huhn findet ein Weizen- und ein Roggenkorn)
$P(W\cap G)=P(R\cap G)=p^2$ (analog)

Da die drei Ereignisse nie gleichzeitig eintreten, gilt:

$P(W\cap R\cap G)=0$ (Bemerkung: insgesamt sind die Ereignisse also nicht stochastisch unabhängig!)

Für das gesuchte Ereignis folgt mit der Siebformel von Sylvester-Poincaré:

$$P(W\cup R\cup G)=P(W)+P(R)+P(G)-P(W\cap R)-P(W\cap G)-P(R\cap G)+P(W\cap R\cap G)$$
$$=3p-3p^2+0$$

Fasse nun die Wahrscheinlichkeit P als Funktion von p auf:
$P(W\cup R\cup G)=f(p)$ mit $f(p)=3(p-p^2)$ für $p\in(0,1)$

Gesucht ist jetzt ein $p^*\in(0,1)$, für das f(p) maximal wird.
Hierfür ist notwendig, daß $f'(p^*)=0$ ist.

$0=f'(p^*)=3(1-2p^*) \Leftrightarrow p^*=1/2$
Da $f''(p^*)=-6<0$ ist, hat $f(p)$ an der Stelle $p^*=1/2$ ein Maximum.

Für $p=1/2$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Huhn ein Korn findet, maximal. Sie beträgt dann $3/4$.

Aufgabe 11

a)
$$E\delta_1(X_1,\dots,X_n) = E\left(\frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$$

mit
$$EX_i = \int_{\mathbb{R}} x\, f_\vartheta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x\,\frac{2}{\vartheta^2}\,x \cdot 1_{[0,\vartheta]}(x)\,dx = \int_0^{\vartheta} x^2\,\frac{2}{\vartheta^2}\,dx = \frac{2}{3}\vartheta$$

$$\Rightarrow E\delta_1(X_1,\dots,X_n) = \frac{3}{2n}\,n\,\frac{2}{3}\vartheta = \vartheta$$

D.h. $\delta_1(X_1,\dots,X_n)$ ist erwartungstreu für ϑ.

b) Bestimme zunächst die Dichtefunktion zu $\max\{X_1,\dots,X_n\}$:
Die Verteilungsfunktion von X_i lautet:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\vartheta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\vartheta^2}\,x \cdot 1_{[0,\vartheta]}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^2 & \text{für } x\in[0,\vartheta] \\ 1 & \text{für } x>\vartheta \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion von $\max\{X_1,\dots,X_n\}$ lautet damit:
(siehe auch A43 Übung 10 im SS 90)

$$(F(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{2n} & \text{für } x\in[0,\vartheta] \\ 1 & \text{für } x>\vartheta \end{cases}$$

Folglich lautet die Dichtefunktion von max $\{X_1,\ldots,X_n\}$:

$$\frac{d}{dx}\,(F(x))^n = \begin{cases} \dfrac{2n}{\vartheta^{2n}}\, x^{2n-1} & \text{für } x \in [0,\vartheta] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insgesamt ergibt sich dann für den Erwartungswert der Schätzfunktion:

$$\begin{aligned} E\delta_2(X_1,\ldots,X_n) &= \frac{2n+1}{2n} \int_0^{\vartheta} x\, \frac{2n}{\vartheta^{2n}}\, x^{2n-1}\, dx \\ &= \frac{2n+1}{2n}\; \frac{2n}{2n+1}\; \frac{\vartheta^{2n+1}}{\vartheta^{2n}} \\ &= \vartheta \end{aligned}$$

Es ist also auch $\delta_2(X_1,\ldots,X_n)$ erwartungstreu für ϑ.

<u>Viel Glück bei Eurer Klausur!</u>