KLAUSUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK VOM 20.07.87 (RAUHUT), ZEIT: 2 STUNDEN

VORDIPL

Aufg 1 (4P.) ✓

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und stochastisch unabhängige Ereignisse A,B,C.
Zeigen Sie

a) A und $B \cup C$ sind stoch. unabh.
b) $A \setminus B$ und C sind stoch. unabh.

Aufg 2 (4P.) ✓

Betrachten Sie beim Werfen zweier (symmetrischer) Würfel mit einem Ergebnis der Form (X,Y) die folgenden Ereignisse:

A: X ist gerade
B: X+Y ist gerade
C: Y ist eine Primzahl
D: 10X+Y ist eine Primzahl

Bem: Die Zahl 2 ist die kleinste Primzahl.

a) Beschreiben Sie mengentheoretisch einen geeigneten Grundraum Ω und die Ereignisse A,B,C,D als Teilmengen von Ω.

b) Sind die Ereignisse
 i) A und C
 ii) B und D unabhängig?

c) Prüfen Sie nach, ob die Beziehungen
 $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ und
 $P(A \cap C \cap D) = P(A)P(C)P(D)$ gelten.

d) Sind die Ereignisse A,B,C und D unabhängig?

Aufg 3 (5P.)

"Wochenmarkt"-Roulette:
Ein Eierhändler bietet eine gewisse Menge Eier zum Schleuderpreis von 5 Pf je Stück an, er erklärt jedoch, daß diese Menge aus k frischen und l faulen Eiern, die nicht unterscheidbar und gut gemischt sind, besteht.

a) Nehmen wir an, n ($\leq k-m$) seien bereits verkauft, und die Anzahl verkaufter Eier sei unbekannt. Nun kaufen Sie m Eier.
Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, daß Sie m frische Eier erstanden haben, ist gleich $\frac{\binom{k}{m}}{\binom{k+\ell}{m}}$.

Hinweis: Es gilt (ohne Beweis): $\sum_{i=0}^{n} \binom{k-m}{i}\binom{\ell}{n-i} = \binom{k+\ell-m}{n}$.

b) Sie sind der erste Kunde und kaufen m ($\leq k$) Eier. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle m Eier frisch sind?

Aufg 4) (4P)

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) und Ereignisse A, B, C mit

(i) $P(A \cap B \cap C) = 1/15$
(ii) $P((A \cap B) \setminus C) = 1/15$
(iii) $P((A \cap B) | C) = 1/7$
(iv) $P(B \cap C) = 1/5$
(v) $P(B \cup C) = 11/15$
(vi) $P(A \cup C) = 2/3$
(vii) $P(A) + P(B) = 14/15$

Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
$P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(C | (A \cap B))$, $P(A \cup B \cup C)$.

Aufg 5) (5P.)

(a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines diskreten Zufallsvektors (X,Y) ist durch folgende Werte von
$p_{ij} := P(X=i, Y=j)$, $i \in \{0,1,2\}$, $j \in \{0,1\}$.
$p_{10} = 0{,}12$ und $p_{21} = 0{,}2$
und den Angaben $P(Y=0) = 0{,}4$
$P(X=0) = 0{,}5$
$P(X=2) = 0{,}3$
über die Randverteilung eindeutig bestimmt.

i) Ermitteln Sie $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$, $Var(Y)$
ii) Bestimmen Sie $Cov(X,Y)$. Sind die ZV X und Y stoch. unabh.?

b) Gegeben ist eine rechteckverteilte ZV $X \sim R(-a,a)$, $a>0$,

d.h. die DF von X ist $f_X(X) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Die ZV $Y := X^2+1$ ist offensichtlich stoch. unabh. von X
Zeigen Sie: $Cov(X,Y)=0$, d.h. X und Y sind unkorreliert.

Aufg 6 (5P.)

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien stoch. unabh. diskrete ZVen mit $EX_i \leq c$ für alle $i=1,\ldots n$ für ein $c \in \mathbb{R}$.
Bezeichne $Y := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Zeigen Sie:

$$P\{Y \leq c\} > 0.$$

Aufg 7 (6P.)

a) Seien (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse, $0 < P(B) < 1$.
Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$
ii) $P(A | B^c) \leq P(A)$
iii) $P(A | B) \geq P(A | B^c)$

b) Seien $\Omega = \mathbb{Z}$; P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf ϕ.
$A := \{1,2,\ldots,k\}$, $B := \{1,2,\ldots,m\}$.
Zeigen Sie, daß Ungleichung i) gilt!

Aufg 8 (4P.)

Es seien Ω und Ω' Mengen, $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra in Ω' und $T: \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung von Ω in Ω'.
Zeigen Sie:
Das Mengensystem $T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ ist eine σ-Algebra

WuSt5

in Ω.
$(T^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in A'\})$

Aufg 9 (5P.) ✓

Die Dichtefunktion $f_{X,Y}(x,y)$ eines zweidimensionalen Zufallsvektors (X,Y) sei in folgender Form angesetzt:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x+3y^2), & x \in [0,1], \; y \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei c eine geeignete reelle Konstante sei.

i) Bestimmen Sien den Wert von c.
ii) Ermitteln Sie die Dichtefunktionen der Randverteilungen von X und Y.
iii) Berechnen Sie: $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$, $P(X \leq Y)$

Aufg 10 (5P.) ✓

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien stoch. unabh., b(1,p)-verteilte ZVen mit $0<p<1$.

Sei $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Berechnen Sie EY_n, Var Y_n
b) Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P(|Y_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

c) Verwenden Sie b) für folgendes Problem:
Der Parameter p sei unbekannt. Wie groß ist n zu wählen, damit p mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 im Intervall $[Y_n - 0{,}1; Y_n + 0{,}1]$ liegt?

Aufg 11 (5P.) ✓

Gegeben sei $\Omega = \{a,b,c\}$.
Geben Sie Maximum-Likelihood-Schätzungen für $P(\{a\})$, $P(\{b\})$ und $P(\{c\})$ an, wenn das durch (Ω, P) beschriebene Zufallsexperiment n-mal unabhängig wiederholt wird.

Aufg. 7)

1) $P(A\cap B) \geq P(A)P(B)$

$P(A)+P(B) - P(A\cup B) \geq P(A)P(B)$

$P(A) \geq P(A)P(B) - P(B) + P(A\cup B) = P(A)P(B) + P(A) - P(A\cap B)$

$P(A) \geq P(B)\ (P(A)-1) + P(A\cup B)$

$P(A) \geq -P(B)P(A^c) + P(A\cup B)$

$P(A\mid B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A\setminus B)}{P(B^c)} = \frac{P(A)-P(B)}{P(B^c)}$

$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)}$

8

$P_M(R_i) = \frac{1}{4}$

Maus wird gefressen

$(F|R_1) = 0{,}5\ ,\ P(F|R_2) = 0{,}2\ ,\ P(F|R_3) = 0{,}3\ ,\ P(F|R_4) = 0{,}2$

$\cancel{P(F)} = \sum_{i=1}^{4} \cancel{P(F|R_i)P(R_i)}$

$_{n\cap}(R_1) = P_K(R_1)\cdot P_M(R_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}025$

$(R_2) = \quad = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$

$(R_3) = \quad = 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}075$

$(R_4) =$

$(F) = \sum_{i=1}^{4} P_{K\cap M}(R_i)\ P(F \mid P_{K\cap M}(R_i)) =$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}025 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 + 0{,}075 \cdot 0{,}2 = \boxed{0{,}085}$

$) \ P(R_1|F) = \frac{P(F \mid P_{K\cap M}(R_1)) \cdot P_{K\cap M}(R_1)}{P(F)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}085} = \underline{0{,}58}$

WS# 2

·) $P(A)P(B\cup C) = P(A)\left[P(B)+P(C) - P(B)P(C)\right] =$

$P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \overset{?}{=}$

$P(A\cap B) + P(A\cap C) - P((A\cap B)\cup(A\cap C)) = P(A\cap(B\cup C))$

·) $A\setminus B = A\cap B^c$ mit Lemma (5.8) gilt:

$P(A\setminus B\cap C) = P(A\cap B^c\cap C) = P(A)P(B^c)P(C) = P(A\setminus B)P(C)$

1.W \ 2.W	1	2	3	4	5	6
1	B D	C	B C D		B C	
2	A	A B C	A C D	A B	A C	A B
3	B D	C	B C		B C	
4	A D	A B C	A C D	A B	A C	A B
5	B	C	B C D		B C	
6	A D	A B C	A C	A B	A C	A B

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(D) = \frac{2}{9}$

$P(A\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$

$P(B\cap D) = \frac{1}{9} = P(B)P(D)$

$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$ ⊕

$P(A\cap C\cap D) = \frac{1}{18} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} = P(A)P(C)P(D)$

$P(A\cap B\cap C\cap D) \neq P(A)P(B)P(C)P(D)$ vgl ⊕

---

b) $\dfrac{\binom{k}{m}\binom{l}{0}}{\binom{k+l}{m}} = \dfrac{k!}{\cancel{m!}(k-m)!}\cdot\dfrac{\cancel{m!}(k+l-m)!}{(k+l)!}$

a)

A10

WoSt/4

a) $EY_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot \frac{p}{n} = p$

$Var\ Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} Var\ X_i \underset{unab.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p)$

$= \frac{n\,p(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$

b) z.z. Es gilt: $P(|Y_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$

dazu Ungl. v. Tschebyscheff

$p = E(Y_n)$; $Var\ Y_n = \frac{p(1-p)}{n}$

$\Rightarrow P(|Y_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ //

c) $P(|Y_n - p| \leq 0{,}1) =$

$1 - \underbrace{P(|Y_n - p| > 0{,}1)}_{\overset{b)}{\leq} \frac{1}{n\varepsilon^2}} \underset{\varepsilon = 0{,}1}{\geq}$

$1 - \frac{100}{n} \overset{!}{\geq} 0{,}95 \Leftrightarrow$

$-\frac{100}{n} \geq -\frac{5}{100} \Leftrightarrow$

$\frac{5}{100} \leq \frac{100}{n} \Leftrightarrow$

$n \geq 2000$

✓

für $P(\{a\})$, $P(\{b\})$, $P(\{c\})$

dazu $h_n(a) = n_a$, $h_n(b) = n_b$, $h_n(c) = n_c$

Maximum - Likelihood - Schätzung f. a, b, c analog

$a+b+c = n$

dazu: $p_a^a (1-p_a)^{n-a} = p^a (1-p)^{b+c}$ ⊛

$\ln \uparrow \Rightarrow$ max ⊛ entspricht max $\ln p^a (1-p)^{b+c}$

$\Rightarrow$ Berechne Maximum von

$\ln p^a (1-p)^{b+c} = \ln p^a (1-p)^{n-a} =$

$a \ln p + (n-a) \ln (1-p)$

$$\frac{d}{dp} = \frac{a}{p} + \left(-\frac{n-a}{1-p}\right)$$

$$\frac{a}{p} - \frac{n-a}{1-p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(1-p) - p(n-a)}{p(1-p)} = 0$$

$\Leftrightarrow a(1-p) - pn + pa = 0$

$\Leftrightarrow a - ap + pa - pn = 0$

$\Leftrightarrow a - pn = 0$

$\Leftrightarrow p = a/n$

Analog $p_b = b/n$

$p_c = c/n$

WuSt/6

a) $P(X=0) = \frac{3}{32} + \frac{2}{32} + \frac{3}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = \frac{3}{64} + \frac{2}{64} + \frac{3}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

$P(X=2) = \frac{15}{64} + \frac{10}{64} + \frac{15}{64} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$

$P(Y=0) = \frac{6}{64} + \frac{3}{64} + \frac{15}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

$P(Y=1) = \frac{2}{32} + \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{1}{4}$

$P(Y=2) = \frac{6}{64} + \frac{3}{64} + \frac{15}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

b) $P(X=0 \wedge Y=0) = \frac{3}{32} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = P(X=0) \cdot P(Y=0)$

$P(X=1 \wedge Y=0) = \frac{3}{64} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} =$

$P(X=2 \wedge Y=0) = \frac{15}{64} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} =$

$P(X=0 \wedge Y=1) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$P(X=1 \wedge Y=1) = \frac{1}{32} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$

$P(X=2 \wedge Y=1) = \frac{5}{32} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4}$

$P(X=0 \wedge Y=2) = \frac{3}{32} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$

$P(X=1 \wedge Y=2) = \frac{3}{64} = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8}$

$P(X=2 \wedge Y=2) = \frac{15}{64} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = P(X=2)\, P(Y=2)$

$\Rightarrow X, Y$ unabh.

c)

$X+Y=k$	$P(X+Y=k)$
0	$\frac{3}{32}$
1	$\frac{1}{16} + \frac{3}{64} = \frac{7}{64}$
2	$\frac{15}{64} + \frac{1}{32} + \frac{3}{32} = \frac{23}{64}$
3	$\frac{5}{32} + \frac{3}{64} = \frac{13}{64}$
4	$\frac{15}{64}$

$$F_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{3}{32} & 0 \le z < 1 \\ \frac{13}{64} & 1 \le z < 2 \\ \frac{36}{64} & 2 \le z < 3 \\ \frac{49}{64} & 3 \le z < 4 \\ 1 & z \geq 4 \end{cases}$$