**Name:**____________________ **Matrikelnummer:** ________________

12.2.2019

# Klausur Diskrete Strukturen

# WS 2018/19, Prof. Dr. G. Hiß

*Die ersten 5 Aufgaben sind Rechenaufgaben. Bitte schreiben Sie Ihre Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse bei diesen Aufgaben nicht zu begründen. Es gibt für Ansätze und Begründungen auch keine Punkte.*

**Aufgabe 1.** Seien $f = X^5 + X^4 + X^2 + 1$ und $g = X^5 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ zwei Polynome und $I = (f, g) \subseteq \mathbb{F}_2[X]$ das davon erzeugte Ideal.

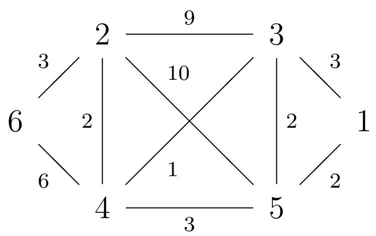
(a) Berechnen Sie ein Polynom $d \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $I = (d)$.

$d =$ (3 Punkte)

(b) Was ist der Grad von $f^2 - gf$? (1 Punkt)

(c) Geben Sie die irreduziblen Faktoren von $X^3 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ an. (Schreiben Sie die Elemente in $\mathbb{F}_3$ als $0, 1, 2$.) (3 Punkte)

**Aufgabe 2.** Sei $G$ der folgende (ungerichtete) gewichtete Graph mit $V = \underline{6}$.




Weiter sei $G'$ der auf $V' = \{1, 3, 4, 6\}$ induzierte Teilgraph von $G$.

(a) Geben Sie $n_G$, $m_G$ und $r_G$ an. $n_G =$ $m_G =$ $r_G =$ (1 Punkt)

(b) Geben Sie $n_{G'}$, $m_{G'}$ und $r_{G'}$ an. $n_{G'} =$ $m_{G'} =$ $r_{G'} =$ (1 Punkt)

(c) Berechnen Sie die Distanz aller Knoten $v$ von $G$ zum Knoten 1 und tragen Sie diese in die folgende Tabelle ein.

| $v$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(1, v)$ | | | | | | |

(3 Punkte)

**Aufgabe 3.** Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 4 & 5 & 8 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ Permutationen aus $S_9$.

(a) Was ist das Signum von $\pi$? $\mathrm{sgn}(\pi) = \boxed{\phantom{xx}}$ (1 Punkt)

(b) Geben Sie $\sigma \circ \pi$ in disjunkter Zykelschreibweise an.

$\sigma \circ \pi = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$ (2 Punkte)

(c) Geben Sie $\sigma^{-1}$ in disjunkter Zykelschreibweise an.

$\sigma^{-1} = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$ (2 Punkte)

(d) Was ist das kleinste $k$, so dass $\sigma^k = \mathrm{id}$ ist? $k = \boxed{\phantom{xx}}$ (1 Punkt)

**Aufgabe 4.** Geben Sie bei den folgenden Aufgaben die Ergebnisse als Zahl an (nicht als Formel mit Binomialkoeffizienten oder Fakultäten).

(a) Wieviele Zahlen in $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 10000\}$ haben eine Dezimaldarstellung, in der keine $0$ oder $5$ vorkommt? (Wir schreiben Zahlen nicht mit führenden Nullen.)

$\boxed{\phantom{xxxx}}$ (1 Punkt)

(b) Wieviele $4$-elementige Teilmengen gibt es von der Menge $\underline{7}$, die eine $1$ oder eine $2$ enthalten?

$\boxed{\phantom{xxxx}}$ (1 Punkt)

(c) Wieviele Wörter der Länge $12$ können aus den Buchstaben $\mathtt{X}$ und $\mathtt{Y}$ gebildet werden, die eine ungerade Anzahl von $\mathtt{X}$ enthalten?

$\boxed{\phantom{xxxx}}$ (1 Punkt)

(d) Wieviele $6$-Tupel aus der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt es, in denen jedes Element höchstens $2$ Mal vorkommt?

$\boxed{\phantom{xxxx}}$ (1 Punkt)

(e) Wieviele Möglichkeiten gibt es, $2$ weiße und $4$ schwarze Türme so auf ein $6 \times 6$-Schachbrett zu stellen, dass keine zwei von ihnen in einer Zeile oder Spalte stehen?

$\boxed{\phantom{xxxx}}$ (1 Punkt)

**Name:**____________________________ **Matrikelnummer:** __________________

**Aufgabe 5.**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$.

(a) Geben Sie die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ an.

$\mathbb{L}_0 =$ (2 Punkte)

(b) Wieviele freie Unbekannte hat das Gleichungssystem $Ax = 0$? (1 Punkt)

(c) Geben Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b_1$ an.

$\mathbb{L}_1 =$ (2 Punkte)

(d) Geben Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b_2$ an.

$\mathbb{L}_2 =$ (2 Punkte)

*In den folgenden schriftlichen Aufgaben müssen Sie alle Ihre Aussagen begründen.*
*Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.*
**Erinnerung:** *Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *enthalten nach der Konvention dieser Vorlesung nicht die* $0$.

**Aufgabe 6.** Seien $M$ und $N$ Mengen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M \cap N) = \mathcal{P}(M) \cap \mathcal{P}(N)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M \cup N) = \mathcal{P}(M) \cup \mathcal{P}(N)$ genau dann gilt, wenn $M \subseteq N$ oder $N \subseteq M$ ist.

(2+3 Punkte)

**Aufgabe 7.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

ist. (5 Punkte)

**Aufgabe 8.** Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad $3$ in $\mathbb{F}_2[X]$. (5 Punkte)

**Aufgabe 9.** Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $J \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$S = \left\{ A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \ AJA^t = J \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist. (5 Punkte)