Diskrete Strukturen Lösungen

Anonymous

25. Februar 2016

Aufgabe 1

Wir betrachten die folgende Aussage:

$$\text{A: } \textit{Alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy aus.} \quad (1)$$

Geben Sie an, wie sich A und die jeweils unten angegebene Aussage B zueinander verhalten. Kreuzen Sie *Neg* an wenn B die Verneinung von A ist, *Äq* wenn A und B äquivalent sind, und *keins* wenn keines der beiden zutrifft. Annahmen: Der Hörsaal ist nicht leer und jede Person darin besitzt genau ein Handy, dessen Zustand entweder an oder aus ist. *Hinweis:* Es ist gemeint, ob A und B allgemein, d.h. in jeder möglichen im Hörsaal herrschenden Situation, äquivalent zueinander bzw. Negationen voneinander sind. Etwas präziser kann man A und B als Aussageformen A(S) und B(S) auffassen, deren Wahrheitswert von der Situation S im Hörsaal abhängen. In diesem Sinne ist dann anzukreuzen: *Äq* wenn *A(S)* $\Leftrightarrow$ *B(S)* für jede Situation S gilt, *Neg* wenn *A(S)* $\Leftrightarrow \neg$ *B(S)* für jede Situation S gilt, und *keins* anderenfalls.

- B: *Wenn alle Personen im Hörsaal ihr Handy aus haben, folgt dass der Hörsaal leer ist.*

  Solution: Neg

- B: *Keine Person im Hörsaal hat ihr Handy aus.*

  Solution: keins

- B: *Keine Person im Hörsaal hat ihr Handy an.*

  Solution: Äq

- B: *Nicht alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy aus.*

  Solution: Neg

- B: *Es gibt eine Person im Hörsaal, die ihr Handy nicht an hat.*

Solution: keins

Aufgabe 2

Handelt es sich um Tautologien?

- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

  Solution: Ja

- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

  Solution: Nein

- $(A xor B) \vee \neg(A \wedge \neg B)$

  Solution: Ja

- $(A \to B) \vee (B \to A)$

  Solution: Ja

- $((\neg A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)) \to \neg A$

  Solution: Ja

Aufgabe 3

Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

- Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$.

  Solution: Ja

- $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  Solution: Nein

- $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

  Solution: Nein

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

  Solution: Ja

- Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.

  Solution: Ja

Aufgabe 5

Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

- Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 8 Elemente.

Solution: Ja

- $\{\{n \in \mathbb{N} | n \text{ gerade}\}, \{n \in \mathbb{N} | n \text{ ungerade}\}, \{-n | n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade}\}, \{-n | n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}\}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

Solution: Nein

- $\{\{1\}, \{2,3,4\}, \{5\}, \{1\}\}$ ist eine Partition von $\underline{5}$.

Solution: Ja

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$

Solution: Ja

- Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist gerade}\}$ hat genau 3 Elemente.

Solution: Nein

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Solution: Nein

- $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$

Solution: Nein

Aufgabe 6

Kreuzen Sie alle Eigenschaften der gegebenen Abbildung an.

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x,y) \mapsto x^2 + 2y$.

Solution: surjektiv

- $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x,y) \mapsto (x^2, x - y)$.

Solution:

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3)$.

Solution: injektiv

- $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x,y) \mapsto (x^2 + y^2, x - y)$.

Solution:

- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, (x,y) \mapsto (x - y, x + y)$.

Solution: injektiv

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y$.

Solution: surjektiv

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$.

Solution: surjektiv

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Anzahlen.

- Anzahl der Abbildungen $\underline{4} \to \underline{5}$.

Solution: 625

- Anzahl der injektiven Abbildungen $\underline{3} \to \underline{5}$.

Solution: 60

- Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{6} \to \underline{6}$.

Solution: 720

- Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{13} \to \underline{2}$.

Solution: 8190

- Anzahl der bijektiven Abbildungen $\underline{8} \to \underline{8}$.

Solution: 40320

Aufgabe 10

Es seien die folgenden Mengen gegeben: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid \ 0 \leq n \leq 10\}$ und $C := \{5, 6, 7, 8\}$. Außerdem seien die folgenden Abbildungen gegeben: $i : A \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$; $f : C \to A$, $n \mapsto n/2$ falls n gerade ist und $n \mapsto (n-1)/2$ falls n ungerade ist; $g : \mathbb{Z} \to A$, $z \mapsto r$, wobei $z = 11q + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 11$. Bei den Fragen nach Anzahlen geben Sie entweder eine Zahl oder das Wort `unendlich` ein.

- Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{1\})$

Solution: 0

- Welche Kompositionen sind definiert? (Alle ankreuzen!) **A.**$i \circ f$ **B.**$f \circ i$ **C.**$i \circ g$ **D.**$g \circ i$ **E.**$f \circ g$ **F.**$g \circ f$

Solution: A,C,D,F

- Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{2, 3\}$ unter f?

Solution: 3

- Wieviele Elemente hat das Bild von $i \circ g$?

Solution: 11

- Wieviele nicht-leere Fasern hat f?

Solution: 3

Aufgabe 11

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen zwischen den Mengen A, B und C. Sind die folgenden Aussagen für alle solchen Abbildungen richtig?

- Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

Solution: Nein

- Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

Solution: Nein

Aufgabe 12

Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind wahr?

- Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 2^{12} verschiedene reflexive Relationen.

Solution: Ja

- Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 81 verschiedene Relationen.

Solution: Nein

- Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 3 verschiedene Äquivalenzrelationen.

Solution: Nein

- Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 64 verschiedene symmetrische Relationen.

Solution: Nein

Aufgabe 13

Diese Fragen beziehen sich auf die untenstehende schriftliche Aufgabe. Bestimmen Sie zuerst die Formeln aus der schriftlichen Aufgabe und berechnen Sie dann damit die geforderten Anzahlen.

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{x, y, w, z\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{4}$, die antisymmetrisch sind.

Solution: 11664

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{12}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 4096

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{4}$, die eine Totalordnung sind.

Solution: 24

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{6}$, die reflexiv und antisymmetrisch sind.

Solution: 14348907

Aufgabe 15

Kreuzen Sie alle Zyklenschreibweisen an, die die gegebene Permutation beschreiben. Hierbei seien

$$\begin{aligned} a &= (1,2,5)(3,4,6) & b &= (2,5,1)(3,4,6) \\ c &= (1,5,2)(3,4,6) & d &= (5,2,1)(3,4,6) \\ e &= (4,6,3)(5,2,1) \end{aligned}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: c,d,e

Aufgabe 16

Gegeben seien die folgenden Permutationen in Zyklenschreibweise:

$$\begin{aligned} h &= (1,4,7,10,3,8)(2,6,9,5) \\ k &= (1,3,10,7)(2,6,4)(5,8,9) \\ \ell &= (1,10,7,8,9)(2,3,6,5,4) \\ m &= (1,2,8,10,3,4)(5,9,7,6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= (1,6,2)(3,7,9,10,8) & b &= (2,5,8)(3,10,4,6,7) \\ c &= (1,6,8,7,4,3,2,9) & d &= (1,4,8,7,2,5,10,6) \\ e &= (1,3,2,9,8,7,5)(4,10,6) & f &= (1,3,5)(2,4,8,7,10,6,9) \\ g &= (1,6,2,5,9,4,3,7,10,8) \end{aligned}$$

Kreuzen sie die richtige Antwort an:

- $k \circ m =$

  Solution: c

- $m \circ \ell =$

  Solution: f

- $h \circ m =$

  Solution: a

Aufgabe 17

Es sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit die angegebene Gleichung von Abbildungen gilt.

- $(1\ 2) \circ (2\ 5) \circ (3\ 9) \circ (i\ 6) \circ (7\ 8) \circ (9\ 6) \circ (1\ 6) = \sigma$

  Solution: 8

- $(1\ i) \circ (1\ 3) \circ (2\ 5) \circ (9\ 8) \circ (8\ 7) \circ (7\ 6) \circ (3\ 6) = \sigma$

  Solution: 2

- $(4\ 5) \circ (1\ 5) \circ (9\ 8) \circ (3\ 8) \circ (i\ 2) \circ (8\ 7) \circ (2\ 4) \circ (7\ 4) \circ (1\ 4) = \sigma$

  Solution: 6

- $(1\ 3) \circ (9\ 3) \circ (9\ 8) \circ (5\ 8) \circ (8\ 2) \circ (6\ 8) \circ (7\ i) = \sigma$

  Solution: 8

Aufgabe 18

Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus S_{12}. (Hinweis: Die Sätze im Skript 1.5.5 sind dabei hilfreich).

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 10 & 3 & 12 & 1 & 5 & 8 & 7 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

  Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$

  Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

  Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

  Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

  Solution: -1

Aufgabe 19

Gelten die folgenden Aussagen?

- Die surjektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition.

  Solution: Nein

- Die bijektiven Abbildungen einer fünfelementigen Menge in sich selbst bilden bzgl. der Komposition eine abelsche Gruppe.

  Solution: Nein

- (B, xor) ist eine Gruppe, wobei $B = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte ist.

  Solution: Ja

Aufgabe 20

Ist U eine Untergruppe von G?

- $G = (\mathbb{Z}, +), U =$Menge der geraden ganzen Zahlen.

Solution: Ja

- $(G, \cdot)$ eine beliebige abelsche Gruppe, $U = \{x \cdot x \cdot x \mid \ x \in G\}$.

Solution: Ja

- G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cap U_2$.

Solution: Ja

- $G = (S_n, \circ), U = \{\pi \in S_n | sgn\pi = 1\}$.

Solution: 6

Aufgabe 21

Wieviele Untergruppen hat die Gruppe $(S_3, \circ)$?

- Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $x \in G$ und $\lambda_x : G \to G,\ g \mapsto x \cdot g$. Welche der folgenden Eigenschaften hat λ_x: (A) surjektiv und nicht injektiv, (B) injektiv und nicht surjektiv, (C) bijektiv (D) nicht injektiv und nicht surjektiv?

Solution: C

Aufgabe 22

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Gelten die folgenden Aussagen?

- $a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{12}$

Solution: Nein

- Die Matrix A hat 3 Spalten und 2 Zeilen.

Solution: Ja

Aufgabe 23

Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten. $A := \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.
Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix $X = (x_{ij})$ definiert. Falls nein, kreuzen Sie `Q` an (für *Quatsch*) und sonst kreuzen sie den Eintrag x_{11} an.

- $X = CAD + A$

Solution: 180

- $X = ADB - 4C^2$

  Solution: 79

- $X = D^3B - C$

  Solution: Q

- $X = 7BA - 193D^2$

  Solution: 0

- $X = DBD$

  Solution: Q

Aufgabe 27

Gelten die folgenden Aussagen?

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a \cdot x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

  Solution: Nein

- Der triviale Ring ist nullteilerfrei.

  Solution: Ja

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $\cdot$ ein Inverses.

  Solution: Nein

- Jeder Körper ist ein nullteilerfreier Ring.

  Solution: Ja

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $+$ ein Inverses.

  Solution: Ja

- Jeder Körper ist ein kommutativer Ring.

  Solution: Ja

- Jeder Ring ist ein Körper.

  Solution: Nein

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a + x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

  Solution: Ja

Aufgabe 28

Gelten die folgenden Rechengesetze in jedem kommutativen Ring?

- $c \cdot ((a+d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

Solution: Nein

- $c \cdot ((a+d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b + c$

Solution: Nein

- $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c)$

Solution: Ja

- $ab - ba = 0$

Solution: Ja

- $c \cdot ((a+d) \cdot e + b) = a \cdot c \cdot e + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

Solution: Ja

- $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c) \cdot a$

Solution: Nein

Aufgabe 29

Ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen Weisen, auf die sich eine korrekte Aussage ergibt.

- Die Teilbarkeitsrelation in jedem kommutativen Ring ist ...

Solution: reflexiv,transitiv

- Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für jedes $a \in R$ gilt: a Einheit ... $ax = b$ ist für jedes $b \in R$ eindeutig lösbar. **A.**$\Leftarrow$ **B.**$\Rightarrow$

Solution: A,B

Aufgabe 30

Berechnen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler d der beiden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie ferner Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = d$. Damit die Antwort eindeutig wird, sind λ, μ so zu finden, dass $0 \leq \lambda < \frac{b}{d}$ ist. Geben Sie dann die geforderten Werte ein.

- μ für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.

Solution: -5003

- d für $a = 247$ und $b = 323$.

Solution: 19

- λ für $a = 65432100$ und $b = 12345600$.

Solution: 8819

- d für $a = 987$ und $b = 610$.

Solution: 1

- λ für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

Solution: 654535

Aufgabe 32

Beantworten Sie die Fragen. Falls nach einer Restklasse gefragt ist, so ist jeweils der kleinste nicht-negative Repräsentant dieser Klasse einzugeben (er ist eindeutig). Geben Sie '-' ein, falls es keine Restklasse so wie gesucht gibt (z.B. falls keine Lösung oder kein Inverses existiert).

- Sei $n = 610$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{987} \cdot x = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 466

- Sei $n = 91$. Ist $\overline{90}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: Ja

- Sei $n = 99$. Wie lautet das Inverse von $\overline{23}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 56

- Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-75}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 36

- Wieviele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}_{57}$?

Solution: 36

- Sei $n = 12345$. Ist $\overline{9}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: Nein

- Sei $n = 65432100$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{12345600} \cdot x = \overline{30}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: -

- Was ist $\overline{2}^{1000}$ in $\mathbb{Z}_7$?

Solution: 2

- Sei $n = 323$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{247} \cdot x = \overline{38}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 110,127,144,161,178,195,212,229,246,25,263,280,297,314,42,59,76,8,93

Aufgabe 33

Wir betrachten ein RSA Verschlüsselungssystem und bezeichnen die Parameter wie in der Vorlesung. Die Primzahlen $p = 101$ und $q = 211$ seien für diese Aufgabe fest gewählt. Nachrichten sind Elemente aus $\mathbb{Z}_n$ wobei $n = pq$ (ohne Querstrich notiert).

- Der Verschlüsselungsexponent sei $k = 19$ und es sei $y = 13749$ eine verschlüsselte Nachricht. Wie lautet die unverschlüsselte Nachricht x?

  Solution: 1234

- Wählen Sie als Verschlüsselungsexponenten $k = 11$ und verschlüsseln Sie die Nachricht $x = 4321$. Wie lautet die verschlüsselte Nachricht y?

  Solution: 20923

- Kann $k = 1533$ als Verschlüsselungsexponent gewählt werden?

  Solution: Nein

- Wieviele verschiedene Nachrichten können mit dem RSA-System in dieser Aufgabe verschlüsselt werden?

  Solution: 21311

- Wieviele verschiedene Verschlüsselungsexponenten k erlaubt das RSA-System in dieser Aufgabe?

  Solution: 4800

- Wenn als Verschlüsselungsexponent $k = 17$ gewählt ist, was ist der Entschlüsselungsexponent l?

  Solution: 12353

Aufgabe 38

Wir betrachten verschiedene Körper K und Polynome über K in der Unbestimmten X. Weiter betrachten wir zu jedem Polynom $f(X) = a_k X^k + \ldots + a_1 X + a_0$ und $c \in K$ die *Polynomfunktion* $K \to K$, $c \mapsto f(c) = a_k c^k + \ldots + a_1 c + a_0$. Geben Sie wie in früheren Aufgaben ein Ergebnis in einem endlichen Körper $\mathbb{Z}_n$ als ganze Zahl im Bereich von 0 bis $n - 1$ an.

- Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wieviele Polynome gibt es vom Grad 7 über K?

  Solution: 4374

- Sei $K = \mathbb{Z}_5$ und $f(X) = X^5 - 3X^4 + 1$. Geben Sie die Summe $\sum_{c \in \mathbb{Z}_5} f(c)$ an.

Solution: 3

- Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wieviele Polynomfunktionen $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ gibt es?

Solution: 27

- Sei $K = \mathbb{Z}_7$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + 2X^7 + 6X^2 + 5X$ und $X^8 + 5X^7 + 6X^2 + 2X$ beschrieben werden, gleich?

Solution: Ja

- Sei $K = \mathbb{R}$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + X^7 - 14X^6 - 14X^5 + 49X^4 + 49X^3 - 36X^2 - 36X$ und $X^8 - X^7 - 14X^6 + 14X^5 + 49X^4 - 49X^3 - 36X^2 + 36X$ beschrieben werden, gleich?

Solution: Nein

Aufgabe 39

Die Polynome in dieser Aufgabe haben Koeffizienten in den reellen Zahlen. Wenn nach dem ggT von zwei Polynomen gefragt wird, dann ist der normierte ggT gemeint. Wenn als Antwort nach einem Polynom gefragt wird, so geben Sie die Liste der Koeffizienten durch Kommas getrennt an; fangen Sie beim Hauptkoeffzient an und hören Sie mit dem absoluten Koeffizienten auf (1 und 0 als Koeffizient werden mitgeschrieben). Beispiel $X^4 - 3X^2 + X + 8$ geben Sie ein als: `1,0,-3,1,8`.

- Was ist der Quotient von $4X^6 - 15X^5 + 11X^4 - 22X^3 + 24X^2 - 17X + 6$ und $X^4 - 3X^3 - 4X + 3$.

Solution:

- Was ist der ggT von $X^7 - 1$ und $X^4 + 1$?

Solution:

- Was ist der ggT von $2X^2 - 10X + 12$ und $3X^3 - 9X^2 + 2X - 6$?

Solution:

- Was ist der ggT von $X^5 - 3X^4 - 2X^3 - X^2 + 3X + 2$ und $X^4 - 3X^3 - X^2 - 3X - 2$?

Solution:

- Ist $4X^5 - 3X$ ein Teiler von $4X^{12} - 3X^8 - 6X^5 + 6X$?

Solution: Nein

- Ist $2X + 3$ ein Teiler von $2X^6 + 3X^5 - 4X^4 - 9X^3 + 12X + 18$?

  Solution: Nein

Aufgabe 40

Wir ziehen aus einem Vorrat an eindeutig nummerierten Kugeln (z.B. Lottokugeln) nach dem angegebenen Modus. Durch welche mathematische Struktur wird das Ergebnis dieses Vorgangs beschrieben?

- Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Tupel
- Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Permutation
- Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Multimenge
- Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Kombination
- Abweichend von der bisherigen Aufgabenstellung sind die Kugeln nun nicht mehr eindeutig nummeriert, sondern sind in einer von endlich vielen möglichen Farben gefärbt. Es wird angenommen, dass der Vorrat an Kugeln in jeder Farbe gross ist im Vergleich zur Anzahl der Ziehungen. Wir ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Multimenge

Aufgabe 41

Mehr oder weniger? Es sei A eine endliche Menge mit mindestens zwei Elementen und $k > 1$.

- Gibt es mehr k-Permutationen aus A als k-Tupel, oder weniger?

  Solution: weniger
- Gibt es mehr k-Multimengen aus A als k-Tupel, oder weniger?

  Solution: weniger

Aufgabe 42

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen. Hinweis: kombinatorische Standard-Typen

- Wieviele Passwörter der Länge 5 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden?

  Solution: 380204032

- Bei einer Tagung sollen 10 verschiedene Leute jeweils einmal vortragen. Wieviele mögliche Vortragsprogramme gibt es noch, wenn der erste und letzte Vortrag bereits fest besetzt sind?

  Solution: 40320

- Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 6 Würfeln?

  Solution: 462

- Von 90 Packungen Eiern enthalten 7 ein beschädigtes Ei. Wieviele Stichproben von 10 Packungen gibt es, von denen mindestens eine ein beschädigtes Ei enthält?

  Solution: 3288313152333

- Wieviele Wörter lassen sich aus den vier Buchstaben `R,W,T,H` bilden? (Jeder der aufgelisteten Buchstaben soll genau einmal im Wort vorkommen.)

  Solution: 24

Aufgabe 43

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen.

- Wieviele 7-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?

  Solution: 544320

- Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 6 Würfeln, in denen eine ⚀ oder eine ⚁ vorkommt?

  Solution: 378

- Wieviele Bitfolgen der Länge 24 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit zweimal hintereinander vorkommt?

  Solution: 16777214

- Wieviele Dezimalzahlen mit bis zu zehn Ziffern enthalten die Ziffer 3?

  Solution: 6513215599

- Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden, die ein X und kein Zeichen doppelt enthalten?

  Solution: 499800

Aufgabe 43

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen. Hinweis: Anordnung von Multimengen

- Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `K,L,A,U,S,U,R` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 7 haben.)

  Solution: 2520

- Bei einem Seminar sollen 4 Studierende jeweils drei Vorträge halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Vortragenden?

  Solution: 369600

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 40 Studierende 2 Tutoren zuzuordnen, wenn die Tutoren gleichviele Studierende betreuen sollen?

  Solution: 137846528820

- Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `E,X,Z,E,L,L,E,N,Z` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 9 haben.)

  Solution: 15120

Aufgabe 44

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfielt sich, einen Taschenrechner zu benutzen. Bei allen Passwortaufgaben werden die Passwörter aus den 95 druckbaren ASCII-Zeichen gebildet. Wir teilen diese ASCII-Zeichen auf in 26 Grossbuchstaben, 26 Kleinbuchstaben, 10 arabische Ziffern und 33 Sonderzeichen.

- Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Groß- und ein Kleinbuchstabe, sowie mindestens eine Ziffer und ein Sonderzeichen vorkommen, sind möglich?

  Solution: 1271556000

- Wieviele Passwörter mit höchstens 5 Zeichen aus paarweise verschiedenen Buchstaben sind möglich?

Solution: 318507905

- Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Gross- und ein Kleinbuchstabe vorkommt, sind möglich?

Solution: 4756755120

- Bei einer Quizshow dürfen 3 Personen mitspielen. Sie werden aus 161 Zuschauerinnen und 119 Zuschauern ausgesucht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei Zuschauerinnen und einen Zuschauer auszusuchen?

Solution: 1532720

- Wieviele Teilmengen mit höchstens 4 Elementen hat die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid \ 1 \leq i \leq 10\}$?

Solution: 386

- Wieviele Passwörter der Länge 5, die ein Sonderzeichen und ansonsten nur Buchstaben enthalten, sind möglich?

Solution: 1206416640

Aufgabe 45

Berechnen Sie die gefragten Anzahlen.

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 4 Studenten auf 2 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen? Die Gruppen sind nicht nummeriert.

Solution: 7

- Wieviele Permutationen auf 4 Elementen haben genau 3 Zykel?

Solution: 6

- Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von $\underline{6}$ nach $\{u, w, x, y, z\}$?

Solution: 1800

- Es teilen sich 5 Philosophen in 2 Diskussionsgruppen auf, und jede Gruppe setzt sich jeweils im Kreis hin (Gruppen mit nur einer Person sind möglich). Wieviele mögliche Sitzordnungen gibt es? Weder die Gruppen noch die Plätze sind nummeriert.

Solution: 50

- Wieviele Permutationen auf 6 Elementen haben genau einen Zykel?

Solution: 120

Aufgabe 46

Entscheiden Sie, ob die angegebenen Gleichungen/Aussagen richtig sind.

- Gilt $S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n-1,k-1} + k^2 S_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

  Solution: ja

- Gilt $s_{n+1,k} = s_{n-1,k-2} + ns_{n-1,k-1} + ns_{n,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

  Solution: nein

- Es gibt mehr Permutationen von $\underline{100}$ mit genau 97 disjunkten Zykeln als es Partitionen von $\underline{100}$ in genau 97 Teile gibt.

  Solution: ja

Aufgabe 47

Sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "../../exercises/G2a")

- Wieviele Knoten mit geradem Grad hat G?

  Solution: 7

- Wieviele Kanten hat der auf $\{1, 3, 5, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 3

- Wieviele Pfade der Länge 3 gibt es von 1 nach 4?

  Solution: 3

- Was ist die größte Länge einer Tour in G?

  Solution: 13

- Was ist die größte Länge eines Kreises in G?

  Solution: 9

Aufgabe 49

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten, m Kanten und r Zusammenhangskomponenten. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Wir nennen einen Graph *kreisfrei*, wenn er keine Kreise besitzt.

- Wenn G kreisfrei und zusammenhängend ist, dann hat, für jedes $v \in V$, der auf $V \setminus \{v\}$ induzierte Teilgraph von G ein oder zwei Komponenten.

  Solution: Nein

- Wenn G kreisfrei und zusammenhängend ist, dann hat $(V, E \setminus \{e\})$ für jedes $e \in E$ zwei Komponenten.

Solution: Ja

- Entfernt man m' Kanten aus G, so hat der entstandene Graph $\leq r - m'$ Komponenten.

Solution: Nein

- Fügt man m' neue Kanten zu G hinzu und der so entstandene Graph G' ist kreisfrei, so hat G' genau $r - m'$ Komponenten.

Solution: Ja

- In einem kreisfreien Graphen ist jede Kante eine Brücke.

Solution: Ja

Aufgabe 50

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für beliebige Graphen $G = (V, E)$ richtig sind.

- Wenn G ein Baum ist, dann ist jede Kante von G eine Brücke.

Solution: Ja

- Wenn G zusammenhängend ist und einen Kreis enthält, dann gibt es eine Kante $e \in E$, so dass auch $(V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist.

Solution: Ja

- Wenn G zusammenhängend ist, dann gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Solution: Ja

- Wenn $|V| = n$ und $|E| > (n-1)(n-2)/2$ ist, dann ist (V, E) zusammenhängend.

Solution: Ja

- Ist die Komponentenzahl von G gleich $|V| - |E|$, so ist G kreisfrei.

Solution: Ja

- Wenn G zusammenhängend ist, dann gilt $|E| > |V| - 1$.

Solution: Nein

- Die Komponentenzahl von G ist stets $\leq |V| - |E|$.

Solution: Nein

- Wenn jede Kante von G eine Brücke ist, dann ist G ein Baum.

Solution: Nein

- Ist G kreisfrei, so ist die Komponentenzahl von G gleich $|V|-|E|$.

Solution: Ja

- Die Komponentenzahl von G ist stets gleich $|V| - |E|$.

Solution: Nein

Aufgabe 51

Ergänzen Sie die Lücke auf die richtige Weise. (Falls mehrere Antworten richtig sind, ist die beste Schranke auszuwählen.)

- Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, der eine Eulertour besitzt, enthält mindestens ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: A

- Ein unzusammenhängender Graph mit n Knoten enthält maximal ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: D

- Ein Graph mit n Knoten enthält maximal ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: C

- Ein Graph mit n Knoten, der einen Hamiltonkreis besitzt, enthält mindestens ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: A

- Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten enthält mindestens ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: B

Aufgabe 52

Stimmt die Aussage?

- Jede Eulertour ist ein Kreis.

Solution: Nein

- Jede Brücke ist zu einem Knoten vom Grad 1 inzident.

Solution: Nein

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat weniger oder gleich viele Komponenten wie G.

Solution: Nein

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ungerade.

Solution: Nein

- Es gibt Graphen, die eine Eulertour aber keinen Hamiltonkreis besitzen.

Solution: Ja

Aufgabe 60

Zeichnen und untersuchen Sie den Graphen $G = (\underline{n}, E)$ mit n und E wie jeweils angegeben.

- $n = 5, E = \{(1,2),(3,4)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

Solution: 3

- $n = 13, E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,9\},\{3,12\},\{4,12\},\{5,13\},$ $\{7,11\},\{8,9\},\{9,10\},\{10,11\}\}$. Ist G ein Wald, Baum oder keins davon?

Solution: Baum

- $n = 5, E = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.
  Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 5

- $n = 5, E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5),(4,5)\}$. Wieviele verschiedene Spannbäume enthält dieser Graph?

Solution: 3

- $n = 13, E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{3,9\},\{4,12\},\{5,13\},$ $\{7,11\}, \{8,9\},\{9,10\}\}$. Ist G ein Wald, Baum oder keins davon?

Solution: Wald

Aufgabe 61

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig ist.

- Es gibt einen zusammenhängenden Graphen in dem jeder Knoten einen geraden Grad hat und der zwei benachbarte Kanten e und

f hat, die aber auf keiner Eulertour von G hintereinander durchlaufen werden.

Solution: Ja

Aufgabe 62

Sei $n \geq 2$. Sei K_n der vollständige Graph auf n Knoten, d.h. zwischen je zwei Knoten von K_n gibt es eine Kante. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ und u, v zwei verschiedene Knoten von K_n. Dann ist die Anzahl der Pfade von u nach v der Länge ℓ in K_n:

- **A.** $\binom{n-1}{\ell-1}(\ell-1)!$ **B.** $\binom{n-1}{\ell}(\ell)!$ **C.** $\binom{n-2}{\ell-1}(\ell-1)!$ **D.** $\binom{n-2}{\ell}(\ell)!$

Solution: C

Aufgabe 63

Sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "../../exercises/G2a")

- Besitzt G einen Eulerzug?

Solution: Ja

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 3, 5, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 3

- Besitzt G einen Hamiltonkreis?

Solution: Ja

- Besitzt G eine Eulertour?

Solution: Nein

Aufgabe 64

Es sei der folgende gewichtete Graph G gegeben (die Kanten sind mit ihren Gewichten versehen):

$$[2]1[2]e, b, -2se, b, -1[2]s, l, -12[2]2se, t, -7$$

$$3ne, t, -4se, b, -11[2]4ne, b, -3se, t, -5[2]5$$

$$[2]6ne, t, -9[2]e, t, -10[2]7[2]n, r, -6ne, b, -8$$

Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus minimale Wege vom Knoten 3 zu allen anderen Knoten. Alle diese Wege zusammen bilden einen Teilbaum T des Graphen G.

- Wieviele Blätter hat der Baum T?

  Solution: 3

- Welches Gesamtgewicht hat der minimale Pfad von 3 nach 7?

  Solution: 10

- Gibt es zu einem Knoten zwei minimale Pfade vom Knoten 3?

  Solution: Nein

- In welcher Reihenfolge werden durch den Algorithmus die minimalen Pfade zu den verschiedenen Knoten gefunden? Schreiben Sie die 7 Nummern der Knoten direkt hintereinander, so dass die Lösung wie eine 7-stellige Dezimalzahl aussieht.

  Solution: 3142765

- Was ist die Summe der Gewichte aller minimalen Pfade von 3 zu den anderen Knoten?

  Solution: 49

Aufgabe 67

Bestimmen Sie alle minimalen Spannbäume des folgenden gewichteten Graphen (die Kanten sind mit ihren Gewichten versehen):

$$[2]\bullet[2]e,b,-2se,b,-1[2]s,l,-12[2]\bullet se,t,-7$$

$$\bullet ne,t,-4se,b,-11[2]\bullet ne,b,-3se,t,-5[2]\bullet$$

$$[2]\bullet ne,t,-9[2]e,t,-10[2]\bullet[2]n,r,-6ne,b,-8$$

- Wieviele verschiedene minimale Spannbäume gibt es?

  Solution: 1

- Welchen Algorithmus kann man hier benutzen?

  Solution: Kruskal

- Welches Gewicht hat jeder minimale Spannbaum?

  Solution: 28

- Geben Sie einen minimalen Spannbaum an. Tragen Sie dazu die Längen der Kanten des Spannbaumes in aufsteigender Reihenfolge und direkt hintereinander (ohne Leerzeichen dazwischen) ein. Der Spannbaum mit den Kanten vom Gewicht 4,2,7,8,10,9 (er ist nicht minimal!) wird beispielsweise als die Zeichenkette '2478910' eingegeben.

  Solution: 124579

- Ist hierfür ein Greedy-Algorithmus geeignet?

  Solution: Ja

Aufgabe 68

Es sei $G = (V, E)$ ein Baum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Definition: Wir nennen einen Pfad $(v_0, \ldots, v_l)$ *maximal*, wenn er nicht verlängerbar ist, d.h. wenn kein Pfad der Form $(w, v_0, \ldots, v_l)$ oder $(v_0, \ldots, v_l, w)$ in dem entsprechenden Graphen existiert.

- Ist $(v_0, \ldots, v_l)$ ein Pfad in G mit $\deg v_0 = \deg v_l = 1$, so ist er maximal.

  Solution: Nein

- Ist ein Pfad $(v_0, \ldots, v_l)$ in G maximal, so sind v_0 und v_l Blätter.

  Solution: Ja

- Sei $V' \subseteq V$ eine Teilmenge von Knoten, so dass $V \setminus V'$ nur aus Blättern besteht. Dann ist der auf V' induzierte Teilgraph auch ein Baum.

  Solution: Ja

- Für jede Teilmenge $E' \subseteq E$ ist (V, E') ein Wald.

  Solution: Ja

- Jeder Teilgraph von G ist ein Wald.

  Solution: Ja

Aufgabe 69

Gegeben sei die folgende Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen

Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 39 & 12 & 6 & 15 \\ -8 & -22 & 8 & -36 & -10 \\ -4 & 208 & 16 & 132 & 70 \\ 0 & 45 & 0 & 36 & 15 \\ 12 & -57 & -12 & -18 & -15 \end{pmatrix},$$

In der Vorlesung haben wir die folgenden Zeilenumformungen definiert:
τ_{ij}: Vertausche die Zeilen i und j
$\alpha_{ij}(c)$ für $i \neq j$: Addiere das c-fache von Zeile j zu Zeile i
$\mu_i(c)$ für $c \neq 0$: Multipliziere Zeile i mit c.
Wende die folgenenden Operationen auf die Matrix an: $\tau_{15}, \alpha_{12}(1), \alpha_{13}(1), \alpha_{23}(-2), \mu_3(-1/4)$.
Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ $1 \leq i, j \leq 5$ die resultierende Matrix. Weiter sei Z eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A mit elementaren Zeilentransformationen berechnet wurde.

- Die Anzahl der Elemente in der Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems ist:
  (Geben Sie entweder eine Zahl ein, oder den Buchstaben u falls die Menge unendlich ist.)

Solution: u

- Die Stufenzahl r von Z ist:

Solution: 3

- Wie lautet a_{33}?

Solution: -4

- Die Anzahl der freien Unbekannten in Z ist:

Solution: 2

- Wieviele 0-Zeilen enthält die Normalform der Matrix?

Solution: 2

- Wie lautet a_{12}?

Solution: 129

Aufgabe 65

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Die Matrix A hat 3 Spalten und 2 Zeilen.

Solution: Ja

- Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Solution: Ja

- A ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Solution: Ja

- $a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{22}$

Solution: Ja

- Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist auch eine Lösung der Gleichung $10x_1 + 21x_2 - 11x_3 = 0$.

Solution: Nein

Aufgabe 66

Die Koeffizienten der Matrizen in dieser Aufgabe seien alle aus $\mathbb{R}$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.

Solution: Ja

- Die Matrix A sei in Zeilenstufenform und habe eine Nullzeile. Dann hat das durch A beschriebene homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Solution: Nein

- Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.

Solution: Ja

- Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilentransformationen auf eine Zeilenstufenform mit zwei Nullzeilen bringen.

Solution: Nein

- Sei A in Zeilenstufenform. Addiert man die i-te zur j-ten Zeile, wobei $i > j$ ist, so erhält man eine Matrix, die wieder in Zeilenstufenform ist.

Solution: Ja

Aufgabe 67

Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ eine freie Unbekannte hat, so hat es unendlich viele Lösungen.

Solution: Ja

- Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.

Solution: Ja

- Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit genauso vielen Gleichungen wie Unbekannten hat nur die Lösung 0.

Solution: Nein

- Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat nur die Lösung 0.

Solution: Nein

- Für jeden Körper K gilt: Wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem über K eine freie Unbekannte hat, so hat es unendlich viele Lösungen.

Solution: Nein

- Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.

Solution: Nein

Aufgabe 68

Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & 0 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & 0 \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & 0
\end{array}$$

Gelten die folgenden Aussagen?

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ Lösungen sind, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 - c_1 \\ \vdots \\ b_n - c_n \end{pmatrix}$ eine Lösung.

Solution: Ja

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - n \end{pmatrix}$ keine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn es eine von der Nulllösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.

Solution: Ja

Aufgabe 69

Es sei

$$(A, b) := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ a & -1 & 3 & 12 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

für jedes $a \in \mathbb{Q}$ die erweiterte Matrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$. Lösen Sie das Gleichungssystem und beantworten Sie die folgenden Fragen.

- Wenn $a = 4$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

Solution: 12

- Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

Solution: -8

- Wenn $a = 3$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

Solution: 24

- Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

Solution: 0

- Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

Solution: 3